

Exercices de Michel Quercia

Les exercices suivants ont été recueillis par mes étudiants (Maths-Sup, puis Maths-Spé) aux oraux des concours d'entrée aux grandes écoles. Ils sont classés par thèmes correspondant grosso-modo aux différents chapitres des programmes de Maths des CPGE, mais certains exercices anciens sont toutefois devenus hors programme. Pour la plupart, les exercices sont accompagnés d'une solution plus ou moins succinte allant de la simple réponse au calcul demandé à une rédaction complète pour les questions non immédiates.
Michel Quercia

Table des matières

Première partie

Algèbre générale

1 Applications

Exercice 2889 Images directes et réciproques

Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparer $f(A \Delta A')$ et $f(A) \Delta f(A')$.
4. Comparer $f^{-1}(B \Delta B')$ et $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$.
5. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

[002889]

Exercice 2890 $(X \cap A, X \cap B)$

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. Qu'est-ce que $\phi(\varnothing)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

[002890]

Exercice 2891 Partie stable par une application

Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A \subset E$, $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

[002891]

Exercice 2892 Factorisation d'une application

1. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?
2. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?

[002892]

Exercice 2893 Propriétés des applications $A \mapsto f(A)$ et $B \mapsto f^{-1}(B)$

Soit $f : E \to F$. On considère les applications

$$\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F), A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad \Psi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B).$$

Montrer que :
1) f est injective $\iff$ Φ est injective $\iff$ Ψ est surjective. [002893]
2) f est surjective $\iff$ Φ est surjective $\iff$ Ψ est injective.

Exercice 2894 $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ et $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : E^G \to F^G, \varphi \mapsto f \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad f^* G^F \to G^E, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Montrer que :

1. f est injective $\iff$ f_* est injective $\iff$ f^* est surjective.
2. f est surjective $\iff$ f_* est surjective $\iff$ f^* est injective.

[002894]

Exercice 2895

[$h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective] Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g, h sont bijectives. [002895]

Exercice 2896 Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathscr{S} = \{X \subset E \text{ tq } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.
2. Montrer que $\mathscr{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathscr{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4. Soient X et $Y \in \mathscr{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartienent à $\mathscr{S}$.
5. Montrer que l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{P}(f(E)), A \mapsto f(A)$ est une bijection.

[002896]

Exercice 2897 Conjugaison

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ bijective.
La conjugaison par f est l'application $\Phi_f : E^E \to E^E, \phi \mapsto f \circ \phi \circ f^{-1}$

1. Montrer que Φ_f est une bijection de E^E.
2. Simplifier $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. Simplifier $\Phi_f(\phi) \circ \Phi_f(\psi)$.
4. Soient $\mathscr{I}$, $\mathscr{S}$, les sous-ensembles de E^E constitués des injections et des surjections. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{S}$ sont invariants par Φ_f.
5. Lorsque ϕ est bijective, qu'est-ce que $\left(\Phi_f(\phi)\right)^{-1}$?

[002897]

Exercice 2898 Ensembles équipotents

Soient E,F deux ensembles. On dit que :

E est moins puissant que F	s'il existe une injection	$f: E \to F$
E est plus puissant que F	s'il existe une surjection	$f: E \to F$
E et F sont équipotents	s'il existe une bijection	$f: E \to F$.

1. Démontrer que : (E est moins puissant que F) $\iff$ (F est plus puissant que E).
2. Montrer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N}$ tq n est divisible par $3\}$, et $\mathbb{Z}$ sont deux à deux équipotents.
3. Démontrer que E est moins puissant que $\mathscr{P}(E)$.
4. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$ quelconque et $A = \{x \in E \text{ tq } x \notin f(x)\}$. Prouver que $A \notin f(E)$.
5. Est-ce que E et $\mathscr{P}(E)$ peuvent être équipotents ?
6. Soit G un troisième ensemble. Si E est moins puissant que F, démontrer que E^G est moins puissant que F^G.

[002898]

Exercice 2899 Affirmations

Soit $f : E \to F$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\, x \in E \quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y.$
2. $\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y.$
3. $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \forall\, y \in F \quad f(x) = y.$
4. $\exists\, x \in E$ tel que $\quad \exists\, y \in F$ tel que $\quad f(x) = y.$
5. $\forall\, y \in F \quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y.$
6. $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y.$
7. $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \forall\, x \in E \quad f(x) = y.$
8. $\exists\, y \in F$ tel que $\quad \exists\, x \in E$ tel que $\quad f(x) = y.$

[002899]

2 Coefficients du binôme

Exercice 2900 Calcul de sommes

Calculer $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

Correction ▼ [002900]

Exercice 2901 Calcul de sommes

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$.

1. Vérifier que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{k-p}$ pour $p \leqslant k \leqslant n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^p$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^p = 0$ si $p < n$.

Correction ▼ [002901]

Exercice 2902 Calcul de sommes

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k$.

Correction ▼ [002902]

Exercice 2903 Sommes de cardinaux

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{A\subset E} \operatorname{Card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cap B)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{Card}(A\cup B)$.

Correction ▼ [002903]

Exercice 2904 Sommes d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$ et $\displaystyle\sum_{i+j+k=n} ijk$.

Correction ▼ [002904]

Exercice 2905 Combinaisons avec répétitions

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1+\dots+x_n = p$.

1. Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.
2. Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^p + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1+\dots+x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).
3. En déduire que $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Correction ▼ [002905]

Exercice 2906 Sommes de coefficients du binôme

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n C_{p+k}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$. [002906]

Exercice 2907 C_n^p maximal

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer pour quelle valeur de p le nombre C_n^p est maximal (on étudiera le rapport C_n^p/C_n^{p+1}).

Correction ▼ [002907]

Exercice 2908 Parité de C_n^p

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.

1. Soit $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Vérifier que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
2. En déduire que : $\forall\, k \in \{1,\dots,n-1\}$, C_n^k est pair.
3. En déduire que : $\forall\, k \in \{0,\dots,n-1\}$, C_{n-1}^k est impair.

[002908]

Exercice 2909 Formule de Vandermonde

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sum_{k=0}^c C_a^k C_b^{c-k} = C_{a+b}^c$ ...

1. En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.
2. En cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E\cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.
3. Application : Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^q C_q^k C_n^{p+k} = C_{n+q}^{p+q}$.

[002909]

Exercice 2910 Formule d'inversion

Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x_k$. Montrer que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k y_k$. [002910]

Exercice 2911 Suite de Fibonacci

Soit $u_n = \sum_{p=0}^n C_{n-p}^p$. Montrer que $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (*suite de Fibonacci*). [002911]

3 Ensembles finis

Exercice 2912 Permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1,\dots,12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Correction ▼ Vidéo ■ [002912]

Exercice 2913 Permutations de couples

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions ...

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

Correction ▼ [002913]

Exercice 2914 Nombre d'opérations

1. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
2. Combien sont commutatives ?
3. Combien ont un élément neutre ?
4. Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

Correction ▼ [002914]

Exercice 2915 Formule du crible

Soient $A_1,\dots,A_n$ n ensembles finis.

1. (a) Calculer $\mathrm{Card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3)$ et $\mathrm{Card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$.
   (b) Suggérer une formule pour $\mathrm{Card}\,(A_1\cup\dots\cup A_n)$.
2. Démonstration de la formule : On note $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$, et pour $x\in E$ on pose $f_i(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A_i\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
   (a) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Développer complètement $p=(1-x_1)\times\dots\times(1-x_n)$.
   (b) En considérant la somme $\sum_{x\in E}(1-f_1(x))\dots(1-f_n(x))$, démontrer la formule 1b.
3. Applications :
   (a) Déterminer le nombre d'applications $f:\{1,\dots,p\}\to\{1,\dots,n\}$ non surjectives.
   (b) Déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant au moins un point fixe.

Correction ▼ [002915]

Exercice 2916 Inégalités pour la formule du crible

Soient $A_1,\dots,A_n$ n ensembles finis, et $E=\bigcup_{i=1}^n A_i$.

1. Montrer que $\mathrm{Card}\,(E)\leqslant\sum_{i=1}^n\mathrm{Card}\,(A_i)$. Cas d'égalité ?
2. Montrer que $\mathrm{Card}\,(E)\geqslant\sum_{i=1}^n\mathrm{Card}\,(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Card}\,(A_i\cap A_j)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [002916]

Exercice 2917 Couples (A,B) tels que $A \cup B = E$

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $\mathscr{E} = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \text{ tq } A \cup B = E\}$. Chercher card($\mathscr{E}$).

Correction ▼ [002917]

Exercice 2918 Parties ne contenant pas d'éléments consécutifs

1. Quel est le nombre de parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$ ne contenant pas d'éléments consécutifs ?
2. Soit t_n le nombre de parties de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal quelconque sans éléments consécutifs.
   (a) Montrer que $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$, $t_{2n+1} = t_n^2 + t_{n-1}^2$, et $t_{2n} = t_n^2 - t_{n-2}^2$.
   (b) Calculer t_{50}.

Indication ▼ Correction ▼ [002918]

Exercice 2919 Nombre de relations d'équivalence

Soit R_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. Trouver une relation de récurrence entre R_n et les R_k, $k < n$
   (fixer un élément, et raisonner sur la classe d'équivalence de cet élément).
2. Calculer R_n pour $n \leqslant 6$.

Correction ▼ [002919]

Exercice 2920 Equivalence entre fonctions

Soient E, F, deux ensembles non vides. On définit deux relations sur $X = F^E$ par :

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists\, \phi : F \to F \text{ bijective tq } g = \phi \circ f, \\ f \equiv g &\iff \big(\forall\, x,y \in E,\ f(x) = f(y) \iff g(x) = g(y)\big). \end{aligned}$$

1. Montrer que ce sont des relations d'équivalence.
2. Montrer que $f \sim g \Rightarrow f \equiv g$.
3. On suppose $f \equiv g$. Montrer que $f \sim g$ dans les cas suivants :
   (a) F est fini et f est surjective.
   (b) F est fini et f est quelconque.
   (c) E est fini.
4. Chercher un contrexemple pour $E = F = \mathbb{N}$.

[002920]

Exercice 2921 Très bon ordre

Soit E un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est totalement ordonné et fini. [002921]

Exercice 2922 Élément maximal

Soit E un ensemble ordonné. Un élément $a \in E$ est dit *maximal* s'il n'existe pas de $b \in E$ tq $b > a$.

1. Si E est totalement ordonné, montrer que : *maximal* $\iff$ *maximum.*
2. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ordonné par la divisibilité. Chercher les éléments maximaux.
3. Si E est fini, montrer qu'il existe un élément maximal.
4. Si E est fini et n'a qu'un seul élément maximal, montrer que cet élément est maximum.

[002922]

Exercice 2923 Nombres de Catalan

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels. Pour calculer la somme $x_1 + \cdots + x_n$, on place des parenthèses de façon à n'avoir que des additions de deux nombres à effectuer. Soit t_n le nombre de manières de placer les parenthèses (on pose $t_1 = 1$).

1. Déterminer t_2, t_3, t_4.
2. Trouver une relation de récurrence entre t_n et $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Correction ▼ [002923]

4 Nombres complexes

Exercice 2924 $\sum z_i + z_j$

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v| + |u-v| \geqslant |u| + |v|$, et déterminer les cas d'égalité.
2. Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|$.

Correction ▼ [002924]

Exercice 2925 Équations affines

1. Montrer que toute droite du plan admet pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\bar{z} = c\}$.

Correction ▼ [002925]

Exercice 2926 Transformation homographique

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Correction ▼ [002926]

Exercice 2927

Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On note $u = \frac{z + ab\bar{z} - a - b}{a - b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [002927]

Exercice 2928 Triangle équilatéral

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
4. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

[002928]

Exercice 2929 Sommets d'un carré

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a + ib &= c + id \\ a + c &= b + d. \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a,b,c,d ?
En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Correction ▼ [002929]

Exercice 2930 Configuration de points

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

1. z, z^2, z^4 sont alignés.
2. $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.
3. $z, \frac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Correction ▼ [002930]

Exercice 2931 $a+b+c=1$

Trouver $a,b,c \in \mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1. \end{cases}$

Correction ▼ [002931]

Exercice 2932 $u+v+w=0$

Soient u,v,w trois complexes unitaires tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u = jv = j^2w$ ou $u = jw = j^2v$.
[002932]

Exercice 2933 $z+1/z=2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$.

Correction ▼ [002933]

Exercice 2934 Symétrique par rapport à une droite

Les points A,B,M ayant pour affixes a,b,z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Correction ▼ [002934]

Exercice 2935 Orthocentre

Soient $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Correction ▼ [002935]

Exercice 2936 Similitudes dans un triangle

On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité. [002936]

Exercice 2937 Centre du cercle circonscrit

Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$, affixes de points A,B,C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a,b,c.

Correction ▼ [002937]

Exercice 2938 Sphère de $\mathbb{R}^3$

Soient $u,v \in \mathbb{C}$ tels que $u+v \neq 0$. On pose $x = \frac{1+uv}{u+v}$, $y = i\frac{1-uv}{u+v}$, $z = \frac{u-v}{u+v}$.

1. CNS sur u et v pour que x,y,z soient réels ?

2. On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x,y,z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.
3. A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Correction ▼ [002938]

Exercice 2939 Racines de l'unité

Résoudre :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
6. $\overline{x} = x^{n-1}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Correction ▼ [002939]

Exercice 2940 Sommes sur les racines de l'unité

Soit $\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=k}^{n-1} C_\ell^k \omega^{k+\ell}$.

Correction ▼ [002940]

Exercice 2941 Somme des puissances p-èmes des racines de l'unité

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de 1.

1. Calculer $\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $M = \max\{|P(x)|,\ x \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que tous les coefficients de P sont bornés par M.

Correction ▼ [002941]

Exercice 2942 $\sum \omega^{k^2}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. On demande de calculer $|Z|^2$. Pour cela ...

1. Écrire $|Z|^2$ comme une somme double.
2. Regrouper les termes diagonalement en tenant compte de la périodicité de la fonction $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminer le calcul.

Correction ▼ [002942]

Exercice 2943 $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = \exp\frac{2i\pi}{7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Correction ▼ [002943]

Exercice 2944 Calcul de produit

Simplifier $x = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ en utilisant $1, j, j^2$.

Correction ▼ [002944]

Exercice 2945 Position des racines carrées

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. A quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Correction ▼ [002945]

Exercice 2946 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.

Correction ▼ [002946]

Exercice 2947 Ensi P 91

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Correction ▼ [002947]

Exercice 2948

Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2 - (2+im)z - (1+im) = 0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Correction ▼ [002948]

Exercice 2949

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que

$$\left(|u|^2 - |v|^2\right)^2 = \left(\frac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2.$$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ aient même module ?

Correction ▼ [002949]

Exercice 2950 Moyennes géométrique et arithmétique

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha| + |\beta| = |m+\mu| + |m-\mu|$.

Correction ▼ [002950]

Exercice 2951 Somme de coefficients binomiaux

A l'aide de formules du binôme, simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}$.
2. $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-3)^k$.
3. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$.
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\big((k+1)\theta\big)$.
5. $\cos a + C_n^1 \cos(a+b) + C_n^2 \cos(a+2b) + \cdots + C_n^n \cos(a+nb)$.

Correction ▼ [002951]

Exercice 2952 Sommes trigonométriques

Simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.

2. $\sum_{k=1}^{n} \sin^3(k\theta)$.

Correction ▼ [002952]

Exercice 2953 Équation trigonométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre :

$$\begin{cases} \cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0 \\ \sin(a)+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0. \end{cases}$$

Correction ▼ [002953]

Exercice 2954 $\sum \cos^{2p}(x+k\pi/2p)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Simplifier $\cos^4\theta+\cos^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Simplifier $\cos^6\theta+\cos^6\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cdots+\cos^6\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$.
3. Simplifier $\cos^{2p}\theta+\cos^{2p}\left(\theta+\frac{\pi}{2p}\right)+\cdots+\cos^{2p}\left(\theta+\frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$.

Correction ▼ [002954]

Exercice 2955 $\sum \cos(kx)/\cos x^k = 0$

Résoudre : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Correction ▼ [002955]

Exercice 2956 $\sum C_n^k x^{n-k}\cos(k\alpha) = 0$

Résoudre en x : $x^n + C_n^1 x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + C_n^n \cos(n\alpha) = 0$.

Correction ▼ [002956]

Exercice 2957 $\sum 2^{-k}/\cos\theta \dots \cos(2^k\theta)$

Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\dots\cos 2^{k-1}\theta}.$$

Correction ▼ [002957]

Exercice 2958 Calcul de $\tan(nx)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(nx)$ en fonction de $\tan x$.

Correction ▼ [002958]

Exercice 2959 $z = (1+ia)/(1-ia)$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$?

Correction ▼ [002959]

5 Opérations

Exercice 2960 $x+y-xy$

1. Sur $E=[0,1]$, on définit l'opération : $x*y = x+y-xy$. Vérifier que $*$ est interne, et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables, éléments réguliers).

2. Mêmes questions avec $E =]-\infty, 1[$.

Correction ▼ [002960]

Exercice 2961 $x \mapsto axa$ surjective

Soit $*$ une opération associative sur E, et $a \in E$ tel que l'application$E \to E, x \mapsto a*x*a$ soit surjective. Montrer qu'il existe un élément neutre, et que a est symétrisable.

Correction ▼ [002961]

Exercice 2962 Opération induite sur les parties

Soit $*$ une opération sur E. Pour $A, B \subset E$, on pose $A*B = \{a*b \text{ tq } a \in A,\ b \in B\}$.

1. Étudier les propriétés de $*$ sur $\mathscr{P}(E)$ en fonction de celles de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).
2. Est-ce que $*$ est distributive par rapport à $\cup$?

Correction ▼ [002962]

Exercice 2963 Loi sur $\mathbb{Z}^2$

On définit l'opération dans $\mathbb{Z}^2$: $(a,b)*(a',b') = (aa', ab'+b)$.

1. Étudier les propriétés de cette opération.
2. Pour $z \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}(z) = az+b$.
   Montrer que $\phi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, (a,b) \mapsto f_{a,b}$ est un morphisme pour $*$ et $\circ$.
3. Est-ce un isomorphisme ?

Correction ▼ [002963]

Exercice 2964 Composition de relations

Soit E un ensemble, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des relations binaires sur E. Pour $R, S \in \mathscr{F}$, on définit la relation $R*S$ par :

$$x(R*S)y \iff \exists\, z \in E \text{ tq } xRz \text{ et } zSy.$$

A toute fonction $f : E \to E$, on associe la relation : $yR_f x \iff y = f(x)$.

1. Montrer que $*$ est associative, mais non commutative en général.
2. Simplifier $R_f * R_g$.
3. Est-ce que $*$ admet un élément neutre ?

[002964]

6 Groupes

Exercice 2965 Groupe produit

Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall\, g, g' \in G,\ \forall\, h, h' \in H, \qquad (g,h)\cdot(g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $\cdot$ définit une loi de groupe sur $G \times H$. [002965]

Exercice 2966 Essai de tables

Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Correction ▼ [002966]

Exercice 2967 Translations surjectives

Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a,b \in G,\ \exists\, x,y \in G \text{ tq } a = x\cdot b = b\cdot y.$$

Montrer que $(G,\cdot)$ est un groupe. [002967]

Exercice 2968 Transport de structure

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble, et $\phi : G \to E$ une bijection.
On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\, x,y \in E,\ x\star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes. [002968]

Exercice 2969 Transport de structure

Pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, on pose $x\star y = x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$.

1. Vérifier que $\sqrt{1+(x\star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy$.
2. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe.
3. Montrer que l'application sh est un isomorphisme entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R},\star)$.

[002969]

Exercice 2970 Transport de structure

Pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, on pose $x\star y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$. [002970]

Exercice 2971 Loi associative régulière

Soit E un ensemble fini muni d'une opération interne $*$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que E est un groupe. [002971]

Exercice 2972 Partie finie stable par produit

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G. [002972]

Exercice 2973 Centre d'un groupe et commutant

Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G \text{ tq } \forall\, b \in G, \text{ on a } ab = ba\}$ (*centre de G*), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G \text{ tq } ab = ba\}$ (*commutant de a*).
Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G. [002973]

Exercice 2974 Loi Δ

Soit E un ensemble et $G = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.
2. Pour $a \in E$, on note $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\begin{cases} X & \dot{0} \text{ si } a \notin X \\ X & \dot{1} \text{ si } a \in X \end{cases}$.
   Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes.
3. On prend $E = \{1, \dots, n\}$ et on note
   $$\Phi : G \to \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n, \quad X \mapsto (\phi_1(X), \dots, \phi_n(X)).$$
   Montrer que Φ est un isomorphisme de groupes.

[002974]

Exercice 2975 Sous-groupes emboîtés

Soit G un groupe additif, et H, K, L trois sous-groupes de G vérifiant : $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$, $H + L = K + L$. Démontrer que $H = K$. [002975]

Exercice 2976 $\mathrm{Card}\,(HK)$

Soit G un groupe fini et H, K deux sous-groupes de G. On considère l'application $\phi : H \times K \to G, (h,k) \mapsto hk$

1. Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?
2. Soit $z \in HK$, $z = h_0k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$.
   Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0t, t^{-1}k_0)$ avec $t \in H \cap K$.
3. En déduire que : $\mathrm{Card}\,(HK)\mathrm{Card}\,(H \cap K) = \mathrm{Card}\,(H)\mathrm{Card}\,(K)$.
4. Montrer que : (HK est un sous-groupe de G) $\iff$ ($HK \subset KH$) $\iff$ ($HK = KH$).

[002976]

Exercice 2977 Groupe des automorphismes

Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des isomorphismes $\phi : G \to G$.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$ on note $\phi_a : G \to G, x \mapsto axa^{-1}$
   Montrer que $\phi_a \in \mathrm{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes.

[002977]

Exercice 2978 Sous-groupes d'un groupe cyclique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = k \wedge n$.

1. Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.

2. Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.
3. Quels sont tous les sous-groupes de G ?

[002978]

Exercice 2979 Images directes et réciproques

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G on a : $f^{-1}(f(H)) = H + \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' on a : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \operatorname{Im} f$.

[002979]

Exercice 2980 Morphismes entre deux groupes cycliques

Soit G un groupe cyclique engendré par a d'ordre n, G' un deuxième groupe, et $a' \in G'$.
Montrer qu'il existe un morphisme $\phi : G \to G'$ tel que $\phi(a) = a'$ si et seulement si a' est d'ordre fini divisant n.
Application : déterminer tous les morphismes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $\quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [002980]

Exercice 2981 Morphismes de $\mathbb{Q}$ additif

Déterminer tous les morphismes de

1. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$.
2. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.
3. $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}^*,\times)$.

Correction ▼ [002981]

Exercice 2982 Sous groupes finis de $\mathbb{C}^*$

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*,\times)$. [002982]

Exercice 2983 Ordre d'un élément

1. Soient G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.
2. Soient $a,b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.
3. Soient $a,b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

[002983]

Exercice 2984 Ordre de ab

Soient a,b deux éléments d'un groupe multiplicatif G tels que : $\begin{cases} a \text{ est d'ordre } \alpha \\ b \text{ est d'ordre } \beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \\ ab = ba. \end{cases}$

Déterminer l'ordre de ab. [002984]

Exercice 2985 Décomposition d'un élément d'ordre fini

Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$.
Montrer qu'il existe $b,c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.

Indication ▼ [002985]

Exercice 2986 Groupe sans sous-groupe non trivial

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène, fini, et que $\operatorname{Card} G$ est un nombre premier. [002986]

Exercice 2987 Groupe diédral

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On note $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$ et :

$$f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \omega^k z \qquad g_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \omega^k \bar{z} \qquad (0 \leqslant k < n)$$

1. Montrer que $G = \{f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}\}$ est un groupe pour la composition des applications.
2. Soit $a > 0$ et A_k le point du plan d'affixe $a\omega^k$. Montrer que G représente le groupe des isométries du polygone $A_0 \dots A_{n-1}$.
3. G est-il cyclique ?
4. Montrer que G est engendré par les applications f_1 et g_0 et que l'on a : $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$.
5. Soit H un groupe quelconque engendré par deux éléments ρ et σ tels que $\begin{cases} \rho \text{ est d'ordre } n \\ \sigma \text{ est d'ordre } 2 \\ \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}. \end{cases}$

   Montrer que G et H sont isomorphes.

[002987]

Exercice 2988 Groupe d'ordre pair

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

Indication ▼ [002988]

Exercice 2989 Groupe d'ordre impair

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que : $\forall\, x \in G,\ \exists!\ y \in G$ tq $x = y^2$. [002989]

Exercice 2990 Groupe d'exposant 2

Soit G un groupe fini tel que : $\forall\, x \in G,\ x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2. Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que $\operatorname{Card} K = 2 \operatorname{Card} H$.
3. En déduire que $\operatorname{Card} G$ est une puissance de 2.

[002990]

Exercice 2991 Groupes d'ordre 6

Déterminer tous les groupes finis de cardinal 6 (on admettra que dans un tel groupe, il existe un élément a d'ordre 2, et un élément b d'ordre 3). [002991]

Exercice 2992 Groupe d'homographies

Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et $f : E \to E, x \mapsto \frac{1}{x}$, $\qquad g : E \to E, x \mapsto 1 - x$
Vérifier que f et g sont des bijections et déterminer le groupe engendré par f et g pour la loi $\circ$. [002992]

Exercice 2993 Groupes de similitudes

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \alpha z + \beta$

1. Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il commutatif ?
2. A quelle condition sur α, β, $f_{\alpha,\beta}$ est-elle d'ordre fini ?

[002993]

Exercice 2994 Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par :

$$\forall\, x,y \in G,\ x \sim y \iff \exists\, h \in H \text{ tel que } x = hy.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de e ?
2. Soit $a \in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.
3. En déduire que $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G$ (*Théorème de Lagrange*).

[002994]

Exercice 2995 Relation d'équivalence avec deux sous-groupes

Soient H,K deux sous-groupes d'un groupe G. Pour $x,y \in G$, on pose :

$$x \sim y \iff \exists\, h \in H,\ \exists\, k \in K \text{ tq } y = hxk.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Pour $x \in G$, soit $G_x = \{(h,k) \in H \times K \text{ tq } hxk^{-1} = x\}$. Montrer que G_x est un sous-groupe de $H \times K$.
3. Si H et K sont finis, montrer que chaque classe d'équivalence est finie de cardinal divisant $\operatorname{Card}(H)\operatorname{Card}(K)$.

[002995]

Exercice 2996 Groupe d'ordre ab

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$.
On pose $A = \{x \in G \text{ tq } x^a = e\}$ et $B = \{x \in G \text{ tq } x^b = e\}$.

1. Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.
2. Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et $AB = G$.

Correction ▼ [002996]

Exercice 2997 Sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}$

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer que H est monogène.
2. Trouver un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas engendré par une famille finie.

[002997]

Exercice 2998 $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes

Montrer que les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ ne sont pas isomorphes (penser à $\sqrt{2}$). [002998]

Exercice 2999 Sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$

Soit p un entier naturel premier. On appelle G l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^{p^n} = 1$.

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif infini où tout élément est d'ordre fini.
2. Montrer que tout sous-groupe H de G, distinct de G, est cyclique (on pourra considérer un élément z_0 de $G \setminus H$ et montrer que l'ordre des éléments de H n'excède pas celui de z_0).

[002999]

Exercice 3000 Théorème du rang

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini.
Montrer que $\text{Card}\,(\text{Ker} f) \times \text{Card}\,(\text{Im}\, f) = \text{Card}\,(G)$. [003000]

Exercice 3001 Centre d'un p-groupe

Soit G un groupe fini de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. On note Z le centre de G.

1. En considérant l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs montrer que $\text{Card}\,(Z) \equiv 0 \mod p$.
2. En déduire que tout groupe d'ordre p^2, p premier, est commutatif et est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

[003001]

Exercice 3002 Sous groupes et générateurs de $\mathbb{Z}^2$

On considère le groupe $G = \mathbb{Z}^2$. Une *base* de G est une famille $(\alpha = (a,a'), \beta = (b,b'))$ engendrant G.

1. (a) Montrer que (α,β) est une base de G si et seulement si $\det(\alpha,\beta) = \pm 1$.
   (b) Montrer que $\alpha = (a,a')$ appartient à une base de G si et seulement si $a \wedge a' = 1$.
2. Soit H un sous-groupe non trivial de G. On note $H' = \{ux + vy \text{ tq } u \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}, (x,y) \in H\}$, n le plus petit élément de H' strictement positif et $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, $(x,y) \in H$ tels que $ux + vy = n$.
   (a) Montrer que $u \wedge v = 1$ et que x et y sont divisibles par n.
   (b) On pose $\alpha = (x/n, y/n)$ et $\beta = (-v,u)$. Montrer que (α,β) est une base de G et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(n\alpha, np\beta)$ engendre H.

[003002]

Exercice 3003 Partie génératrice d'un groupe fini

Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer qu'il existe une partie génératrice de G de cardinal inférieur ou égal à $\log_2(n)$.

Correction ▼ [003003]

Exercice 3004 Groupe fini ?

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Correction ▼ [003004]

7 Anneaux

Exercice 3005 Anneau de Boole

Soit E un ensemble fini et $A = \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit I un idéal de A. Montrer que : $\begin{cases} \forall\, X \in I,\ \forall\, Y \subset X, \text{ on a } Y \in I \\ \forall\, X, Y \in I, \text{ on a } X \cup Y \in I. \end{cases}$
3. En déduire que $I = \mathscr{P}(E')$ avec $E' \subset E$.
4. Étudier la réciproque.
5. Si E est infini, montrer que $I = \{\text{parties finies de } E\}$ est un idéal qui n'est pas de la forme $\mathscr{P}(E')$.

[003005]

Exercice 3006 Idéaux triviaux

Soit A un anneau commutatif non nul dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps. [003006]

Exercice 3007 Idéaux premiers

Un idéal I d'un anneau A est dit premier si : $\forall\, x,y \in A,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.

1. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?
2. Montrer que si A est commutatif non nul et si tous les idéaux de A sont premiers alors A est un corps.

Correction ▼ [003007]

Exercice 3008 Théorème de Gauss

Soit A un anneau commutatif et $a,b \in A$. On dit que : $\begin{cases} a \text{ divise } b \text{ si } b \in aA \\ a \text{ est premier à } b \text{ si } aA + bA = A. \end{cases}$

Montrer que si a est premier à b et a divise bc, alors a divise c. [003008]

Exercice 3009 Caractéristique

Soit A un anneau. On appelle *caractéristique de A* l'ordre de 1 dans le groupe additif $(A,+)$. On suppose A de caractéristique finie, n.

1. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ nx = 0$.
2. Si A est intègre, montrer que n est un nombre premier.
3. Si A est intègre et commutatif, montrer que $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.

[003009]

Exercice 3010 Anneau de caractéristique 2

Soit A un anneau non nul tel que : $\forall\, x \in A,\ x^2 = x$.

1. Exemple d'un tel anneau ?
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?
3. Montrer que : $\forall\, x \in A,\ x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.
4. Pour $x,y \in A$ on pose : $x \leqslant y \iff \exists\, a \in A$ tel que $x = ay$. Montrer que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ [003010]

Exercice 3011 Eléments nilpotents

Soit A un anneau commutatif, et $a \in A$. On dit que a est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Exemple : Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents est un idéal de A.
3. Soit a nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible (remarquer que $1 = 1^n - a^n$).
4. Soient a nilpotent et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

[003011]

Exercice 3012 $1 - ab$ et $1 - ba$

Soit A un anneau et $a,b \in A$. Montrer que $1 - ab \in A^* \Leftrightarrow 1 - ba \in A^*$.

Correction ▼ [003012]

Exercice 3013 Radical d'un idéal

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
On note $\sqrt{I} = \{x \in A \text{ tq } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tq } x^n \in I\}$ (radical de I).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I+J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Exemple : $A = \mathbb{Z}$, $I = 3648\mathbb{Z}$. Trouver $\sqrt{I}$.

Correction ▼ [003013]

Exercice 3014 Produit de deux idéaux

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.
On note $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \text{ tel que } a_i \in I,\ b_i \in J\}$.

1. Montrer que IJ est un idéal de A.
2. Montrer que $I(J+K) = IJ + IK$.
3. On suppose $I + J = A$. Montrer que $IJ = I \cap J$.
4. Pour $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = p\mathbb{Z}$, qu'est-ce que IJ ?

[003014]

Exercice 3015 Relation d'équivalence compatible avec les opérations d'anneau

Soit A un anneau commutatif.

1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication dans A. On note I la classe de 0. Montrer que I est un idéal de A.
2. Réciproquement, soit J un idéal de A. On pose $x \sim y \iff x - y \in J$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\times$.

[003015]

Exercice 3016 Étude de l'anneau $\mathbb{Z}^2$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose
$$A_d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } x \equiv y \pmod d\}$$
($x = y$ pour $d = 0$). Montrer que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'on obtient ainsi tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$.
3. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On note : $\begin{cases} I_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } (x,0) \in I\} \\ I_2 = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tq } (0,y) \in I\}. \end{cases}$
Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, et que $I = I_1 \times I_2$.
4. En déduire que I est un idéal principal.

[003016]

Exercice 3017 Idéaux de K^E

Soit K un corps, E un ensemble fini, et $A = K^E$. Pour $e \in E$, on pose :

$$I_e = \{f \in A \text{ tq } f(e) = 0\}, \qquad \chi_e \,:\, x \mapsto \begin{cases} 1 & six = e \\ 0 & \text{si } x \neq e. \end{cases}$$

1. Montrer que I_e est un idéal principal de A.
2. Soit $f \in A$. Vérifier que $f = \sum_{e \in E} f(e)\chi_e$.

3. Soit I un idéal quelconque de A, et $F = \{e \in E \text{ tq } \exists\, f \in I \text{ tq } f(e) \neq 0\}$.
   Montrer que I est un idéal principal engendré par $\sum_{e\in F} \chi_e$.

[003017]

Exercice 3018 Fonctions trigonométriques

On pose
$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Soit $f \in A$. Montrer que si $f = 0$, alors les coefficients a_k sont tous nuls $\left(\text{calculer } \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)$.
3. En déduire que A est intègre.

[003018]

Exercice 3019 Suites croissantes d'idéaux

Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

1. Montrer que I est un idéal de A.
2. On suppose que A est principal. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas principal.

[003019]

Exercice 3020 Endomorphismes d'un groupe commutatif

Soit G un groupe additif et $A = \{\text{morphismes } f : G \to G\}$.

1. Montrer que $(A, +, \circ)$ est un anneau.
2. On prend $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Montrer que A est l'ensemble des applications $G \to G, x \mapsto kx$ avec $k \in G$, et que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[003020]

Exercice 3021 Entiers 2-adiques

Soit $A = \{m/n \in \mathbb{Q}$ tel que n est impair$\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Chercher les éléments inversibles dans A.
3. Montrer que les idéaux de A sont tous principaux engendrés par les nombres de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

[003021]

Exercice 3022 Morphismes $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

Chercher les morphismes d'anneaux : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003022]

Exercice 3023 Suites stationnaires

Soit $A = \{\text{suites stationnaires d'entiers relatifs}\}$ muni des opérations usuelles.

1. Montrer que A est un anneau.
2. Chercher les morphismes d'anneaux : $A \to \mathbb{Z}$.
3. Soit $I = \{\text{suites presque nulles}\}$. Montrer que c'est un idéal non principal.

Correction ▼ [003023]

Exercice 3024 Entiers de Gauss

Soit $A = \{a + bi \text{ tq } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Quels sont les éléments inversibles ?
2. Soient $u, v \in A$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
3. Montrer que A est principal.

Correction ▼ [003024]

Exercice 3025 Anneau intègre fini

Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors c'est un corps.
2. Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, alors c'est un corps (considérer les idéaux $I_n = x^n A$ pour $x \in A$ non nul).

[003025]

Exercice 3026 Corps $\mathbb{F}_4$

Chercher les structures de corps à 4 éléments.

Correction ▼ [003026]

Exercice 3027 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini. Pour $x \in K^*$ on note $O(x)$ l'ordre multiplicatif de x et n le ppcm des ordres des éléments de K^*.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a'|a$, $b'|b$, $a' \wedge b' = 1$ et $a'b' = a \vee b$.
2. Soient $x, y \in K^*$ d'ordres a et b. Montrer qu'il existe u, v entiers tels que $O(x^u y^v) = a \vee b$. En déduire qu'il existe $z \in K^*$ d'ordre n.
3. Montrer que $n = \operatorname{Card}(K^*)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003027]

Exercice 3028 Groupe multiplicatif d'un corps fini

Soit K un corps fini de cardinal n. Si $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $ab = n-1$, on considère l'application $f_a : K^* \to K^*, x \mapsto x^a$ (remarquer que f_a est un morphisme de groupe). On note $N_a = \operatorname{Card}(\operatorname{Ker} f_a)$.

1. Expliquer pourquoi $N_a \leqslant a$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f_a) \subset \operatorname{Ker} f_b$. En déduire que $N_a = a$ et $N_b = b$.
3. Soit φ l'indicateur d'Euler. Montrer par récurrence sur a, diviseur de $n-1$, que le nombre d'éléments de K^* d'ordre a est égal à $\varphi(a)$ (ceci prouve que K^* est cyclique).

[003028]

Exercice 3029 Théorème de Wedderburn

On dit que K est un corps gauche si $(K, +, \times)$ est un anneau et si $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe (non nécessairement commutatif). On vérifiera rapidement que la théorie des espaces vectoriels est inchangée si on remplace le corps de base par un corps gauche. L'objet de l'exercice est de démontrer le théorème de Wedderburn : *tout corps gauche fini est commutatif.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des racines n-èmes primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$. On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathscr{P}_n} (X - \zeta)$. Φ_n est appelé *le n-ème polynôme cyclotomique* (son degré est $\phi(n)$ où ϕ est l'indicateur d'Euler).

1. Démontrer : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire, par récurrence, que $\Phi_n(X)$ a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Calculer explicitement $\Phi_n(X)$ pour $n \leqslant 16$.
3. Démontrer que, pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}$.

4. Calculer le terme constant de chaque Φ_n.
5. Montrer que, si $d < n$ et d divise n, alors $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$, puis que $\Phi_n(X)$ divise $X^n - 1$ et $\frac{X^n-1}{X^d-1}$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
   On considère K un corps gauche fini et $Z(K)$ son centre, de cardinal q.
6. Montrer que $Z(K)$ est un corps commutatif.
7. Montrer que K est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie, notée n. Donner alors le cardinal de K en fonction de q et n.
8. Soit $a \in K \setminus \{0\}$. On note $C_a = \{x \in K \,|\, ax = xa\}$.
   Montrer que C_a est un corps gauche, puis que c'est un $Z(K)$-espace vectoriel de dimension finie d divisant n (on montrera pour cela que K est un C_a-espace vectoriel et l'on étudiera sa dimension).
9. On fait opérer le groupe multiplicatif K^* sur lui-même par automorphismes intérieurs.
   En considérant les orbites selon cette opération montrer que l'on a :
$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{q^n - 1}{q^{d_i} - 1} \text{ avec, pour tout } i,\ d_i | n.$$
10. En déduire que $\Phi_n(q)$ divise $q - 1$.
11. En étudiant $|\Phi_n(q)|$ montrer que $n = 1$.

[003029]

---

8 Relations d'équivalence

Exercice 3030 Congruence des carrés modulo 5

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y \iff x^2 \equiv y^2 \bmod 5$.
1. Déterminer l'ensemble quotient.
2. Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

[003030]

Exercice 3031 Produit cartésien

Soient deux relations d'équivalence : $\mathscr{R}$ sur E, et $\mathscr{S}$ sur F. On définit sur $E \times F$:
$$(x,y) \sim (x',y') \iff x\mathscr{R}x' \text{ et } y\mathscr{S}y'.$$
1. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : E \times F \to (E/\mathscr{R}) \times (F/\mathscr{S}), (x,y) \mapsto (\dot{x},\dot{y})$
   Démontrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003031]

Exercice 3032 $X \cup A = Y \cup A$

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathscr{P}(E)$:
$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$
1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E \setminus A), X \mapsto X \setminus A$.
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

[003032]

Exercice 3033 Équivalences sur E^E

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$:

$$f \sim g \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^n,$$
$$f \approx g \iff \exists\, m,n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^m,$$
$$f \equiv g \iff f(E) = g(E).$$

1. Montrer que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f \in F$, on note $f^{\sim}$, $f^{\approx}$, $f^{\equiv}$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$.
   (a) Comparer $f^{\sim}$, $f^{\approx}$.
   (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.
   (c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g \in f^{\approx}$ injective ? surjective ?
   (d) Même question avec $f^{\equiv}$.

[003033]

Exercice 3034 Relation d'équivalence quotient

Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'équivalence sur un ensemble E, telles que :

$$\forall\, x,y \in E,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow x\mathscr{S}y.$$

On définit $\dot{\mathscr{S}}$ sur $E/\mathscr{R}$ par : $\dot{x}\dot{\mathscr{S}}\dot{y} \iff x\mathscr{S}y$.
Vérifier que $\dot{\mathscr{S}}$ est une relation d'équivalence, puis définir une bijection entre $(E/\mathscr{R})/\dot{\mathscr{S}}$ et $E/\mathscr{S}$. [003034]

Exercice 3035 Complétion d'une relation réflexive et transitive

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit les deux relations :

$$x\mathscr{S}y \iff (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x),$$
$$x\mathscr{T}y \iff (x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x).$$

Est-ce que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont des relations d'équivalence ? [003035]

Exercice 3036 Parties saturées pour une relation d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \iff (\dot{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$. En déduire $s(E \setminus s(A))$.
4. Démontrer que $s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.
5. Donner un exemple d'inclusion stricte.

[003036]

9 Relations d'ordre

Exercice 3037 Ordre sur les fonctions

Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$. On ordonne E par : $f \leqslant g \iff \forall\, x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2. L'ordre est-il total ?
3. Comparer les énoncés : *“f est majorée”*, et *“$\{f\}$ est majoré”*.
4. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

[003037]

Exercice 3038 sup ∘ inf et inf ∘ sup

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit les fonctions :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sup\{f(t,y) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \inf\{f(x,t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que g et h sont bornées, puis comparer $\sup h$ et $\inf g$. [003038]

Exercice 3039 Ordre lexicographique

On note $E = [-1,1]^2$, et on définit sur E la relation :
$(x,y) \preceq (x',y') \iff \Big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')\Big)$ (*ordre lexicographique*).

1. Pour $(a,b) \in E$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (a,b).
2. Soit A une partie non vide de E. Montrer que A admet une borne supérieure.

[003039]

Exercice 3040 Distance entre un point et une partie

Pour $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée, et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$d(x,A) = \inf\{|x-a| \text{ tq } a \in A\} \qquad (\textit{distance de } x \textit{ à } A).$$

Montrer que $\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|$. [003040]

Exercice 3041 Parties adjacentes

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leqslant b \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \text{ tq } b - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

(on dit que A et B sont *adjacentes*). Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$. [003041]

Exercice 3042 borne sup ⇒ borne inf

Soit E ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Correction ▼ [003042]

Exercice 3043 Ordre sur $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leqslant y'-y$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a,b).
3. L'ordre est-il total ?
4. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Déterminer $\sup(A)$.

Correction ▼ [003043]

Exercice 3044 Propriétés de sup et inf

Un treillis est un ensemble ordonné E dans lequel pour tous $x,y \in E$, $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ existent. Soit E un treillis.

1. Montrer que sup et inf sont des opérations associatives.
2. A quelle condition ont-elles des éléments neutres ?
3. Montrer que :

$$\begin{array}{ll} \forall\, x,y \in E, & \sup\big(x,\inf(x,y)\big) = \inf\big(x,\sup(x,y)\big) = x, \\ \forall\, x,y,z \in E, & x \leqslant z \Rightarrow \sup\big(x,\inf(y,z)\big) \leqslant \inf\big(\sup(x,y),z\big), \\ \forall\, x,y,z \in E, & \inf\big(x,\sup(y,z)\big) \geqslant \sup\big(\inf(x,y),\inf(x,z)\big). \end{array}$$

[003044]

Exercice 3045 Ordre déduit d'une loi idempotente

Soit $\cdot$ une opération commutative et associative sur E, telle que : $\forall\, x \in E,\ x\cdot x = x$.
On définit la relation $\leqslant$ sur E par : $x \leqslant y \iff x\cdot y = x$

1. Reconnaître $\leqslant$ quand $\cdot$ est $\cap$ sur $\mathscr{P}(X)$ (resp $\cup$).
2. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre.
3. Démontrer que : $\forall\, x,y \in E,\ x\cdot y = \inf(x,y)$.

[003045]

Exercice 3046 Borne supérieure parmi les intervalles

Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.
Soient I,J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I,J)$? $\sup(I,J)$? [003046]

Exercice 3047 Prolongement d'applications

Soit E un ensemble et $\mathscr{E} = \{(A,f) \text{ tq } A \subset E,\ A \neq \varnothing, \text{ et } f \in E^A\}$. On ordonne $\mathscr{E}$ par :

$$(A,f) \preceq (B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

(c'est-à-dire que la fonction g, définie sur B, prolonge la fonction f, définie seulement sur A).

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient (A,f) et (B,g) deux éléments de $\mathscr{E}$. Trouver une CNS pour que la partie $\{(A,f),(B,g)\}$ soit majorée. Quelle est alors sa borne supérieure ?
3. Même question avec minorée.

[003047]

Exercice 3048 Point fixe d'une fonction croissante

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. On note $A = \{x \in [0,1] \text{ tq } f(x) \leqslant x\}$.

1. Démontrer que A n'est pas vide.
2. Démontrer que $f(A) \subset A$.
3. Soit $a = \inf(A)$. Montrer que $f(a)$ minore A.
4. En déduire que $f(a) = a$.

Cela prouve que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même admet un point fixe. Montrer que c'est faux pour l'intervalle $[0,1[$. [003048]

Exercice 3049 Relation d'ordre sur un ensemble quotient

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur E réflexive et transitive. On définit la relation : $x \sim y \iff x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
   Sur $E/\sim$ on pose : $\dot{x} \leqslant \dot{y} \iff x\mathscr{R}y$.
2. Montrer que cette définition est indépendante des représentants x et y choisis.
3. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$.

[003049]

Exercice 3050 Pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

Dans cet exercice, on admet que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.

1. Soient $A = \{\ x \in \mathbb{Z}^{+*}$ tq $x^2 < 2\ \}$ et $B = \{\ x \in \mathbb{Z}^{+*}$ tq $x^2 > 2\ \}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(B)$.
2. Soient $A = \{\ x \in \mathbb{Q}^{+*}$ tq $x^2 < 2\ \}$ et $B = \{\ x \in \mathbb{Q}^{+*}$ tq $x^2 > 2\ \}$. On veut démontrer que A n'admet pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$. Pour cela, on suppose au contraire que $\alpha = \sup(A)$ existe ($\alpha \in \mathbb{Q}$), et on pose $\beta = \frac{2}{\alpha}$.
   (a) Montrer que $\beta = \inf(B)$.
   (b) Montrer que : $\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$, ona $a \leqslant b$. Que pouvez-vous en déduire pour α et β ?
   (c) Obtenir une contradiction en considérant $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

[003050]

---

10 Propriétés de $\mathbb{N}$

Exercice 3051 Dénombrement de $\mathbb{N}^2$

Soit

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},$$
$$(p,q) \mapsto \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p.$$

1. Montrer pour $q > 0$: $f(p+1,q-1) = f(p,q)+1$ et $f(0,p+1) = f(p,0)+1$.
2. Montrer que : $f(0,p+q) \leqslant f(p,q) < f(0,p+q+1)$.
3. Montrer que $g : n \mapsto f(0,n)$ est strictement croissante.
4. Montrer que f est injective (on supposera $f(p,q) = f(p',q')$ et on montrera dans un premier temps que $p+q = p'+q'$).
5. Montrer que f est surjective.

[003051]

Exercice 3052 Parties dénombrables

Soit (n_k) une suite d'entiers naturels. On dit que la suite est :
- presque nulle s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geqslant p,\ n_k = 0$
- stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, k \geqslant p,\ n_k = n_p$.
Montrer que les ensembles des suites presque nulles et des suites stationnaires sont dénombrables. [003052]

Exercice 3053 Propriétés du pgcd et du ppcm

Soient $a,b \in \mathbb{N}$. On pose $m = \mathrm{ppcm}(a,b)$ et $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$.

1. Soit x un multiple commun à a et b. En écrivant la division euclidienne de x par m, montrer que $m \mid x$.
2. Soit x un diviseur commun à a et b. Montrer que $\text{ppcm}(x,d)$ est aussi un diviseur commun à a et b. En déduire $x \mid d$.
3. Comment qualifier m et d pour la relation d'ordre de divisibilité ?

[003053]

Exercice 3054 Bases de numération

Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \{0,\dots,b^p - 1\}$, il existe un unique p-uplet $(n_0,\dots,n_{p-1})$ d'entiers naturels tel que :

$$\forall\, k < p,\ n_k \in \{0,\dots,b-1\}, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k.$$

[003054]

Exercice 3055 Bases de numération

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $n_0, n_1, \dots, n_p \in \{1,2\}$ uniques tels que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$. [003055]

Exercice 3056 Bases de numération

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p!$. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(n_1,\dots,n_p)$ d'entiers naturels tel que

$$\forall\, k \leqslant p,\ n_k \leqslant k, \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=1}^{p} n_k k!.$$

[003056]

Exercice 3057 Récurrence d'ordre 2

On note $a_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

1. Trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a.a_{n+1} + b.a_n$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n$ est divisible par 17.

Correction ▼ [003057]

Exercice 3058 Ordre sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour $f, g \in E$ avec $f \neq g$, on note $n_{f,g} = \min\{k \text{ tq } f(k) \neq g(k)\}$.
On ordonne E par :

$$\forall\, f, g \in E,\ f \ll g \iff (f = g) \text{ ou } \big(f(n_{f,g}) < g(n_{f,g})\big).$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre total.
2. Montrer que toute partie de E non vide admet une borne inférieure et toute partie de E non vide et majorée admet une borne supérieure.

[003058]

Exercice 3059 $f \circ f(n) = n + k$

On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 1987$.
(*Olympiades 1987*)
Soit f une telle application. On pose :

$$E = \{0,\dots,1986\}, \qquad F = \mathbb{N} \setminus E, \qquad G = f(\mathbb{N}) \cap E, \qquad H = E \setminus G.$$

Démontrer successivement :

1. f est injective,
2. $f(F) \subset F$,
3. $f^{-1}(F) = F \cup G$,
4. $f^{-1}(G) = H$,

puis obtenir une contradiction. [003059]

Exercice 3060 $f(f(n)) < f(n+1)$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) < f(n+1)$. On veut montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
(Olympiades 1977)

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geqslant n,\ f(x) \geqslant n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \geqslant n$ tel que $f(a) = \min\{f(x) \text{ tq } x \geqslant n\}$. Montrer que $a = n$.
3. En déduire que f est strictement croissante, puis conclure.

Correction ▼ [003060]

11 Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 3061 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
2. Montrer que f est une application croissante.
3. En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

[003061]

Exercice 3062 Parties denses

Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a,b \in A \text{ tq } a < x < b \\ \forall\, a,b \in A,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$. [003062]

Exercice 3063 Parties denses

Soir A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A \cap]0,1[\neq \varnothing$. [003063]

Exercice 3064 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$. On pose $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha = \inf(H^{+*})$.

1. Si $\alpha \in H^{+*}$, montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
2. Si $\alpha \notin H^{+*}$, montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

[003064]

Exercice 3065 Partie entière

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = a$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = [a]$.

Correction ▼ [003065]

Exercice 3066 Nombres irrationnels

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a : $\left|r - \sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}$.

Correction ▼ [003066]

Exercice 3067 Nombres irrationnels

Soient $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si et seulement si $a^2 - b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003067]

12 Suites récurrentes linéaires

Exercice 3068 Ensi Chimie P' 93

1. Résoudre $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \\ u_0 = a,\ u_1 = b. \end{cases}$
2. Si $a = 0$, trouver $\lim u_n$.
3. Résoudre : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1} v_n}$.

Correction ▼ [003068]

Exercice 3069 Équations de récurrence linéaire

1. Résoudre :
$$\begin{cases} u_{n+2} - u_n = n - 1 \\ u_0 = u_1 = 0. \end{cases}$$
2. Résoudre : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$.

Correction ▼ [003069]

Exercice 3070 Système récurrent

On donne u_0, v_0. Résoudre le système : $\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$

Correction ▼ [003070]

Exercice 3071 Caractérisation des suites polynomiales

Soit (u_n) une suite de réels. On définit les suites dérivées de (u_n) :

$$\begin{cases} (u'_n) = (u_{n+1} - u_n) \\ (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n) \\ \dots \\ \left(u_n^{(k+1)}\right) = \left(u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

1. Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(u_n^{(k)}\right) = (0)$.

Correction ▼ [003071]

Exercice 3072 Nombre de nombres ne comportant pas 13

Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

1. Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
2. Calculer T_n en fonction de n.

Correction ▼ [003072]

Exercice 3073 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

On note $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, et $z_n = [x_n]$.

1. Montrer que $z_n = x_n - y_n$.
2. En déduire que 2^{n+1} divise z_n.

[003073]

13 Permutations

Exercice 3074 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par les sous-ensembles suivants :

1. $A = \{(i, i+1) \text{ tq } 1 \leqslant i < n\}$.
2. $B = \{(1\ i) \text{ tq } 2 \leqslant i \leqslant n\}$.
3. $C = \{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$.

[003074]

Exercice 3075 Générateurs de $\mathscr{S}_n$

Montrer que toute permutation de $\mathscr{S}_n$ s'écrit de manière unique : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \cdots \circ c_n^{\alpha_n}$ où $c_i = (1\ 2\ \cdots\ i)$ et $0 \leqslant \alpha_i < i$. [003075]

Exercice 3076 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

1. Calculer $(a\,b\,c) \circ (b\,c\,d)$.
2. Montrer que le sous-groupe alterné $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ($n \geqslant 3$).

Correction ▼ [003076]

Exercice 3077 $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$.

1. Soit $i, j \in \{3, \dots, n\}$,$i \neq j$.
   Décomposer en cycles à supports disjoints la permutation : $\sigma = (1\ i\ 2) \circ (1\ 2\ j) \circ (1\ i\ 2)$.
2. On note $\mathscr{H}$ le sous-groupe de $\mathscr{A}_n$ engendré par les 3-cycles $(1\ 2\ k)$, $\quad 3 \leqslant k \leqslant n$.
   (a) Montrer que : $\forall\, i, j \geqslant 3$, avec $i \neq j$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2) \circ (i\ j)$ et $(i\ j) \circ (1\ 2)$.
   (b) Montrer que : $\forall\, j \geqslant 3$, $\mathscr{H}$ contient $(1\ 2) \circ (1\ j)$ et $(1\ 2) \circ (2\ j)$.
   (c) Montrer que : $\forall\, i \neq j, \forall\, k \neq l, \quad (i\ j) \circ (k\ l) \in \mathscr{H}$.
   (d) Montrer que $\mathscr{H} = \mathscr{A}_n$.

Correction ▼ [003077]

Exercice 3078 Signature en fonction du nombre d'orbites

Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. On note c le nombre de cycles à supports disjoints constituant σ, et f le nombre de points fixes. Calculer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, c, et f.

Correction ▼ [003078]

Exercice 3079 Nombre de transposition pour engendrer un cycle

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *orbite de* σ toute partie X de $\{1,\dots,n\}$ sur laquelle σ induit une permutation circulaire. (Les orbites sont les supports des cycles de σ, et les singletons constitués de points fixes)
On note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

1. Montrer que si τ est une transposition, alors $N(\tau\circ\sigma) = N(\sigma)\pm 1$.
2. Application : Quel est le nombre minimal de transpositions nécéssaires pour obtenir un n-cycle ?

[003079]

Exercice 3080 Conjugaison

Soient $\sigma,\sigma' \in \mathscr{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathscr{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$.

1. Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.
2. Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

[003080]

Exercice 3081 Caractérisation de la signature

Soit E un ensemble fini et $f : \mathscr{S}_E \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1. Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?
2. Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.
3. En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

[003081]

Exercice 3082 Calcul de signature

Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$
Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Correction ▼ [003082]

Exercice 3083 Centre de $\mathscr{S}_E$

Soit E un ensemble ayant au moins trois éléments.

1. Pour $a,b \in E$ distincts et $\sigma \in \mathscr{S}_E$, simplifier $\sigma\circ(a\ b)\circ\sigma^{-1}$.
2. Quelles sont les permutations σ qui commutent avec $(a\ b)$?
3. En déduire que le centre de $\mathscr{S}_E$ est réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

[003083]

Exercice 3084 Commutant d'un n-cycle

Soit $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n) \in \mathscr{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathscr{S}_n$ commutant avec σ. (Reconnaître $\rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$)

Correction ▼ [003084]

Exercice 3085 Commutant d'un produit de 5-cycles

Dans $\mathscr{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

Correction ▼ [003085]

Exercice 3086 Puissances d'un k-cycle

Soit σ un k-cycle de $\mathscr{S}_n$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur $\frac{k}{p}$.
2. Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).
3. Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

[003086]

Exercice 3087 Ordre maximal

Trouver l'ordre maximal d'une permutation de $\mathscr{S}_{10}$.

Correction ▼ [003087]

Exercice 3088 Sous-groupe d'indice 2 dans $\mathscr{S}_n$

Soit H un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ d'ordre $\frac{n!}{2}$. On note $K = \mathscr{S}_n \setminus H$.

1. Pour $\sigma \in H$, montrer que $\sigma H = H$ et $\sigma K = K$.
2. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer les ensembles σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ suivant que $\sigma \in H$ ou $\sigma \in K$.
3. En déduire que si deux permutations sont conjuguées, alors elles sont toutes deux dans H ou toutes deux dans K.
4. Montrer enfin que $H = \mathscr{A}_n$.

[003088]

Exercice 3089 Dénombrement

Combien y a-t-il de permutations de $\mathscr{S}_{26}$ comportant trois points fixes, deux 3-cycles, un 5-cycle, et deux 6-cycles ?

Correction ▼ [003089]

Deuxième partie

Arithmétique

14 Congruences

Exercice 3090 Sommes de nombres impairs

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

[003090]

Exercice 3091 Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise C_p^k.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n (\operatorname{mod} p)$. [003091]

Exercice 3092 $(p-1)(p-2)...(p-n)/n!$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Montrer que $\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p.
[003092]

Exercice 3093 $n^7 \equiv n (\bmod 42)$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n (\bmod 42)$. [003093]

Exercice 3094 Puissances de 10 modulo 7

1. Vérifier $10^6 \equiv 1 (\bmod 7)$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 (\bmod 7)$.

[003094]

Exercice 3095 Puissances de 7

Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Correction ▼ [003095]

Exercice 3096 $3^x = 2^y + 1$

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 1 (\bmod 2^y) \iff 2^{y-2} \mid x$.
2. Trouver tous les couples d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.

Correction ▼ [003096]

Exercice 3097 Suites récurrentes linéaires

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. [003097]

Exercice 3098 Suites récurrentes linéaires

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.

Correction ▼ [003098]

Exercice 3099 $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b (\bmod n) \Rightarrow a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$. [003099]

Exercice 3100 $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 (\bmod 8)$

Montrer que : $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \bmod 8$. [003100]

Exercice 3101 Cubes consécutifs

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9. [003101]

Exercice 3102 $n^2 + 3n + 5$ mod 121

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3n + 5$ n'est pas divisible par 121.

Correction ▼ [003102]

Exercice 3103 $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. [003103]

Exercice 3104 $2^{32}+1$ est divisible par 641

Montrer sans calculatrice que $2^{32}+1$ est divisible par 641. [003104]

Exercice 3105 $3^x.7^y$ mod 10

Trouver tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que 3^x7^y se termine par 1 en base 10.

Correction ▼ [003105]

Exercice 3106 $a^3 = \ldots 123456789$

Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10.

1. Montrer que $a^4 \equiv 1 (\bmod 10)$.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4\times 10^k} \equiv 1 (\bmod 10^{k+1})$.
3. En déduire qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.

Correction ▼ [003106]

Exercice 3107 $mn(m^{60}-n^{60})$ est divisible par 56786730

Montrer que pour tous entiers m et n, le nombre $mn(m^{60}-n^{60})$ est divisible par 56786730.

Correction ▼ [003107]

Exercice 3108 $q \mid 2^p-1$

Soient p,q premiers impairs tels que $q \mid 2^p-1$. Montrer que $q \equiv 1 (\bmod 2p)$.

Correction ▼ [003108]

Exercice 3109 Divisibilité par 7

Infirmer ou justifier le critère de divisibilité par 7 suivant retrouvé dans un vieux grimoire : *Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.* [003109]

15 Pgcd

Exercice 3110

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. [003110]

Exercice 3111 pgcd$(a+b, ppcm(a,b))$

Soient a,b entiers, $d = a \wedge b$, $m = a \vee b$. Chercher $(a+b) \wedge m$.

Correction ▼ [003111]

Exercice 3112 pgcd$((a-b)^3, a^3-b^3)$

Soient $a,b \in \mathbb{Z}$. Chercher $(a-b)^3 \wedge (a^3-b^3)$.

Correction ▼ [003112]

Exercice 3113 pgcd$(n^3+n, 2n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(n^3+n) \wedge (2n+1)$.

Correction ▼ [003113]

Exercice 3114 pgcd$(15n^2+8n+6, 30n^2+21n+13)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(15n^2+8n+6) \wedge (30n^2+21n+13)$.

Correction ▼ [003114]

Exercice 3115 pgcd et ppcm imposés

Soient $d,m \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $a,b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$.

Résoudre ce problème pour $d = 50$ et $m = 600$.

Correction ▼ [003115]

Exercice 3116 ppcm$(x,y)+11$pgcd$(x,y) = 203$

Trouver les couples d'entiers $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$.

Correction ▼ [003116]

Exercice 3117 $x^2+y^2 = 85113$, ppcm$(x,y) = 1764$

Résoudre :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 85113 \\ x \vee y = 1764. \end{cases}$$

Correction ▼ [003117]

Exercice 3118 ppcm$(x,y) = 210$ pgcd(x,y), $y-x =$ pgcd(x,y)

Résoudre : $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y. \end{cases}$

Correction ▼ [003118]

Exercice 3119 pgcd$(x,y) = x+y-1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x \wedge y = x+y-1$.

Correction ▼ [003119]

Exercice 3120 ppcm$(x,y) = x+y-1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$: $x \vee y = x+y-1$.

Correction ▼ [003120]

Exercice 3121 pgcd$(x,y) = x-y$, ppcm$(x,y) = 300$

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x \wedge y = x-y \\ x \vee y = 300. \end{cases}$

Correction ▼ [003121]

Exercice 3122 pgcd(a^n-1, a^m-1)

Soient $a,m,n \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$, et $d = (a^n-1) \wedge (a^m-1)$.

1. Soit $n = qm+r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r (\bmod a^m-1)$.
2. En déduire que $d = (a^r-1) \wedge (a^m-1)$, puis $d = a^{(n \wedge m)}-1$.
3. A quelle condition a^m-1 divise-t-il a^n-1 ?

Correction ▼ [003122]

Exercice 3123 pgcd multiple

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j\neq i} a_j$. Montrer que $a_1,\dots,a_n$ sont *deux à deux* premiers entre eux si et seulement si $b_1,\dots,b_n$ sont premiers entre eux *dans leur ensemble*. [003123]

16 Relation de Bézout

Exercice 3124 Équations à coefficients entiers

Soient a,b,c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax+by=c$, dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
2. Soit (x_0,y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0+by_0=d$. Déterminer toutes les solutions de $ax+by=c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2520x-3960y=6480$.

Correction ▼ [003124]

Exercice 3125 Équations à coefficients entiers

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $95x+71y=46$.
2. $20x-53y=3$.
3. $12x+15y+20z=7$.

Correction ▼ [003125]

Exercice 3126 Congruences simultanées

1. Soient $a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$ avec $b\wedge b'=1$. Montrer que le système : $\begin{cases} x\equiv a (\operatorname{mod} b) \\ x\equiv a' (\operatorname{mod} b') \end{cases}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb'.
2. Généraliser.

[003126]

Exercice 3127 Congruences simultanées

Résoudre :

1. $\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{140} \\ x\equiv -3 (\operatorname{mod} 99). \end{cases}$
2. $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{4} \\ x\equiv -2 (\operatorname{mod} 3) \\ x\equiv 7 \pmod{5}. \end{cases}$

Correction ▼ [003127]

Exercice 3128 Congruences simultanées

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.

Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Correction ▼ [003128]

Exercice 3129 Décomposition à coefficients positifs

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que : $\forall\, x \geqslant ab$, $\exists\, u,v \in \mathbb{N}$ tels que $au+bv = x$. [003129]

17 Factorisation en nombres premiers

Exercice 3130 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. Quand a-t-on $\operatorname{pgcd}(a,b,c) \times \operatorname{ppcm}(a,b,c) = abc$?

Correction ▼ [003130]

Exercice 3131 pgcd $\times$ ppcm

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j\neq i} a_j$.
Montrer que :
$\operatorname{pgcd}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{ppcm}(b_1,\dots,b_n) = \operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{pgcd}(b_1,\dots,b_n) = \prod a_i$.

Correction ▼ [003131]

Exercice 3132 *ab* est un carré parfait

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont des carrés parfaits.
[003132]

Exercice 3133 $a^n = b^m$

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ et m,n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.
[003133]

Exercice 3134 Valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{(2^n)} - 1$ est 2^{n+2}.

Correction ▼ [003134]

Exercice 3135 $a^r - 1$ premier ?

On suppose que $a^r - 1$ est un nombre premier. Montrez que r est premier, puis que a vaut 2. Réciproque ?

Correction ▼ [003135]

Exercice 3136 Nombres de Mersenne

On note $M_n = 2^n - 1$ (n-ième nombre de Mersenne).

1. Montrer que : M_n est premier $\Rightarrow n$ est premier.
2. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

Correction ▼ [003136]

Exercice 3137 $a^n + 1$ est premier

Soient $a,n \in \mathbb{N}$ tels que $a \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, et $a^n + 1$ est premier. Montrer que n est une puissance de 2. [003137]

Exercice 3138 Nombre de diviseurs d'un nombre entier

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

1. Montrer que si $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$, alors $d_n = d_a d_b$.
2. Montrer que n est un carré parfait si et seulement si d_n est impair.
3. Montrer que : $\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d_n}$.

[003138]

Exercice 3139 Nombres premiers congrus à 3 modulo 4

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv -1 (\bmod 4)$. [003139]

Exercice 3140 Nombres premiers congrus à 1 modulo 4

On rappelle que si p est premier et $n \wedge p = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 3$ un diviseur premier de n^2+1. Montrer que $p \equiv 1 (\bmod 4)$.
2. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.

Correction ▼ [003140]

Exercice 3141 Intervalle sans nombres premiers

Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers. [003141]

Exercice 3142 Factorisation de 1000!

Quelle est la plus grande puissance de 6 divisant 1000 ! ?

Correction ▼ [003142]

Exercice 3143 $1/2+1/3+\cdots+1/n$ n'est pas entier

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ est de la forme : $\frac{p_n}{2q_n}$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ et p_n impair.

Correction ▼ [003143]

18 Propriétés de $\mathbb{Q}$

Exercice 3144 Parties fractionnaires

Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec p,q entiers, $q \geqslant 1$, $p \wedge q = 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{frac}(kx)$.

Correction ▼ [003144]

Exercice 3145 Dénominateurs dans un sous-anneau

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. On écrit les éléments de A sous forme irréductible ; soit P l'ensemble des dénominateurs. Montrer que $A = \left\{\frac{m}{p} \text{ tels que } m \in \mathbb{Z},\ p \in P\right\}$.

Correction ▼ [003145]

Exercice 3146 Les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ sont principaux

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal (si I est un idéal de A, considérer $I \cap \mathbb{Z}$). [003146]

Exercice 3147 Décomposition en inverses

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :

- $x_0 = x$,
- Si x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\frac{1}{k_n} \leqslant x_n$. On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,
- Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1. Montrer que la suite est toujours finie.
2. Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3. Réciproquement, soit une décomposition : $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.

Correction ▼ [003147]

Exercice 3148 Combinaison de fractions

Soient $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux rationnels avec $a, c \in \mathbb{Z}$, et $b, d \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que tout rationnel s'écrit : $x = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, et $mb + nd \neq 0$.
2. Étudier l'unicité d'une telle écriture.
3. Montrer que $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ est compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si m et n ont même signe.

Correction ▼ [003148]

Exercice 3149 Équations algébriques

Déterminer $x \in \mathbb{Q}$ sachant que :

1. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.
2. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.
3. $2x^3 - x - 4 = 0$.

Correction ▼ [003149]

Exercice 3150 $x^y = y^x$

On cherche les couples $(x, y) \in \left(\mathbb{Q}^{+*}\right)^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$ ($x^y, y^x \in \mathbb{R}$).
On pose $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$ (formes irréductibles), $d = pq' \wedge p'q$, $\quad pq' = ad$ et $p'q = bd$.

1. Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ et $q' = n^b$.
2. En déduire : $b - a = m^{b-a} - n^{b-a}$.
3. Montrer que $b - a \leqslant 1$ et conclure.

Correction ▼ [003150]

---

19 Propriétés de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 3151 Équations linéaires

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{7}y = \dot{3} \\ \dot{6}x - \dot{7}y = \dot{0}. \end{cases}$$
2. $x^2 - \dot{\overline{31}}x + \dot{\overline{18}} = \dot{0}$.

Indication ▼ Correction ▼ [003151]

Exercice 3152 Équation algébrique

1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soient $x,y,z \in \mathbb{Z}$ tels que $5x^3+11y^3+13z^3=0$. Montrer que 13 divise x,y,z.
3. L'équation : $5x^3+11y^3+13z^3=0$ a-t-elle des solutions entières ?

Correction ▼ [003152]

Exercice 3153 Ordre d'un entier modulo n

1. Soient $n,p \geqslant 2$. Montrer que : $n \wedge p = 1 \iff \exists\, k>0$ tel que $n^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.
2. Soit n un entier impair non divisible par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n qui s'écrit 1...1 en base 10.

[003153]

Exercice 3154 Théorème chinois

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge p = 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ on note $\overline{x}^n$, $\overline{x}^p$ et $\overline{x}^{np}$ les classes d'équivalence de x modulo n, p et np.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z}/(np\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \overline{x}^{np} \mapsto (\overline{x}^n, \overline{x}^p)$ est un morphisme d'anneaux.
2. En déduire que $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$ (φ = fonction d'Euler).
3. Vérifier que l'hypothèse $n \wedge p = 1$ est nécéssaire.

[003154]

Exercice 3155 Théorème de Wilson

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que n est premier si et seulement si $(n-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, n)$.

Correction ▼ [003155]

Exercice 3156 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$

1. Montrer que pour tout entier a impair et tout $n \geqslant 3$: $a^{2^{n-2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2^n)$.
2. Le groupe $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^*$ est-il cyclique ?

[003156]

Exercice 3157 Équation algébrique

1. Démontrer que f est une permutation de E.
2. Chercher l'ordre de f pour $\circ$.
3. En déduire que le nombre de points fixes de f est congru à $\mathrm{Card}\, E$ modulo 3.
4. Démontrer que ce nombre est inférieur ou égal à 2.
5. Combien l'équation $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$ a-t-elle de racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en fonction de p ?
6. Pour $p = 37$, résoudre l'équation.

Correction ▼ [003157]

Exercice 3158 Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\dot{k}$ est un carré dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $k^{(p+1)/2} \equiv k (\mathrm{mod}\, p)$. [003158]

Exercice 3159 Test de primalité de Rabin-Miller

Soit n un entier premier impair supérieur ou égal à 3 : $n = q2^p + 1$ avec p impair et soit $a \in \mathbb{Z}$ premier à n. On considère la suite $(b_0, b_1, \dots, b_p)$ d'entiers compris entre 0 et $n-1$ définie par :

$$b_0 \equiv a^q (\bmod n), \quad b_1 \equiv b_0^2 (\bmod n), \quad \dots, \quad b_p \equiv b_{p-1}^2 (\bmod n).$$

1. Montrer que $b_p = 1$.
2. Si $b_0 \neq 1$ montrer qu'il existe un indice i tel que $b_i = n-1$.

[003159]

Exercice 3160 Coefficients du binôme

Soit p un nombre premier. Montrer que $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 2^p + 1 (\bmod p^2)$.

Correction ▼ [003160]

Exercice 3161 Suite récurrente (Mines MP 2003)

On considère la suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ telle que pour tout n on ait $x_{n+3} = 4(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)$. Déterminer les différents comportements possibles de (x_n).

Correction ▼ [003161]

Exercice 3162 -3 est-il un carré ?

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer qu'une équation du second degré : $x^2 + ax + b = \dot{0}$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si son discriminant : $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $p \equiv 1 (\bmod 3)$: $p = 3q + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tel que $a^q \neq \dot{1}$.
   (b) En déduire que $-\dot{3}$ est un carré.
3. Réciproquement, on suppose que $-\dot{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $p \equiv 1 (\bmod 3)$.

Correction ▼ [003162]

Exercice 3163 Indicateur d'Euler

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\varphi(n)$ est pair et que $\sum_{x \wedge n = 1, 1 \leqslant x \leqslant n} x = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

Correction ▼ [003163]

Troisième partie

Polynômes

20 Polynômes

Exercice 3164 Familles libres de polynômes

Soit $a, b \in K$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. [003164]

Exercice 3165 Formule de Van der Monde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0, n]]$ on pose $P_k = X^k (1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathscr{B}$ de $\frac{d^n}{dx^n}\left(X^n (1-X)^n\right)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$. [003165]

Exercice 3166 Famille libre de polynômes

Soient $U, V \in K[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ...

1. lorsque $U \wedge V = 1$.
2. lorsque (U,V) est libre.

[003166]

Exercice 3167 Ensi PC 1999

Déterminer les polyômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}(X)$ tels que $P(X)+1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X)-1$ est multiple de $(X+1)^n$.

Correction ▼ [003167]

Exercice 3168 Opérateur différence

On note $U_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad p \in \mathbb{N}$, et $\Delta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$

1. Démontrer que la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3. En déduire que : $\forall\, P \in K_n[X]$, ona $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que :
   $\big(\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $P(n) \in \mathbb{Z}\big) \Leftrightarrow \big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières$\big)$.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f) = 0$.

[003168]

Exercice 3169 Liberté de $P(X), \dots, P(X+n)$

Soit $P \in K[X]$ de degré n. Démontrer que la famille $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n)\big)$ est une base de $K_n[X]$. (Utiliser l'opérateur Δ de l'exercice 3168)

Correction ▼ [003169]

Exercice 3170 $(X+z_0)^n, \dots, (X+z_k)^n$ (Centrale MP 2003)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \dots, z_k$ des complexes. Soient les polynômes $P_0 = (X+z_0)^n, \dots, P_k = (X+z_k)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \dots, P_k)$ soit une base de $C_n[X]$.

Correction ▼ [003170]

Exercice 3171 $P - X \mid P \circ P - X$

1. Soit $P \in K[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2+3z+1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Correction ▼ [003171]

Exercice 3172 $P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

Soit $\Phi : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

1. Chercher $\deg(\Phi(P))$ en fonction de $\deg P$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
3. Montrer que : $\forall\, Q \in K[X],\ \exists!\, P \in K[X]$ tq $\begin{cases} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}$

[003172]

Exercice 3173 $P \mapsto (X-a)(P'(X) + P'(a)) + P(X) - P(a)$

Soit $a \in K$ et $\Phi : K_n[X] \to K_n[X], P \mapsto (X-a)(P'(X) + P'(a)) + P(X) - P(a)$.

Chercher $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Correction ▼ [003173]

Exercice 3174 $A^3 + B = C^3 + D$

Soient $A,B,C,D \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} \deg A = \deg C = m \\ \deg B < 2m,\ \deg D < 2m \\ A^3 + B = C^3 + D. \end{cases}$

Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Trouver un contre-exemple avec des polynômes à coefficients complexes. [003174]

Exercice 3175 $P(n) \mid P(n+P(n))$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$, et $p = P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.

Correction ▼ [003175]

Exercice 3176 $P(a/b) = 0 \Rightarrow a - kb$ divise $P(k)$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a,b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

1. Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a - kb$ divise $P(k)$.

Correction ▼ [003176]

Exercice 3177 Automorphismes des polynômes

Pour $A \in K[X]$ on note $\Phi_A : K[X] \to K[X], P \mapsto P \circ A$

1. Démontrer que les applications Φ_A sont les seuls endomorphismes d'algèbre de $K[X]$.
2. A quelle condition Φ_A est-il un isomorphisme ?

[003177]

Exercice 3178 Sous anneau non principal des polynômes

Soit $A = \{P \in K[X]$ dont le coefficient de X est nul$\}$. Démontrer que A est un sous anneau non principal de $K[X]$.
[003178]

Exercice 3179 Équation $P^2 + Q^2 = (X^2+1)^2$

Trouver $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P^2 + Q^2 = (X^2+1)^2$.

Correction ▼ [003179]

Exercice 3180 Équation $X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0$

Trouver tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que : $X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0$.

Correction ▼ [003180]

Exercice 3181 $P(X) + P(X+1) = 2X^n$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.
2. Chercher une relation de récurrence entre P_n' et P_{n-1}.
3. Décomposer $P_n(X+1)$ sur la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Correction ▼ [003181]

Exercice 3182 $(1-X)^nP+X^nQ=1$

1. Démontrer qu'il existe $P,Q \in K_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^nP+X^nQ=1$.
2. Montrer que $Q=P(1-X)$.
3. Montrer que : $\exists\, \lambda \in K$ tel que $(1-X)P'-nP=\lambda X^{n-1}$.
4. En déduire P.

Correction ▼ [003182]

Exercice 3183 Endomorphismes qui commutent avec la dérivation

Soit $\Phi \in \mathscr{L}K[X]$ commutant avec la dérivation, c'est à dire : $\forall\, P \in K[X]$, on a $\Phi(P')=\Phi(P)'$.

1. Démontrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que :
$$\forall\, P \in K_n[X], \text{ on a } \Phi(P)=\sum_{k=0}^{n} a_kP^{(k)}.$$
(On écrit *formellement* : $\Phi=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\mathrm{D}^k$ avec $\mathrm{D}(P)=P'$)
2. Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \mapsto P(X+1)$.

[003183]

Exercice 3184 P est positif $\Rightarrow P+P'+P"+\dots$ aussi

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geqslant 0$. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $(P+P'+P''+\dots)(x) \geqslant 0$.

Correction ▼ [003184]

Exercice 3185 $P(\tan\alpha)=Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ P(\tan\alpha)=Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$?

Correction ▼ [003185]

Exercice 3186 $X^n+1/X^n=P_n(X+1/X)$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ z^n+z^{-n}=P_n(z+z^{-1}).$$
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.
3. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\tilde{P}$ le polynôme tel que :
$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ P(z)+P(z^{-1})=\tilde{P}(z+z^{-1}).$$
Étudier l'application $P \mapsto \tilde{P}$.

Correction ▼ [003186]

Exercice 3187 Polytechnique MP* 2000

1. Donner un isomorphisme f entre $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que $\sigma : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}, (a_0,\dots,a_n) \mapsto (a_n,a_0,\dots,a_{n-1})$ est linéaire.
3. Si $(P,Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, on définit le produit $\overline{PQ}$ comme le reste de la division euclidienne de PQ par $X^{n+1}-1$. Montrer que l'application induite par σ sur $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire $f\circ\sigma\circ f^{-1}$) est l'application qui à P associe $\overline{XP}$.

4. Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^{n+1}$ stable par σ.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(F) = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$.

Correction ▼ [003187]

Exercice 3188 Centrale MP 2002

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ puis tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et enfin tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Correction ▼ [003188]

Exercice 3189 Polytechnique MP 2002

Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$ distincts et $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{C}$. Trouver $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } \forall\, i,\ P^{-1}(\{y_i\}) = \{x_i\}\}$.

Correction ▼ [003189]

Exercice 3190 ENS Ulm MP 2002

Soit $S \subset \mathbb{N}$ fini et $P = \sum_{s\in S} a_s X^s \in \mathbb{C}[X]$.

1. On suppose que les a_s sont réels. Montrer que P a moins de racines strictement positives distinctes que la suite (a_s) n'a de changement de signe.
2. On suppose que P vérifie : $\forall\, s \in S,\ P(s) = 0$. Montrer que P est nul.

Correction ▼ [003190]

Exercice 3191 $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Correction ▼ [003191]

Exercice 3192 Polynôme positif (Ens Ulm MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :
$(\forall\, x \geqslant 0,\ P(x) > 0) \Leftrightarrow (\exists\, \ell \in \mathbb{N} \text{ tq } (X+1)^\ell P(X)$ est à coefficients strictement positifs).

Correction ▼ [003192]

Exercice 3193 Diviseurs premiers de la suite $(P(n))$ (Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant et E l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que E est infini.

Correction ▼ [003193]

Exercice 3194 Centrale MP 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - P_n^2$ est divisible par X^n.

Correction ▼ [003194]

Exercice 3195 Polynômes à coefficients entiers, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004

On donne un entier $n \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que $\forall\, i,j \in [[0,n]],\ \int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003195]

---

21 Division euclidienne

Exercice 3196 Décomposition en puissances croissantes

Soit $A \in K[X]$ de degré > 0. Montrer que pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ uniques vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i < \deg A \\ P = P_0 + P_1 A + \dots + P_n A^n. \end{cases}$$

[003196]

Exercice 3197 Linéarité du reste et du quotient

Soit $B \in K[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :

$$\Phi : K[X] \to K_{n-1}[X], P \mapsto R$$

et

$$\Psi : K[X] \to K[X], P \mapsto Q \quad \text{avec } P = QB + R.$$

1. Montrer que Φ et Ψ sont linéaires. Chercher leurs noyaux et leurs images.
2. Simplifier $\Phi(P_1 P_2)$.

[003197]

Exercice 3198 Endomorphisme $P \mapsto AP \bmod B$

Soit $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$, et $\varphi : E \to E, P \mapsto$ reste de la div. euclid. de AP par B. Chercher $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$.

Correction ▼ [003198]

Exercice 3199 Congruences

Soient $P \in K[X]$, $a, b \in K$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?
2. Trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Correction ▼ [003199]

Exercice 3200 Congruences

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ divisibles par $X+1$ et dont les restes des divisions par $X+2, X+3, X+4$ sont égaux.

Correction ▼ [003200]

Exercice 3201 Calcul de pgcd

Calculer le pgcd de P et Q pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$
   $Q = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$
   $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$
   $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

Correction ▼ [003201]

Exercice 3202 Coefficients de Bézout

Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

1. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$
   $Q = X^2 + X + 1$

2. $P = X^3 + X^2 + 1$
   $Q = X^3 + X + 1$

Correction ▼ [003202]

Exercice 3203 Division de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1

Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1.

Correction ▼ [003203]

Exercice 3204 Ensi P 90

Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1+X+X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Correction ▼ [003204]

Exercice 3205 Division de $(X-2)^2n + (X-1)^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.
2. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est $Q_2 - Q_1$.
3. Montrer que ce quotient est égal à :

$$\Big((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \cdots - (X-2) + 1\Big) + \Big((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + \cdots + (X-1) + 1\Big).$$

Correction ▼ [003205]

Exercice 3206 Calcul de restes

Trouver les restes des divisions euclidiennes :

1. de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$.
2. de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1.
3. de $X^8 - 32X^2 + 48$ par $\left(X-\sqrt{2}\right)^3$.

Correction ▼ [003206]

Exercice 3207 Divisibilité

Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que X^2+X+1 divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

Correction ▼ [003207]

Exercice 3208 Congruences

Soit $P \in K[X]$ tel que les restes des divisions de P par X^2+1 et X^2-1 valent respectivement $2X-2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par X^4-1 ?

Correction ▼ [003208]

Exercice 3209 $\operatorname{pgcd}(X^n-1, X^m-1)$

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chercher $\operatorname{pgcd}(X^n-1, X^m-1)$.

Correction ▼ [003209]

Exercice 3210 Degré minimal dans la formule de Bézout

Soient $P, Q \in K[X]$ non nuls et $D = \operatorname{pgcd}(P, Q)$.

1. Démontrer qu'il existe $U, V \in K[X]$ uniques tels que : $\begin{cases} UP + VQ = D \\ \deg U < \deg Q - \deg D \\ \deg V < \deg P - \deg D. \end{cases}$

2. Montrer que la méthode des divisions euclidiennes fournit U et V.

Correction ▼ [003210]

Exercice 3211 Application $(U,V) \mapsto UA+VB$

Soient $A,B \in K[X]$, $p = \deg A$, $q = \deg B$. On considère l'application :

$$\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], (U,V) \mapsto UA+VB$$

Démontrer que : $A \wedge B = 1 \iff \Phi$ est bijective. [003211]

Exercice 3212 pgcd$(P(X),P(-X))$ et ppcm$(P(X),P(-X))$

Soit $P \in K[X]$. Démontrer que pgcd$(P(X),P(-X))$ et ppcm$(P(X),P(-X))$ sont pairs ou impairs. [003212]

Exercice 3213 $A \circ P | B \circ P \Rightarrow A|B$

Soient $A,B,P \in K[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$, alors A divise B. [003213]

---

22 Racines de polynômes

Exercice 3214 Factorisation de $X^n - 1$

Factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$.

1. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.
3. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{0 \leqslant k,\ell < n, k \neq \ell} (\omega^k - \omega^\ell)$.

Correction ▼ [003214]

Exercice 3215 Mines MP 1999

Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos(n\theta))$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Correction ▼ [003215]

Exercice 3216 Racines de j et j^2

Montrer que si $p \leqslant n$, alors $X^{2^p} + X^{2^{p-1}} + 1$ divise $X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$. [003216]

Exercice 3217 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$

Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$. Pour $\sin\theta \neq 0$, chercher le quotient.

Correction ▼ [003217]

Exercice 3218 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n \cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n \cos n\theta - X\cos\theta + 1$, puis déterminer le quotient.

Correction ▼ [003218]

Exercice 3219 $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8n} + pX^{4n} + q$

Donner une CNS sur $p,q \in \mathbb{C}$ pour que $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8n} + pX^{4n} + q$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

Correction ▼ [003219]

Exercice 3220 Racines rationnelles

Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant qu'il existe des racines rationnelles.

Correction ▼ [003220]

Exercice 3221 Équation de degré 4 tq $x_1x_2 = 5$

Trouver les racines de $P(X) = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que deux racines, x_1 et x_2, vérifient : $x_1x_2 = 5$ (on introduira le polynôme $Q = X^4P(5/X)$).

Correction ▼ [003221]

Exercice 3222 Racines multiples

Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Correction ▼ [003222]

Exercice 3223 Recherche d'une racine triple

Soit $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$. Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que P a une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Correction ▼ [003223]

Exercice 3224 Ensi P 90

Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Correction ▼ [003224]

Exercice 3225 $x_1 + x_2 = 1$

Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^5 + pX + q$. Donner une CNS sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Correction ▼ [003225]

Exercice 3226 Factorisation

Factoriser

$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

Correction ▼ [003226]

Exercice 3227 $X - 1 \mid P(X^n) \Rightarrow X - 1 \mid P$

Soient $P, Q \in K[X]$.

1. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors P est divisible par $X - 1$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.
2. Montrer que si $P(X^3) + XQ(X^3)$ est divisible par $X^2 + X + 1$, alors P et Q sont divisibles par $X - 1$.

[003227]

Exercice 3228 Racines de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin n\theta \neq 0$. Démontrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$ a toutes ses racines réelles.

Correction ▼ [003228]

Exercice 3229

Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples. [003229]

Exercice 3230 P' divise P

Quels sont les polynômes $P \in K[X]$ tels que P' divise P ?

Correction ▼ [003230]

Exercice 3231 Équations fonctionnelles

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que ...

1. $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
2. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
3. $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$.

Correction ▼ [003231]

Exercice 3232 P à racines réelles simples => $P^2 + a^2$ à racines simples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.
2. En déduire que : $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, les racines de $P^2 + a^2$ sont simples.

[003232]

Exercice 3233 P et Q ont même module

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |P(z)| = |Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}, |u| = 1$ tel que $P = uQ$.

Correction ▼ [003233]

Exercice 3234 Valeur moyenne

Soient $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $P(z_0) = \frac{P(z_1)+\cdots+P(z_n)}{n}$.
On note $\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$.

1. Calculer $\frac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k}$.
2. En déduire que $\Phi(X) = \frac{(X-z_0)\Phi'(X)}{n} + \Phi(z_0)$.
3. Démontrer que $z_1, \dots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
4. Réciproque ?

Correction ▼ [003234]

Exercice 3235 $P(x) \neq 14$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 7$ pour au moins 4 valeurs distinctes $x \in \mathbb{Z}$.
Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, on a $P(x) \neq 14$. [003235]

Exercice 3236 Nombre algébrique rationnel

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha) = 0$ est appelé : *polynôme minimal de* α.

1. Soit α algébrique de polynôme minimal P. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P.
2. Soit α algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2}\deg P$. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

[003236]

Exercice 3237 $P(\sqrt{2}) = 0$

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Démontrer que $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que $\sqrt{2}$.
[003237]

Exercice 3238 Polynôme minimal de $2\cos(2\pi/7)$

Montrer que $x = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Quelles sont les autres racines ?
Correction ▼ [003238]

Exercice 3239 Racines réelles simples

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.
2. Démontrer que : $\forall\, k \in \{1,\dots,n-1\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Correction ▼ [003239]

Exercice 3240 Méthode de Ferrari

Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$.
Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double. Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.
Correction ▼ [003240]

Exercice 3241 Pgcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ racine commune

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine en commun dans $\mathbb{C}$. [003241]

Exercice 3242 Mines MP 2001

Soit K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que $\sigma\ :\ x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.
2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in K[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Correction ▼ [003242]

Exercice 3243 Centrale MP 2001

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P. Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geqslant 0$.
Correction ▼ [003243]

Exercice 3244 X MP* 2004

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. Pour $\omega \in \mathbb{U}$ on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P et $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Montrer que les racines de Q sont de module 1.
Correction ▼ [003244]

Exercice 3245 X MP* 2005

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \dots + |a_{n-1}| < a_n$. Soit $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos(nx)$. Montrer que les zéros de f sont tous réels (cad. si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(x) \neq 0$).
Correction ▼ [003245]

---

23 Polynômes irréductibles

Exercice 3246 Factorisation sur $\mathbb{R}$ de X^8+X^4+1

Factoriser X^8+X^4+1 sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [003246]

Exercice 3247 Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$

Démontrer que $1+(X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction ▼ [003247]

Exercice 3248 Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathscr{E}=\{P\in\mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q,R\in\mathbb{R}[X] \text{ tq } P=Q^2+R^2\}$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $\mathscr{E}=\{P\in\mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0\}$.
3. (Centrale MP 2000, avec Maple) $P=65X^4-134X^3+190X^2-70X+29$. Trouver A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P=A^2+B^2$.

Correction ▼ [003248]

Exercice 3249 Lemme de Gauss

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$. On appelle *contenu de* P le pgcd des coefficients de P (notation : cont(P)).

1. Soient $P,Q\in\mathbb{Z}[X]$ avec $\text{cont}(P)=1$, et $R=PQ$. Soit p un facteur premier de cont(R).
   (a) Si p est premier avec le coefficient constant de P, Démontrer que p divise tous les coefficients de Q.
   (b) Si p divise le coefficient constant de P, se ramener au cas précédent.
   (c) En déduire que cont(Q) = cont(R).
2. Lorsque $\text{cont}(P)\neq 1$, trouver cont(PQ).
3. Application : Soit $R\in\mathbb{Z}[X]$, et $P,Q\in\mathbb{Q}[X]$ tels que $R=PQ$. Montrer qu'il existe $P_1,Q_1\in\mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R=P_1Q_1$.
   (*cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur* $\mathbb{Q}$ *est aussi réductible sur* $\mathbb{Z}$)

[003249]

Exercice 3250 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Démontrer que X^4+X+1 et X^6+X^2+1 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. [003250]

Exercice 3251 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$

Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}$ distincts.

1. Montrer que $(X-a_1)\dots(X-a_n)-1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Même question avec $(X-a_1)\dots(X-a_n)+1$, n impair.

Correction ▼ [003251]

Exercice 3252 Critère d'irréductibilité d'Eisenstein

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$, $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0X^0$ et p un nombre premier tel que :

$$a_0\equiv 0(\operatorname{mod} p),\quad \dots,\quad a_{n-1}\equiv 0(\operatorname{mod} p),\quad a_0\not\equiv 0(\operatorname{mod} p^2).$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Correction ▼ [003252]

Exercice 3253 Irréductibilité de $X^p - a$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $a \in K$ et $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur K si et seulement s'il n'a pas de racine dans K.

Indication ▼ Correction ▼ [003253]

24 Fonctions symétriques

Exercice 3254 $a/b+b/c+c/a$

Soient a,b,c les racines de X^3+pX+q, $q \neq 0$. Calculer : $\sum_{\sigma \in S_3} \left(\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} + \frac{\sigma(b)}{\sigma(c)} + \frac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right)$.

Correction ▼ [003254]

Exercice 3255 $1/(x_i-1)$

Soient x_1,x_2,x_3,x_4 les racines de X^4+X+1. Calculer $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i-1}$.

Correction ▼ [003255]

Exercice 3256 $x_i/(x_jx_k)$

Soient $x_1,\dots,x_8$ les racines de $X^8+X^7-X^2+3$. Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant j<k\leqslant 8} \frac{x_i}{x_jx_k}$.

Correction ▼ [003256]

Exercice 3257 x_i^7

Soient a,b,c les racines de X^3-X+1. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

Correction ▼ [003257]

Exercice 3258 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $1/a+1/b+1/c$ donnés

Résoudre

$$\begin{cases} a+ & b+ & c = & 0 \\ a^2+ & b^2+ & c^2 = & 1 \\ \dfrac{1}{a}+ & \dfrac{1}{b}+ & \dfrac{1}{c} = & -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003258]

Exercice 3259 Ensi P 90

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Correction ▼ [003259]

Exercice 3260 $\int_{t=-1}^1 P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$

Trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\int_{t=-1}^1 P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$.

Correction ▼ [003260]

Exercice 3261 a,b,c en progression géométrique

Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$.

Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$.
[003261]

Exercice 3262 Condition liant les racines

Soit $P = X^3 + pX + q$ de racines a,b,c.

1. CNS pour ces racines soient aux sommets d'un carré ?
2. CNS pour que $a^2 + b^2 = 1 + c^2$?

Correction ▼ [003262]

Exercice 3263 Condition liant les racines

Soient A,B,C les points dont les affixes sont les racines de $X^3 + pX + q$, $p,q \in \mathbb{C}$. A quelle condition sur p et q a t-on $AB = AC = 2BC$?

Correction ▼ [003263]

Exercice 3264 Condition liant les racines

Soit $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ de racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. CNS pour ces racines soient en progression arithmétique ?

Correction ▼ [003264]

Exercice 3265 Transformation d'équation

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$ sont *les* racines.

Correction ▼ [003265]

Exercice 3266 Transformation d'équation

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$.
Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont *les* racines.

Correction ▼ [003266]

Exercice 3267 $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ a une racine de module 1

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ ait une racine de module 1.

Correction ▼ [003267]

Exercice 3268 Polynômes dont les racines sont de module 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1.

1. Démontrer que $\mathscr{E}$ est fini.
2. Pour $P \in \mathscr{E}$ de racines $x_1, \dots, x_n$, on note $\widetilde{P}$ le polynôme unitaire de racines $x_1^2, \dots, x_n^2$.
   Démontrer que $\widetilde{P} \in \mathscr{E}$.
3. En déduire que : $\forall\ P \in \mathscr{E}$, les racines de P sont des racines de l'unité.

Correction ▼ [003268]

Exercice 3269 Centrale MP 2001

Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a,b,c,d réels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour qu'il existe une droite coupant la courbe représentative de f en quatre points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 tels que $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$.

Correction ▼ [003269]

---

25 Fractions rationnelles

Exercice 3270 Substitution de fractions

Soit $F \in K(X)$ non constante et $P \in K[X]$, $P \neq 0$.

1. Montrer que $P \circ F \neq 0$.
2. Montrer que l'application$K(X) \to K(X), G \mapsto G \circ F$ est un morphisme injectif d'algèbre.
3. A quelle condition est-il surjectif ?
4. Montrer que tous les isomorphismes de corps de $K(X)$ sont de cette forme.

Correction ▼ [003270]

Exercice 3271 Multiplicité des pôles

Soient $F, G_0, \ldots, G_{n-1} \in K(X)$ telles que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \cdots + G_0 = 0$.
Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des G_i. [003271]

Exercice 3272 Ensemble image d'une fonction rationelle

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Étudier $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\})$.

Correction ▼ [003272]

Exercice 3273 $F \circ G$ est un polynôme

Trouver tous les couples $(F,G) \in \big(\mathbb{C}(X)\big)^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utiliser l'exercice 3272).

Correction ▼ [003273]

Exercice 3274 Fractions invariantes

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Montrer qu'il existe une unique fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.
2. Application : Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}$.

Correction ▼ [003274]

Exercice 3275 Fractions invariantes

Soit $H = \{F \in K(X) \text{ tel que } F(X) = F(\frac{1}{X})\}$.

1. Montrer que : $F \in H \Leftrightarrow \exists\, G \in K(X)$ tel que $F(X) = G\left(X + \frac{1}{X}\right)$.
2. Montrer que H est un sous-corps de $K(X)$.
3. Que vaut $\dim_H(K(X))$? Donner une base de $K(X)$ sur H.

Correction ▼ [003275]

Exercice 3276 Formule de Taylor

Soit $F \in K(X)$ définie en $a \in K$. Démontrer qu'il existe une fraction G_n définie en a telle que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \cdots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

[003276]

Exercice 3277 Dérivée de $1/(x^2+1)$

Soit $F = \frac{1}{X^2+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^n}$.
Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples. [003277]

Exercice 3278 Fractions de degré négatif

Soit $A = \{F \in K(X)$ tels que $\deg F \leqslant 0\}$. Démontrer que A est une sous-algèbre de $K(X)$.
Chercher ses idéaux.

Correction ▼ [003278]

26 Décompositions de fractions rationnelles

Exercice 3279 Décompositions pratiques des fractions rationnelles

Éléments de 1ère espèce

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2-1)^5} =& \frac{1}{32(x-1)^5} - \frac{5}{64(x-1)^4} + \frac{15}{128(x-1)^3} - \frac{35}{256(x-1)^2} + \frac{35}{256(x-1)} \\
& - \frac{35}{256(x+1)} - \frac{35}{256(x+1)^2} - \frac{15}{128(x+1)^3} - \frac{15}{64(x+1)^4} - \frac{1}{32(x+1)^5} \\
\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} =& \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^3+x+1}{x^4(x-1)^3} =& -\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^2} - \frac{17}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{17}{x-1} \\
\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2(x-1)^2} =& 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^2}{(x^2-1)^2} =& \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+1

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2+1)^2} =& \frac{-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \\
\frac{x}{(x^4-1)^2} =& \frac{1}{16(x-1)^2} - \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{16(x+1)^2} - \frac{1}{8(x+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{4(x^2+1)} \\
\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} =& \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} =& 1 + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1/4}{x^2+1} \\
\frac{x^6}{(x^2+1)(x-1)^3} =& x+3 + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{19}{4(x-1)}
\end{aligned}$$

Du type x^2+x+1

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^4+x^2+1} &= 1 + \frac{x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x}{2(x^2-x+1)} \\
\frac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2} &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+x+1} \\
\frac{3x^5-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^6} &= -\frac{23x+6}{(x^2+x+1)^6} + \frac{13x+18}{(x^2+x+1)^5} + \frac{3x-11}{(x^2+x+1)^4}
\end{aligned}
$$

Autres éléments de 2ème espèce

$$
\begin{aligned}
\frac{x^8}{x^6-1} &= x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) \\
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) \\
\frac{x}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right) \\
\frac{1}{x^5+1} &= \frac{1}{5(x+1)} - \frac{1}{5}\left(\frac{\omega x-2}{x^2-\omega x+1} + \frac{\omega' x-2}{x^2-\omega' x+1}\right), \quad \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Racines de l'unité

$$
\begin{aligned}
\frac{x^n+1}{x^n-1} &= 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \\
\frac{1}{x^n-1} &= \sum_{k=1;2k\neq n}^{n-1} \frac{2x\cos\alpha_k - 2}{n(x^2-2x\cos\alpha_k+1)} + \frac{1}{n(x-1)} \left[-\frac{1}{n(x+1)} \text{ si n est pair}\right], \quad \alpha_k = \frac{2k\pi}{n} \\
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-\omega^k} &= \frac{nx^{n-1}}{x^n-1}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \\
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x-\omega^k)^2} &= \frac{nx^{2n-2}+n(n-1)x^{n-2}}{(x^n-1)^2}, \quad \omega = e^{2i\pi/n} \quad \text{(dérivée)}
\end{aligned}
$$

Polynômes de Tchebychev

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(n \arccos x)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\beta_k}{x-\cos\beta_k}, \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\
\tan(n \arctan x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0;2k\neq n-1}^{n-1} \frac{1}{\cos^2\beta_k(\tan\beta_k - x)} \left[+\frac{x}{n} \text{ si n est impair}\right], \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}
\end{aligned}
$$

Divers

$$\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{(x^2+1)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma_n^k}{2^{n+k}} \left(\frac{(-1)^k}{(x-1)^{n-k}} + \frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-k}} \right)$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n \Gamma_n^k}{2^{n+k}} \left(\frac{i^{k+n}}{(x-i)^{n-k}} + \frac{(-i)^{k+n}}{(x+i)^{n-k}} \right)$$

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} k C_n^k}{x+k}$$

$$\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1} = \frac{1}{4\cos(\alpha/2)} \left(\frac{x}{x^2-2x\cos(\alpha/2)+1} - \frac{x}{x^2+2x\cos(\alpha/2)+1} \right), \quad \alpha \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi)$$

[003279]

27 Décomposition en éléments simples

Exercice 3280 Ensi PC 1999

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur (x^2+1) : $\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)}$.

Correction ▼ [003280]

Exercice 3281 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées p-ièmes des fractions suivantes :

1. $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$.
2. $\frac{1}{X^2-2X\cos\alpha+1}$ $(\alpha \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi))$.
3. $\frac{1}{X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Correction ▼ [003281]

Exercice 3282 Sommation de séries

A l'aide de décomposition en éléments simples, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Correction ▼ [003282]

Exercice 3283 Partie polaire pour un pôle d'ordre 2

Soit $F(X) = \frac{1}{R(X)} = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$ avec $Q(a) \neq 0$. Chercher la partie polaire de F en a en fonction de Q puis en fonction de R.

Correction ▼ [003283]

Exercice 3284

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $P = (X-a_1)\dots(X-a_n)$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{(1+X^2)^n}{P^2}$.

2. Montrer que les coefficients des $\frac{1}{X-a_i}$ sont tous nuls si et seulement si : $(1+X^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0$.

Correction ▼ [003284]

Exercice 3285 P à racines x_i simples $\Rightarrow \sum x_i^k / P'(x_i) = 0$

Soit $P \in (x^2+1)^{n[X]}$ ($n \geqslant 2$) ayant n racines distinctes : $x_1, \dots, x_n$.

1. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.
2. Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{P'(x_i)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Correction ▼ [003285]

Exercice 3286 Les racines de P' sont des barycentres des racines de P

Soit $P \in (x^2+1)^[X]$ de racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1. Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$.
2. En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_n$.

Correction ▼ [003286]

Exercice 3287 $F'(X)/F(X) = \dots$

Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Existe-t-il $F \in K(X)$ telle que : $\frac{F'(X)}{F(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X-a_k}$? [003287]

Exercice 3288 $F(X+1) - F(X) = \dots$

Trouver les fractions $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que : $F(X+1) - F(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Correction ▼ [003288]

Exercice 3289 Inversion de la matrice $(1/(a_i - b_j))$

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, et c des scalaires distincts. On note A la matrice carrée $\left(\frac{1}{a_i-b_j}\right)$ et B la matrice colonne $\left(\frac{1}{a_i-c}\right)$. Montrer que l'équation $AX = B$ possède une solution unique en considérant une fraction rationnelle bien choisie.

Correction ▼ [003289]

Exercice 3290 Racines de $(X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant n racines positives distinctes (entre autres).
Factoriser le polynôme $Q = (X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$ en deux termes, faire apparaître $\frac{P'}{P}$, et Démontrer que Q admet au moins $2n-2$ racines positives.

Correction ▼ [003290]

Exercice 3291 Inégalité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et $Q(X) = X(X-1)\dots(X-n)$.
Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)}$ et en déduire l'existence de $k \in [[0,n]]$ tel que $|P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Correction ▼ [003291]

Exercice 3292 ENS MP 2002

Soit $P \in (x^2+1)^[X]$ admettant deux racines distinctes et tel que P'' divise P. Montrer que P est à racines simples.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant deux racines réelles distinctes, et tel que P'' divise P. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.

Correction ▼ [003292]

28 Division suivant les puissances croissantes

Exercice 3293 Division de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.
2. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.

Correction ▼ [003293]

Exercice 3294 Division de 1 par $(1-X)^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre n quelconque de 1 par $(1-X)^2$.
2. En déduire $1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + \cdots + n\cos(n-1)\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [003294]

Exercice 3295 Division de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos t + X^2$

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à un ordre queclonque de $1-X^2$ par $1-2X\cos\theta + X^2$.
2. En déduire la valeur de $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$, $(\theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi))$.

Correction ▼ [003295]

Exercice 3296 Coefficients de Bézout

Soient $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$.

1. Vérifier que P et Q sont premiers entre eux.
2. Trouver $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = 1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).

Correction ▼ [003296]

Quatrième partie
Algèbre linéaire

29 Espaces vectoriels

Exercice 3297 Sev de K^3 engendrés par deux vecteurs

On considère les vecteurs de K^3 : $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, $\vec{d} = (3,8,5)$.
Soient $F = \mathrm{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \mathrm{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Comparer F et G.

Correction ▼ [003297]

Exercice 3298 Somme de sous-espaces

Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Correction ▼ [003298]

Exercice 3299 $F\cap G = F'\cap G'$

Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E.
Montrer que si $F\cap G = F'\cap G'$ alors $\big(F+(G\cap F')\big)\cap\big(F+(G\cap G')\big) = F$.

Correction ▼ [003299]

Exercice 3300 E n'est pas union de sous-espaces stricts

Soit E un K-ev non nul et $F_1,\dots,F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1\cup\dots\cup F_n$:

1. Traiter le cas $n=2$.
2. Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1\cup\dots\cup F_{n-1}$ et on choisit $\vec{x}\in F_n\setminus(F_1\cup\dots\cup F_{n-1})$ et $\vec{y}\notin F_n$.
   (a) Montrer que : $\forall\ \lambda\in K$, $\lambda\vec{x}+\vec{y}\notin F_n$.
   (b) Montrer que : $\forall\ i\leqslant n-1$, il existe au plus un $\lambda\in K$ tel que $\lambda\vec{x}+\vec{y}\in F_i$.
   (c) Conclure.

[003300]

Exercice 3301 Étude de liberté

Étudier la liberté des familles suivantes :

1. $E=\{\text{fcts} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $\mathscr{F}=(\sin,\cos)$.
2. $E=\{\text{fcts} : \mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}\}$, $\mathscr{F}=(f_a : x\longmapsto x^a)$, $a\in\mathbb{R}$.
3. $E=\{\text{fcts} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $\mathscr{F}=(f_a : x\longmapsto |x-a|)$, $a\in\mathbb{R}$.

[003301]

Exercice 3302 Nombres algébriques

On considère que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $\big(1,\sqrt{2},\sqrt{3}\big)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

[003302]

Exercice 3303 Modification des vecteurs d'une famille libre

Soit E un espace vectoriel, $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires.
On pose $\vec{y}=\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{x}_i$, et $\vec{x}_i' = \vec{x}_i+\vec{y}$. Étudier à quelle condition la famille $(\vec{x}_1',\dots,\vec{x}_n')$ est libre.

Correction ▼ [003303]

Exercice 3304 Polynômes trigonométriques

Soit E l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x\mapsto\cos(nx)$, $n\in\mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x\mapsto\cos^n x$, $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $F=G$. [003304]

Exercice 3305 Supplémentaire commun, X MP* 2005

1. Soit $A=\{P\in\mathbb{R}[X] \text{ tq } P=(1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q\in\mathbb{R}[X]\}$.
   (a) Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $R[X]=A\oplus\{\text{ polynômes pairs }\}$.
   A-t-on $R[X]=A\oplus\{\text{ polynômes impairs }\}$?
   (b) Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?
2. Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E=E_1\oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Correction ▼ [003305]

30 Applications linéaires

Exercice 3306 Image d'une somme, d'une intersection

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1\cap E_2)$, $f^{-1}(F_1+F_2)$, $f^{-1}(F_1\cap F_2)$? [003306]

Exercice 3307 Effet sur les familles libres et génératrices

Soient E,F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

[003307]

Exercice 3308 $f(\mathrm{Ker}(g\circ f))$

Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g\circ f)) = \mathrm{Ker}\, g\cap\mathrm{Im}\, f$. [003308]

Exercice 3309 Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre

Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x}\in E$, la famille $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ est liée.

1. Montrer que si $\vec{x}\neq\vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
2. Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x},\vec{y})$ est libre.
3. Montrer que f est une homothétie.

[003309]

Exercice 3310 $f\circ g\circ f = f$ et $g\circ f\circ g = g$

Soient $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g\circ f = f$ et $g\circ f\circ g = g$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f\oplus\mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

Correction ▼ [003310]

Exercice 3311 $f^3 = \mathrm{id}$

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})\oplus\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) = E$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{id})$.

[003311]

Exercice 3312 Applications $\mathbb{R}$-linéaires sur (x^2+1)

On considère que (x^2+1) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Donner une base de (x^2+1).
2. Montrer que tout endomorphisme de (x^2+1) peut se mettre sous la forme : $f(z) = az+b\bar{z}$, avec $a,b\in(x^2+1)$.

3. CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

Correction ▼ [003312]

Exercice 3313 Supplémentaire d'un hyperplan

Soit E un K-ev et $f : E \to K$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \operatorname{Ker} f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = K$.
2. Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \operatorname{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \oplus H = E$.

[003313]

Exercice 3314 Permutation de coordonnées dans K^n

Soit $\sigma \in S_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma : K^n \to K^n, (x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$
On munit K^n de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit φ un automorphisme d'algèbre de K^n.
   (a) Montrer que la base canonique de K^n est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi(e_i \times e_j)$).
   (b) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3. Montrer que $\{0\}$, $K(1, \ldots, 1)$, $\{(x_1, \ldots, x_n) \text{ tq } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et K^n sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

[003314]

Exercice 3315 $\mathscr{L}(E \times F)$, Chimie P 1996

Est-il vrai que $\mathscr{L}(E \times F)$ et $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Correction ▼ [003315]

Exercice 3316 Commutants itérés

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathscr{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $c_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$ ($c_0 = \{0\}$, c_1 est le commutant de u, c_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

1. Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2. Montrer que $c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_i$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

Correction ▼ [003316]

---

31 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 3317 Essai de bases

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{c} = (-2, 1, -2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{x} = (x, y, z)$.

Correction ▼ [003317]

Exercice 3318 Rang de vecteurs

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{a} = (3, 2, 1, 0), \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 5), \quad \vec{c} = (0, 1, 2, 3), \quad \vec{d} = (1, 2, 1, 2), \quad \vec{e} = (0, -1, 2, 1).$$

Correction ▼ [003318]

Exercice 3319 Fonctions affines par morceaux

Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.
Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F.

[003319]

Exercice 3320 Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} H = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z = 0\} \\ K = \text{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que $H \oplus K = K^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Correction ▼ [003320]

Exercice 3321 Supplémentaires

Soit $E = H \oplus K$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ une base de K.

1. Montrer que pour tout $\vec{a} \in H$, $K_{\vec{a}} = \text{vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_k + \vec{a})$ est un supplémentaire de H.
2. Montrer que si $\vec{a} \neq \vec{b}$, alors $K_{\vec{a}} \neq K_{\vec{b}}$.

[003321]

Exercice 3322 $\dim H = \dim K \Leftrightarrow H$ et K ont un supplémentaire commun

Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun (par récurrence sur $\operatorname{codim} H$).

Correction ▼ [003322]

Exercice 3323 Intersection et somme de sev

Soit E un ev de dimension finie et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E.
On note $H = \bigcap_{i\in I} F_i$ et $S = \sum_{i\in I} F_i = \text{vect}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)$.
Montrer qu'il existe une partie finie, J, de I telle que : $H = \bigcap_{i\in J} F_i$ et $S = \sum_{i\in J} F_i$. [003323]

Exercice 3324 Éléments algébriques

Soient $K, \mathbb{L}$ deux corps avec $K \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que α est algébrique sur K si et seulement si $K[\alpha]$ est un K-ev de dimension finie.
2. On suppose que α et β sont algébriques sur K. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur K (étudier $K[\alpha, \beta]$).

[003324]

Exercice 3325 Corps emboîtés

Soient $H \subset K \subset L$ trois sous-corps de (x^2+1).

1. Montrer que K et L sont des H-ev et L est un K-ev.
2. Montrer que L est de dimension finie sur H si et seulement si K est de dimension finie sur H et L est de dimension finie sur K.
3. Application : Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans (x^2+1), est un corps algébriquement clos (si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de (x^2+1) engendré par les coefficients de P).

[003325]

Exercice 3326 Surcorps de $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie.

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.
2. Si $\dim \mathbb{A} > 1$ montrer que tout élément de $\mathbb{A}$ est algébrique de degré 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à (x^2+1).

[003326]

32 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 3327 Applications du thm du rang

Soient E, F deux K-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que si H est un sev de E, alors
$\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \mathrm{Ker} f)$.
2. Montrer que si K est un sev de F, alors
$\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$.

[003327]

Exercice 3328 Application du thm du rang

Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u+v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker} u \cap \mathrm{Ker} v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$.
(considérer $w = u_{|\mathrm{Ker}(u+v)}$)

[003328]

Exercice 3329 Rang de $f \circ g$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Établir :

1. $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Ker} g$.
2. $\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.
3. $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

[003329]

Exercice 3330 CNS pour que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ soient supplémentaires

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.
2. $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$.
3. $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.
4. $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}\}$.
5. $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$.

[003330]

Exercice 3331 $fog = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ? [003331]

Exercice 3332 Rang de $f+g$

Soient E,F deux ev, E de dimension finie, et $f,g \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Démontrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{\vec{0}_F\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$.

Correction ▼ [003332]

Exercice 3333 $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$

Soient E un ev de dimension finie et $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$.
Montrer que les sommes sont directes.

[003333]

Exercice 3334 $f^3 = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} f^2 \leqslant \dim E$.
2. Montrer que $2\mathrm{rg} f^2 \leqslant \mathrm{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Im}\, f}$).

[003334]

Exercice 3335 $f \circ g = 0$ et $f+g \in GL(E)$

Soit E de dimension finie et $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f \circ g = 0 \\ f+g \in GL(E). \end{cases}$

Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g = \dim E$.

Correction ▼ [003335]

Exercice 3336 f tq $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont imposés

Soit E un K-ev de dimension finie et H,K deux sev fixés de E.

1. A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, f = H$ et $\mathrm{Ker} f = K$?
2. On note $\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{L}(E)$ tq $\mathrm{Im}\, f = H$ et $\mathrm{Ker} f = K\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H \oplus K = E$.

Correction ▼ [003336]

Exercice 3337 Thms de factorisation

Soient E,F,G trois K-ev avec $\dim(G)$ finie.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(F,E)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G,F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}\, u$.
2. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G,F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} u$.

[003337]

Exercice 3338 Isomorphisme $\circ$ projecteur

Soient E en ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

[003338]

Exercice 3339 Centre de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie. Le centre de $\mathscr{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\vec{x} \in E$. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que $g(\vec{x}) = \vec{x}$ et $g \circ f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$.
2. En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.
3. Déterminer $Z' = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

[003339]

Exercice 3340 Éléments réguliers dans $\mathscr{L}(E)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que : (f est injectif) $\iff$ $(\forall\, g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0)$.
2. Montrer que : (f est surjectif) $\iff$ $(\forall\, g \in \mathscr{L}(F),\ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0)$.

[003340]

Exercice 3341 $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$. Pour $z = x + iy \in (x^2+1)$ et $\vec{u} \in E$, on pose : $z\vec{u} = x\vec{u} + yf(\vec{u})$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une structure de (x^2+1)-ev sur E.
2. En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

[003341]

Exercice 3342 $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}$

1. Soit E un K-ev et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f^2 = 0 \\ f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E. \end{cases}$

   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$. Montrer que
   (a) $f^2 = 0$.
   (b) $\forall\, \vec{x} \in E$, il existe $\vec{y}, \vec{z} \in F$ uniques tels que $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$.
   (c) Il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Correction ▼ [003342]

Exercice 3343 Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Soit $\vec{u} \in E \setminus \mathrm{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $\big(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u})\big)$ est libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.
3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$...
   (a) en dimension finie.
   (b) pour E quelconque.
4. Dans $\mathscr{L}(K^2)$, soient f, g de matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que f est nilpotent, $g \in GL(K^2)$, mais $f + g \notin GL(K^2)$.

Correction ▼ [003343]

Exercice 3344 Matexo

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie. [003344]

Exercice 3345 Mines P' 1995

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'indice n.
Soit $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), g \mapsto f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que $\phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que ϕ est nilpotente.
2. Soit $a \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de ϕ.

[003345]

Exercice 3346 Endomorphisme cyclique

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que la famille $\left(f^k(\vec{u})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E.

1. Montrer que $\left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{n-1}(\vec{u})\right)$ est une base de E. (Considérer p maximal tel que $\mathscr{F} = \left(\vec{u}, \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre, et prouver que $f^k(\vec{u})$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ pour tout entier k)
2. Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

[003346]

Exercice 3347 $u^2 = 0$ en dimension 3

Soit E un ev de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ et $\vec{a} \in E$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{a}$.

[003347]

Exercice 3348 $(u, x, f(x))$ liée

Soit E un ev de dimension supérieure ou égale à 3 et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,$ la famille $(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée.
Correction ▼ [003348]

Exercice 3349 Noyaux itérés

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.
2. Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \dots$
3. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.
4. Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.
5. Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

[003349]

Exercice 3350 Dimension des g tq $f \circ g = 0$ et/ou $g \circ f = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $K = \mathrm{Ker} f$, $I = \mathrm{Im} f$, $\mathscr{K} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ et $\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } g \circ f = 0\}$.

1. Montrer que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont des sev de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $g \in \mathscr{K} \iff \mathrm{Im}\, g \subset K$, et : $g \in \mathscr{I} \iff \mathrm{Ker}\, g \supset I$.

3. (a) Montrer que l' application $\Phi : \mathscr{K} \to \mathscr{L}(E,K), g \mapsto g^{|K}$ est un isomorphisme d'ev. En déduire $\dim \mathscr{K}$.
   (b) Chercher de même $\dim \mathscr{I}$ en introduisant un supplémentaire I' de I.
   (c) Chercher aussi $\dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I})$.

Correction ▼ [003350]

Exercice 3351 Rang de $f \mapsto u \circ f \circ v$

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$: $f \mapsto u \circ f \circ v$.

Correction ▼ [003351]

Exercice 3352 Sous algèbres

Soit E un ev de dimension finie et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $f \in \mathscr{A}$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{A}$.
On pourra étudier l'application $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, g \mapsto f \circ g$. [003352]

Exercice 3353 Idéaux de $\mathscr{L}(E)$

Un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$ est un sev $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall f \in \mathscr{I}, \forall g \in \mathscr{L}(E), f \circ g \in \mathscr{I}$.
Soit $\mathscr{I}$ un idéal à gauche.

1. Montrer que si $f \in \mathscr{I}$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, alors $g \in \mathscr{I}$.
2. Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im}(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2) = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$.
3. Soit $f \in \mathscr{I}$ tel que $\operatorname{rg}(f)$ soit maximal. Montrer que $\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f\} = \{f \circ g \text{ tq } g \in \mathscr{L}(E)\}$.

[003353]

Exercice 3354 Automorphismes de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un ev de dimension n et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ un automorphisme d'algèbre. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base fixée de E, (φ_{ij}) la base de $\mathscr{L}(E)$ associée $\big(\varphi_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{jk}\vec{e}_i\big)$ et $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1. Simplifier $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.
2. En déduire qu'il existe $\vec{u}_1 \in E \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $\psi_{11}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$.
3. On note $\vec{u}_i = \psi_{i1}(\vec{u}_1)$. Montrer que $\psi_{ij}(\vec{u}_k) = \delta_{jk}\vec{u}_i$ et en déduire que $(\vec{u}_i)$ est une base de E.
4. Soit $f \in GL(E)$ définie par : $f(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$. Montrer que : $\forall g \in \mathscr{L}(E), \Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Correction ▼ [003354]

Exercice 3355 $f^2 = 0 \Rightarrow f = g \circ h$ avec $h \circ g = 0$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

Correction ▼ [003355]

Exercice 3356 Centrale MP 2001

Soit f un endomorphisme donné de E de dimension n et $F = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$. Trouver la dimension de F.

Correction ▼ [003356]

Exercice 3357 X MP* 2001

Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$ et $F = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id})$. Montrer que $\operatorname{Card}(G) \times \dim F = \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$.

Correction ▼ [003357]

33 Matrices

Exercice 3358 Matrices en damier

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que M est *en damier* si $a_{ij} = 0$ pour $j-i$ impair. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ en damier. Montrer que $\mathscr{D}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$. Quelle est sa dimension ?

[003358]

Exercice 3359 Matrices stochastiques

Soit
$\mathscr{D} = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall\, i,j,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall\, i,\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par multiplication.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathscr{D}$.

Correction ▼ [003359]

Exercice 3360 Matrices centrosymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i,j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB. Montrer aussi que si A est centro-symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi centro-symétrique. [003360]

Exercice 3361 Conservation de l'inverse sur un sous-corps

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$. Comparer les énoncés :
1 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$.
2 : M est inversible dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)})$.

[003361]

Exercice 3362 Algèbre de matrices

On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A} = \{aU + bI,\ a,b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geqslant 2)$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = aU + bI \in \mathscr{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathscr{A}$ si et seulement si $b(b+na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.
3. Montrer que si $b(b+na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Trouver les matrices $M \in \mathscr{A}$ vérifiant : $M^n = I$.

Correction ▼ [003362]

Exercice 3363 Quaternions

Montrer que $\mathscr{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ est un corps isomorphe à (x^2+1).

Montrer que $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2((x^2+1)^{)}) \right\}$ est un corps non commutatif.

[003363]

Exercice 3364 Homographies

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note $f_M : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$
Montrer que $M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

[003364]

Exercice 3365 Opérations par blocs

1. Soient $A_1 \in \mathcal{M}_{n,p_1}(K)$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n,p_2}(K)$, $B_1 \in \mathcal{M}_{p_1,q}(K)$, $B_2 \in \mathcal{M}_{p_2,q}(K)$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p_1+p_2}(K)$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2,q}(K)$. Montrer que $AB = A_1B_1 + A_2B_2$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A, B, 0, C$ sont des matrices de tailles $p\times p$, $p\times q$, $q\times p$, $q\times q$ (matrice triangulaire par blocs). Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont. Le cas échéant, donner M^{-1} sous la même forme.
3. En déduire une nouvelle démonstration de la propriété : *L'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.*

Correction ▼ [003365]

Exercice 3366 Décomposition d'une matrice en matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $U, V \in GL_n(K)$ telles que $A = U + V$.

[003366]

Exercice 3367 Conjugaison

1. Soit $P \in GL_n(K)$. Montrer que l'application $\phi_P : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'algèbre.
2. Soit $\phi : A = (a_{ij}) \longmapsto A' = (a_{n+1-i,n+1-j})$.
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$.
   (b) Trouver une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que $\phi = \phi_P$.

[003367]

Exercice 3368 Chimie P' 1996

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une autre base. Donner la matrice de passage.

Correction ▼ [003368]

Exercice 3369 Centre de $GL_n(K)$

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que $F_{ij} = I + E_{ij}$ est inversible.
2. En déduire que $\operatorname{vect}\big(GL_n(K)\big) = \mathcal{M}_n(K)$.
3. Quel est le centre de $GL_n(K)$?

[003369]

Exercice 3370 Centre de $GL_n(K)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.

[003370]

Exercice 3371 Centre des matrices triangulaires unipotentes

On note $\mathcal{G} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K) \text{ tq } a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$.
2. En utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$, déterminer le centre de $\mathscr{G}$, et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(K,+)$.

Correction ▼ [003371]

Exercice 3372 Équation $aX+(trX)A=B$

Soit $\alpha \in K$, et $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$. Étudier l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(K)$: $\alpha X+(\text{tr}X)A=B$.

Correction ▼ [003372]

Exercice 3373 Commutant d'une matrice diagonale

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(K) \text{ tq } AM=MA\}$ (*commutant de* A).

1. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Soit $A=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.
   (a) Chercher $\mathscr{C}_A$.
   (b) Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto MA-AM$
   Montrer que $\text{Im}\,\phi$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

[003373]

Exercice 3374 Matrices de trace nulle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ *non scalaire* telle que $\text{tr}M=0$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.
2. En déduire que M est semblable à une matrice $N=\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$ et $\text{tr}M_1=0$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
4. Montrer qu'il existe $A,B \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $M=AB-BA$.

[003374]

Exercice 3375 Forme bilinéaire trace

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ non nulle. Montrer que l'application $f_A : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K, X \mapsto \text{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_{p,n}(K)$.
2. Réciproquement : Soit $\phi : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K$ une forme linéaire quelconque. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ telle que $\phi = f_A$ (on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$).
3. Soit $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to K$ une forme linéaire vérifiant : $\forall\, X,Y \in \mathscr{M}_n(K),\ \phi(XY)=\phi(YX)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\phi = \lambda\text{tr}$.

[003375]

Exercice 3376 Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ contient une matrice inversible

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ $(n \geqslant 2)$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $H=\{M \text{ tq } \text{tr}(AM)=0\}$.
2. En déduire que H contient une matrice inversible.

Correction ▼ [003376]

Exercice 3377 Matrices magiques

Une matrice carrée M est dite *magique* si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ magiques}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(K)$ et $s : \mathscr{M} \to K$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).
2. Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.
3. Montrer que $\mathscr{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.
4. Pour $M \in \mathscr{M}_n(K)$, on note ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.
   Soit $\mathscr{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathscr{K} = \{(x, \dots, x) \in K^n\}$.
   (a) Montrer que : $M \in \mathscr{M} \iff \mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont stables par ϕ_M.
   (b) En déduire $\dim(\mathscr{M})$.

[003377]

Exercice 3378 Matrices triangulaires nilpotentes

1. Soit A une matrice triangulaire à diagonale nulle. Montrer que A est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice nilpotente d'indice n et ϕ l'endomorphisme de K^n associé.
   On note $E_i = \operatorname{Ker}\phi^i$, et $\vec{e}_i$ un vecteur quelconque choisi dans $E_i \setminus E_{i-1}$ ($\vec{e}_1 \in E_1 \setminus \{\vec{0}\}$).
   (a) Justifier l'existence de $\vec{e}_i$.
   (b) Montrer que la famille $(\vec{e}_i)$ est une base de K^n.
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

[003378]

Exercice 3379 Valeurs propres de AB et BA

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.
(I_n, I_p = matrices unité d'ordres n et p)

1. Montrer que si C est inversible, alors D l'est aussi (résoudre $DX = 0$).
2. Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.
3. En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.

Correction ▼ [003379]

Exercice 3380 M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $(I + M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [003380]

Exercice 3381 Équation $X^2 + X = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation dans $\mathscr{M}_2(K)$: $X^2 + X = A$.

Soit X une solution et ϕ_A, ϕ_X les endomorphismes de K^2 de matrices A et X dans la base canonique.

1. Montrer que X ou $X+I$ n'est pas inversible.
2. Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A (on montrera que $\mathrm{Ker}\phi_X = \mathrm{Ker}\phi_A$ et $\mathrm{Im}\,\phi_X = \mathrm{Im}\,\phi_A$).
3. Résoudre l'équation.

Correction ▼ [003381]

Exercice 3382 Groupes de matrices

Soit $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}_n(K)$ tel que pour la multiplication, $\mathscr{G}$ soit un groupe. On note J l'élément neutre et pour $M \in \mathscr{G}$, ϕ_M l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.

1. Montrer que ϕ_J est une projection.
2. Montrer que : $\forall\, M \in \mathscr{G}$, $\phi_{M|\mathrm{Ker}\phi_J} = 0$ et $\phi_{M|\mathrm{Im}\,\phi_J}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,\phi_J$.
3. En déduire que $\mathscr{G}$ est isomorphe à un groupe $GL_k(K)$.

Correction ▼ [003382]

Exercice 3383 Matrice vérifiant $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $A^k = I$ $(k \neq 0)$. On pose $B = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. Soient u, v les endomorphismes de K^n matrices A et B dans la base canonique.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\,v$, $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}v$, $\quad \mathrm{Ker}v \oplus \mathrm{Im}\,v = K^n$.
2. En déduire : $\mathrm{tr}B = k\mathrm{rg}B$.

Correction ▼ [003383]

Exercice 3384 $A > 0, X > 0$ et $A^k X = X$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si tous ses coefficients sont strictement positifs.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^k X = X$. Montrer qu'il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif tel que $MY = Y$. [003384]

Exercice 3385 Suite récurrente linéaire matricielle

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Exprimer en fonction de k le terme général de la suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ définie par : $\begin{cases} M_0 \text{ est donnée,} \\ M_{k+1} = AM_k + B. \end{cases}$

Correction ▼ [003385]

Exercice 3386 A, A^2, A^3 données $\Rightarrow A^p$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ et $U, V \in \mathscr{M}_n(K)$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ (chercher une relation linéaire entre A, A^2, A^3).
2. On suppose ici $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que X est vecteur propre de U et de V avec les valeurs propres $0,0$ ou $1,0$, ou $0,1$.

Correction ▼ [003386]

Exercice 3387 Idéaux de $\mathscr{M}_n(K)$

Une partie $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}_n(K)$ est appelée *idéal à droite de* $\mathscr{M}_n(K)$ si c'est un sous-groupe additif vérifiant :

$$\forall\, A \in \mathscr{I},\ \forall\, B \in \mathscr{M}_n(K),\ AB \in \mathscr{I}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on note $\mathcal{H}_A$ le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ engendré par les colonnes de A, et $\mathcal{I}_A$ l'idéal à droite engendré par A : $\mathcal{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathcal{M}_n(K)\}$.

1. Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que : $M \in \mathcal{I}_A \iff \mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}_A$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C$. Simplifier $\mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B$.
3. Soit $\mathcal{I}$ un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\mathcal{I}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(K)$, puis qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$.
4. Que peut-on dire des idéaux *à gauche* de $\mathcal{M}_n(K)$?

[003387]

Exercice 3388 Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le pgcd de $x_1, \dots, x_n$. Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (par récurrence sur n).
3. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. CNS pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = Y$?

[003388]

Exercice 3389 Rayon spectral d'une matrice à coefficients positifs

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall\, i, j,\ a_{ij} > 0$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre :

$$(X \geqslant Y) \iff (\forall\, i,\ x_i \geqslant y_i),$$

et on pose pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geqslant 0$, $X \neq 0$:

$$\begin{cases} R(X) & = & \sup\{r \geqslant 0 \text{ tq } AX \geqslant rX\}, \\ R & = & \sup\{R(X) \text{ tq } X \geqslant 0, X \neq 0\}. \end{cases}$$

1. Montrer que R est fini et qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $R(X_0) = R$.
2. Montrer que toutes les coordonnées de X_0 sont strictement positives.
3. On pose $AX_0 = RX_0 + Y$. Montrer que $Y = 0$.
4. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant R$, et $(|\lambda| = R) \Leftrightarrow (\lambda = R)$.

Correction ▼ [003389]

Exercice 3390 INT ingénieurs 93

Soit $E = \{\text{matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisymétriques}\}$ et $f : E \to E, M \mapsto {}^tAM + MA$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Quelle est la trace de f ?

Correction ▼ [003390]

Exercice 3391 Ensam PSI 1998

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ et $\mathscr{C}(A)$ son commutant.
Montrer que pour $M,N \in \mathscr{C}(A)$ on a : $M = N \Leftrightarrow M$ et N ont la même dernière colonne.
En déduire que $\mathscr{C}(A) = K_{n-1}[A]$. [003391]

Exercice 3392 ENS MP 2002

Que dire des morphismes de groupe $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Correction ▼ [003392]

---

34 Calcul matriciel

Exercice 3393 Équation $AX = B$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'équation en X : $AX = B$, $X,B \in \mathscr{M}_{3,n}(K)$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).
2. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003393]

Exercice 3394 Équation $AX = B$

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice B telle que $BC = A$?

Correction ▼ [003394]

Exercice 3395 Calcul de A^n par la formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ [003395]

Exercice 3396 Calcul de A^n par polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$P(6) = 6^n, \quad P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n, \quad \text{et } P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$

   Montrer que $A^n = P_n(A)$.

3. Même question pour $n \in \mathbb{Z}$.

[003396]

Exercice 3397 Calcul de A^k

Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003397]

Exercice 3398 Inversion de matrices

Inverser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in (x^2+1)$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \cdots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003398]

Exercice 3399 Effet des arrondis

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et B^{-1}.

Correction ▼ [003399]

Exercice 3400 Changement de base

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I},\vec{J},\vec{K},\vec{L})$ et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathscr{B} = (\vec{I},\vec{J},4\vec{I}+\vec{J}-3\vec{L},-7\vec{I}+\vec{K}+5\vec{L})$ et $\mathscr{B}' = (4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\vec{k})$. Quelle est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

Correction ▼ [003400]

Exercice 3401 Matrices semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.
(On cherchera P inversible telle que $PB = AP$)

Correction ▼ [003401]

Exercice 3402 Matrices semblables

Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction ▼ [003402]

Exercice 3403 Matrices non semblables

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Correction ▼ [003403]

Exercice 3404 Matrices non semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$). [003404]

Exercice 3405 Ensi Physique P 1995

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [003405]

Exercice 3406 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M}n+1(\mathbb{Q})$ telle que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. En déduire la matrice A^{-1}. [003406]

Exercice 3407 Coefficients du binôme

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $a_{ij} = (-1)^{n-j}C_{n-j}^{i-1}$.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $K_{n-1}[X]$.
2. En déduire A^3.

Correction ▼ [003407]

35 Équations linéaires

Exercice 3408 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

Correction ▼ [003408]

Exercice 3409 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003409]

Exercice 3410 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003410]

Exercice 3411 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [003411]

Exercice 3412 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1). \end{cases}$$

Correction ▼ [003412]

Exercice 3413 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & - & z & + & t & = & b \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c \\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003413]

Exercice 3414 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & a \\ x & + & 4y & + & 3z & + & 2t & = & b \\ 2x & + & y & + & 4z & + & 3t & = & c \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 4t & = & d. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003414]

Exercice 3415 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x\cos 2\alpha & + & y\cos\alpha & + & z & = & a \\ x\cos 2\beta & + & y\cos\beta & + & z & = & b \\ x\cos 2\gamma & + & y\cos\gamma & + & z & = & c. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003415]

Exercice 3416 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003416]

Exercice 3417

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array}\right.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [003417]

Exercice 3418 Système avec paramètre

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \frac{x}{1+a} & + & \frac{y}{1+2a} & + & \frac{z}{1+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{2+a} & + & \frac{y}{2+2a} & + & \frac{z}{2+3a} & = & 1 \\ \frac{x}{3+a} & + & \frac{y}{3+2a} & + & \frac{z}{3+3a} & = & 1. \end{array}\right.$$

Correction ▼ [003418]

Exercice 3419 Système incompatible

Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

[003419]

Exercice 3420 Combinaison de formes linéaires

Soient $f, f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur K^n linéairement indépendantes. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_p$.
Indication : Étudier le système

$$\begin{cases} f_1(x) & = & 0 \\ \vdots & & \\ f_p(x) & = & 0 \\ f(x) & = & 1. \end{cases}$$

Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(f_1, \dots, f_p)$ libre ? [003420]

Exercice 3421 Base antiduale

Soient $f_1, \dots, f_n$, n formes linéaires indépendantes sur un ev E de dimension n. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_i)$ de E telle que $f_i = \vec{e}_i^{\,*}$. [003421]

Exercice 3422 Orthogonal d'un sev

Soit E un K-ev de dimension n et F un sev de E^* dimension p.
On note $F^\perp = \{\vec{x} \in E \text{ tq } \forall f \in F \text{ on a } f(\vec{x}) = 0\}$. Chercher $\dim F^\perp$. [003422]

Exercice 3423 Système de Vandermonde

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n scalaires distincts et M la matrice $\left(\alpha_i^{j-1}\right)$ (matrice de Vandermonde).
Montrer que M est inversible en interprétant le système $MX = 0$ dans $K_{n-1}[x]$. [003423]

Exercice 3424 Formule d'intégration numérique

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [003424]

Exercice 3425 Système non linéaire

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3. \end{cases}$$

1. Lorsque x, y, z sont réels strictement positifs.
2. Lorsque $x, y, z \in (x^2 + 1)$.

Correction ▼ [003425]

36 Déterminants

Exercice 3426 $\det(I-AB)=\det(I-BA)$

Soient $A\in\mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B\in\mathscr{M}_{q,p}(K)$. Montrer que $\det(I_p-AB)=\det(I_q-BA)$. (Commencer par le cas où A est la matrice canonique de rang r) [003426]

Exercice 3427 Changements de signe

Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(K)$ et $A'=((-1)^{i+j}a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Correction ▼ [003427]

Exercice 3428 Somme des colonnes, Matexo

Soit M une matrice carrée d'ordre n, et M' la matrice déduite de M en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la somme des colonnes de M d'indices différents de j. Comparer les déterminants de M et M'. [003428]

Exercice 3429 $\det(A^2+B^2)$

1. Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2)\geqslant 0$.
2. Chercher A,B ne commutant pas telles que $\det(A^2+B^2)<0$.

Correction ▼ [003429]

Exercice 3430 Déterminant par blocs

Soient $A,B,C,D\in\mathscr{M}_n(K)$ avec A inversible et $AC=CA$. On considère $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(K)$. Montrer que $\det M=\det(AD-CB)$. [003430]

Exercice 3431 Comatrice, Ensi P 91

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [003431]

Exercice 3432 Comatrice

Soit $n\geqslant 2$ et $A\in\mathscr{M}_n(K)$.

1. Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}A)$ dans le cas où A est inversible.
2. Si $\mathrm{rg}A\leqslant n-2$, démontrer que $\mathrm{com}A=0$.
3. Si $\mathrm{rg}A=n-1$, démontrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)=1$.
4. Dans le cas général, démontrer que $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-2}A$.

[003432]

Exercice 3433 Comatrice

Soit $n\geqslant 2$ et $A\in\mathscr{M}_n(K)$.

1. Si A et B sont inversibles, démontrer que $\mathrm{com}\,(AB)=(\mathrm{com}A)(\mathrm{com}B)$.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A-\lambda I$ et $B-\lambda I$ soient inversibles.
3. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{com}A$ et $\mathrm{com}B$ le sont.

[003433]

Exercice 3434 Système linéaire homogène

On considère un système linéaire homogène : $(S)\iff AX=0$, avec $A\in\mathscr{M}_{n,p}(K)$, $n<p$ et $\mathrm{rg}A=n$.

1. Montrer qu'on peut compléter A en une matrice $B = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ inversible.
2. Montrer que les colonnes $n+1$ à p de ${}^t\mathrm{com}\,B$ constituent une base des solutions de (S).
3. Considérer l'exemple suivant :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0. \end{cases}$$

Correction ▼ [003434]

Exercice 3435 Inégalité

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que : $|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
Quand y a-t-il égalité ?

Correction ▼ [003435]

Exercice 3436 Déterminants 2×2 imposés

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 2. On note det le déterminant dans une base fixée de E.

1. Démontrer que : $\det(\vec{a},\vec{b})\det(\vec{c},\vec{d}) + \det(\vec{a},\vec{c})\det(\vec{d},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{d})\det(\vec{b},\vec{c}) = 0$.
   (Commencer par le cas où $(\vec{a},\vec{b})$ est libre)
2. On donne six scalaires : $d_{ab}, d_{ac}, d_{ad}, d_{cd}, d_{db}, d_{bc}$ tels que $d_{ab}d_{cd} + d_{ac}d_{db} + d_{ad}d_{bc} = 0$.
   Montrer qu'il existe des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ tels que : $\forall\, x, y,\ d_{xy} = \det(\vec{x}, \vec{y})$.

Correction ▼ [003436]

Exercice 3437 Décomposition d'un vecteur en dimension 3

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs d'un ev E de dimension 3. On note : det le déterminant dans une base fixée de E.
Démontrer que : $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} + \det(\vec{a},\vec{d},\vec{c})\vec{b} + \det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a}$.

Correction ▼ [003437]

Exercice 3438 Trace d'un endomorphisme

Soit E un ev de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(\vec{u}_1), \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) + \det(\vec{u}_1, f(\vec{u}_2), \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n) + \dots + \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, f(\vec{u}_n)) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)\mathrm{tr}(f).$$

Correction ▼ [003438]

Exercice 3439 $\det(u+n)$

Soient $u, n \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes d'un (x^2+1)-ev de dimension finie, u inversible, n nilpotent, avec $u \circ n = n \circ u$.

1. Démontrer que $\det n = 0$.
2. Chercher le polynôme caractéristique de n. En déduire que $\det(\mathrm{id}_E + n) = 1$.
3. Démontrer que $\det(u+n) = \det u$.

[003439]

Exercice 3440 Sev stables

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe deux sev F, G supplémentaires et stables par f.
Démontrer que $\det f = (\det f_{|F})(\det f_{|G})$.

[003440]

Exercice 3441 Groupe $SL_n(K)$

On note $SL_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1. (a) Démontrer que $SL_n(K)$ est un groupe pour le produit matriciel.
   (b) Démontrer que $SL_n(K)$ est engendré par les matrices : $I + \lambda E_{ij}$, $(j \neq i)$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$, et $\lambda \in K$ (transformer une matrice $M \in SL_n(K)$ en I par opérations élémentaires).
2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a une inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.
   (b) Démontrer que le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $I + E_{ij}$, $(j \neq i)$.

Correction ▼ [003441]

Exercice 3442 Déterminant de $X \mapsto AX$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $f_A : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), X \mapsto AX$. Calculer $\det f_A$.

Correction ▼ [003442]

Exercice 3443 Résultant

Soient $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$, avec $a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$.

Le résultant de P et Q est : $\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & \ddots & \ddots\ a_0 & b_{q-1} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots\ a_1 & b_q & \ddots & \vdots \\ & & \ddots\ \vdots & & \ddots & b_{q-1} \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$ les positions non remplies correspondent à des zéros.

(largeurs des blocs de colonnes : q et p)

En considérant l'application $\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], (U,V) \mapsto UP + VQ$, montrer que : $\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.

Application : CNS pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ ait une racine multiple ?

Correction ▼ [003443]

Exercice 3444 Système unisolvent

Soient E un ensemble quelconque et $f_1, \dots, f_n : E \to K$ des fonctions.

Montrer par récurrence sur n que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans K^E si et seulement s'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de E tels que $\det\big(f_i(x_j)\big) \neq 0$. [003444]

Exercice 3445 $\prod a_{i\sigma(i)} = \text{cste}$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe $a \neq 0$ tel que : $\forall\ \sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = a$. Montrer que $\operatorname{rg} A = 1$.
[003445]

Exercice 3446 Combinaison linéaire des solutions

Soit $(S) \iff AX = B$ un système linéaire de n équations à n inconnues de Cramer. Montrer que pour tous scalaires $c_1, \dots, c_n$, on a :

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = -\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} & A & & b_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b_n \\ c_1 & \dots & c_n & 0 \end{vmatrix}.$$

[003446]

Exercice 3447 Problème d'interpolation de Lagrange

Soit A un *anneau* commutatif, $x_1,\dots,x_n \in A$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
a. Le déterminant de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$ est un élément inversible de A ;
b. Pour tous $y_1,\dots,y_n \in A$, il existe un unique polynôme $P \in A_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 1,\dots,n$.
Donner un exemple d'anneau A et un problème d'interpolation dans A (en des points x_i distincts) n'ayant pas de solution.

Correction ▼ [003447]

Exercice 3448 Polytechnique MP 2002

Soit p un nombre premier et $a_0,\dots,a_{p-1} \in \mathbb{Z}$. Montrer que le déterminant de la matrice $A = (a_{j-i \bmod p}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$ vérifie : $\det(A) \equiv a_0 + \dots + a_{p-1} \bmod p$.
Indication : écrire $A = \sum_{k=0}^{p-1} a_k J^k$ *et calculer* A^p.

Correction ▼ [003448]

Exercice 3449 Centrale MP 2002

Soit un déterminant symétrique réel d'ordre impair dont les coefficients sont entiers, les diagonaux étant de plus pairs. Montrer que ce déterminant est pair.

Correction ▼ [003449]

Exercice 3450 Formule de Cauchy-Binet

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(K)$ et $q \in [[1,\min(n,p)]]$.
Pour $X = \{x_1,\dots,x_q\}$ et $Y = \{y_1,\dots,y_q\}$ avec $1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_q \leqslant n$ et $1 \leqslant y_1 < y_2 < \dots < y_q \leqslant p$ on note $\Delta_{X,Y}(M)$ le déterminant de la matrice $q \times q$ de terme général a_{x_i,y_j}.

1. Soient $M \in \mathcal{M}_{np}(K)$ et $N \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ avec $n \leqslant p$. Montrer que $\det(MN) = \sum_{X \subset [[1,p]];\mathrm{Card}\, X=n} \Delta_{[[1,n]],X}(M)\Delta_{X,[[1,n]]}(N)$ (considérer les deux membres comme des fonctions des colonnes de N).
2. Donner une formule pour $\det(MN)$ quand $n > p$.
3. Soient $M \in \mathcal{M}_{np}(K)$, $N \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $r \in [[1,\min(n,q)]]$. Montrer, pour $X \subset [[1,n]]$ et $Y \subset [[1,q]]$ avec $\mathrm{Card}\,(X) = \mathrm{Card}\,(Y) = r$: $\Delta_{X,Y}(MN) = \sum_{Z \subset [[1,p]];\mathrm{Card}\,(Z)=r} \Delta_{X,Z}(M)\Delta_{Z,Y}(N)$.

[003450]

37 Calculs de déterminants

Exercice 3451 Calcul de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.
4. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \dots & a_1-b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n-b_1 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Pour 6 : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans (x^2+1) de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

Correction ▼ [003451]

Exercice 3452 Factorisation de polynômes

Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1. $\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003452]

Exercice 3453 Calcul par dérivation

1. Soient $a,b,c,d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x)=\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

   Montrer que f est dérivable et que : $f'(x)=\begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n\times n$.
3. Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [003453]

Exercice 3454 $\det(A+(\alpha))$

Soit $A\in\mathscr{M}_n(K)$ et $U=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\det(A+\alpha U)=\det A+\alpha\sum$cofacteurs de A.
2. En déduire la valeur de $D(a,b,c)=\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,
   (a) pour $b\neq c$.
   (b) pour $b=c$.

Correction ▼ [003454]

Exercice 3455 Déterminant tridiagonal, Matexo

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$, $(b_1,b_2,\dots,b_{n-1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et $(c_1,c_2,\dots,c_{n-1})\in(\mathbb{R}_-^*)^{n-1}$. Montrer que

le déterminant de la matrice suivante est strictement positif :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

[003455]

Exercice 3456 Déterminants de Vandermonde

Soient $a_1,\dots,a_n \in K$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1,\dots,a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1. Calculer et factoriser $V(a,b)$ et $V(a,b,c)$.
2. Pour $x \in K$, montrer que $V(a_1,\dots,a_n,x) = V(a_1,\dots,a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.
3. En déduire l'expression générale de $V(a_1,\dots,a_n)$.

[003456]

Exercice 3457 Racines de l'unité

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ et D le déterminant $n\times n$: $D = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)$.

1. Calculer D^2.
2. Montrer que $D = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell}\cdot 2i\sin\frac{\ell-k}{n}\pi\right)$.
3. Exprimer D sous forme trigonométrique.

Correction ▼ [003457]

Exercice 3458 Cosinus

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det\Big(\cos((j-1)\alpha_i)\Big)$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Correction ▼ [003458]

Exercice 3459 $(x_i+y_j)^k$

Soit $k \leqslant n-1$ et $M = \left((x_i+y_j)^k\right)$. Écrire M comme produit de deux matrices et calculer $\det M$.

Correction ▼ [003459]

Exercice 3460 $P(i+j)$

Soit $P \in K_{n-1}[X]$ et $A = \Big(P(i+j)\Big) \in \mathcal{M}_n(K)$. Développer $P(i+j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices. En déduire $\det A$.

Correction ▼ [003460]

38 Rang de matrices

Exercice 3461 Calcul de rang

Chercher les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003461]

Exercice 3462 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in (x^2+1)$. [003462]

Exercice 3463 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et le cas échéant, donner une relation de dépendance linéaire entre les lignes.

Correction ▼ [003463]

Exercice 3464 Calcul de rang

Chercher rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Correction ▼ [003464]

Exercice 3465 Matrice à trou

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(K)$, $B \in \mathscr{M}_{2,2}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{2,3}(K)$ telles que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.

Correction ▼ [003465]

Exercice 3466 Factorisation, Centrale P' 1996

Soit la matrice carrée d'ordre n, I_p ($p \leqslant n$), telle que le i-ème terme diagonal vaut 1 si i est compris entre p et n, tous les autres coefficients étant nuls. Quelle sont les conditions sur A (matrice carrée d'ordre n) pour qu'il existe B telle que $AB = I_p$?

Correction ▼ [003466]

Exercice 3467 Échange de lignes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Correction ▼ [003467]

Exercice 3468 Matrices de rang 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que : $\quad \text{rg}(M) = 1 \iff$ il existe C, colonne et L, ligne, non nulles, telles que $M = CL$. [003468]

Exercice 3469 Matrices de projection de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang 1. Montrer que A est une matrice de projection si et seulement si $\text{tr}A = 1$. [003469]

Exercice 3470 Calcul de rang

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots y_p \in K$. On note A, B les matrices de termes généraux $x_i + y_j$ et $(x_i + y_j)^2$.
Chercher les rangs de A et B.

Correction ▼ [003470]

Exercice 3471 Juxtaposition de matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$. On considère $C = (A\ B) \in \mathcal{M}_{n,p+q}(K)$.
Montrer que : $\text{rg}(C) = \text{rg}(A) \Leftrightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ tq $B = AP$. [003471]

Exercice 3472 $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que : $\forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
3. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.
4. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2((x^2+1)^)$ telle que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}({}^tAA)$.

Correction ▼ [003472]

Exercice 3473 Rang de $\text{Re}(M)$

Soit $M \in \mathcal{M}_n((x^2+1)^)$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(P) \leqslant 2$. [003473]

Exercice 3474 Calcul de rang

Soit $M = \Big(\cos(i+j-1)\theta\Big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{rg}M$ en fonction de θ.

Correction ▼ [003474]

Exercice 3475 Décomposition en blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée décomposée en blocs. On suppose que A est inversible.
Montrer que $\text{rg}M = \text{rg}A + \text{rg}(D - CA^{-1}B)$. [003475]

Exercice 3476 $MA = 0$, Chimie P' 90

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $MA = 0\}$. Quelle est la structure de E, sa dimension ?

Correction ▼ [003476]

Exercice 3477 Rang des applications $X \mapsto AX, XB, AXB$

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$. Chercher le rang des applications :

$$f : \mathcal{M}_{p,q}(K) \to \mathcal{M}_{n,q}(K), X \mapsto AX \qquad g : \mathcal{M}_{p,q}(K) \to \mathcal{M}_{p,r}(K) X \mapsto XB$$

$$h : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,r}(K) X \mapsto AXB$$

(on transformera A et B en matrices canoniques équivalentes)

[003477]

Exercice 3478 Rang de $X \mapsto AX - XA$

Soit $A \in \mathscr{M}_2(K)$. Chercher le rang de l'application $\mathscr{M}_2(K) \to \mathscr{M}_2(K), M \mapsto AM - MA$ [003478]

Exercice 3479 Matrice antisymétrique 3×3

Soit $M \in \mathscr{M}_3(K)$ antisymétrique. Quel est le rang de M ?

Correction ▼ [003479]

Exercice 3480 Matrices antisymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ antisymétrique.

1. On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.

   Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P existe et est inversible.

   (b) Calculer AP.

   (c) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.

2. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

[003480]

Exercice 3481 Matrice à diagonale dominante

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. On dit que M est *à diagonale dominante* si : $\forall\, i,\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. On transforme M en $M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot. Montrer que M_1 est à diagonale dominante.

2. En déduire que M est inversible.

[003481]

Exercice 3482 Rang par blocs, Matexo

Soit une matrice M de rang r telle que :

$$M = \begin{pmatrix} M_r & M_2 \\ M_1 & M_3 \end{pmatrix},$$

où la matrice M_r est carrée de rang r et de taille r. Montrer que $M_3 = M_1 M_r^{-1} M_2$. [003482]

Exercice 3483 $\mathrm{rg}(BC)$, Centrale MP 2006

1. Soient deux matrices $B \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ de même rang r. Montrer que $A = BC$ est de rang r.

2. Réciproquement, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$. Montrer qu'il existe des matrices B et C comme précédemment telles que $A = BC$.

3. Déterminer explicitement une telle décomposition pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

4. Supposons de plus A symétrique. Montrer que CB est aussi de rang r.

Correction ▼ [003483]

Exercice 3484 *PA* nilpotente

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que PA est nilpotente. [003484]

---

39 Projections

Exercice 3485 Barycentre de projections

Soient p, q deux projections de même base H et de directions F, G. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H. [003485]

Exercice 3486 Valeurs propres d'une projection

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que pour tout $\lambda \in K \setminus \{-1\}$, $\mathrm{id}_E + \lambda p$ est un isomorphisme de E. [003486]

Exercice 3487 Projections ayant même base ou même direction

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projections.

1. Montrer que p et q ont même base si et seulement si : $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Donner une condition analogue pour que p et q aient même direction.

[003487]

Exercice 3488 Somme de deux projecteurs

Soient p, q deux projections. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est une projection } \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Base}(p) \subset \mathrm{Dir}(q) \\ \mathrm{Base}(q) \subset \mathrm{Dir}(p). \end{cases}$$

Chercher alors la base et la direction de $p + q$. [003488]

Exercice 3489 $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$

Soit E un K-ev. Trouver tous les couples (f, g) d'endomorphismes de E tels que : $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g. \end{cases}$

Correction ▼ [003489]

Exercice 3490 $f \circ g = \mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est une projection et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003490]

Exercice 3491 Projection $p + q - q \circ p$

Soient p,q deux projections telles que $p \circ q = 0$. Montrer que $p+q-q \circ p$ est une projection, et déterminer ses éléments.

Correction ▼ [003491]

Exercice 3492 Endomorphisme de rang 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in K$ tel que $f^2 = \lambda f$.
Montrer que : $\lambda = 1 \iff \mathrm{id} - f$ est non injective $\iff \mathrm{id} - f$ est non surjective (même en dimension infinie).

Correction ▼ [003492]

Exercice 3493 Relation d'ordre sur les projecteurs

On munit l'ensemble des projections d'un ev E de la relation : $p \ll q \iff p \circ q = q \circ p = p$.

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.
2. Soient p,q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p,q) = p+q-p \circ q$ et $\inf(p,q) = p \circ q$.

[003493]

Exercice 3494 Expressions analytiques

Soit $E = K^3$, $F = \{\vec{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+2y+z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}\big(\vec{U} = (1,1,1)\big)$.

1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G et $\vec{X} = (x,y,z)$. Déterminer $s(\vec{X})$.

Correction ▼ [003494]

Exercice 3495 Trace nulle

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et A une partie finie de $GL(E)$ stable par composition. On pose $u = \sum_{f \in A} f$.
Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Correction ▼ [003495]

40 Réductions des endomorphismes

40.1 Diagonalisation

Exercice 3496 Diagonalisation en dimension 2

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003496]

Exercice 3497 Diagonalisation en dimension 3

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003497]

Exercice 3498 Diagonalisation en dimension 4

Diagonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [003498]

40.2 Calculs

Exercice 3499 Calcul de valeurs propres

Chercher les valeurs propres des matrices :

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003499]

Exercice 3500 Calcul de valeurs propres

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Chercher les valeurs et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On distinguera les cas :

1. $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
2. $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

Correction ▼ [003500]

Exercice 3501 Polynômes de Chebychev

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ par récurrence.
2. En déduire les valeurs propres de A.

Correction ▼ [003501]

Exercice 3502 Matrice tridiagonale

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003502]

Exercice 3503 Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$.

Correction ▼ [003503]

Exercice 3504 Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$.

Correction ▼ [003504]

Exercice 3505 Engees 93

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [003505]

Exercice 3506 Esem 91

Soit $C_{pq} = \begin{pmatrix} U_{pq} & (0) & U_{pq} \\ (0) & (0) & (0) \\ U_{pq} & (0) & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où U_{pq} est la matrice $p \times q$ dont tous les coefficients valent 1. Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$.

Correction ▼ [003506]

Exercice 3507 Matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ? [003507]

Exercice 3508 Sommes par lignes ou colonnes constantes

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que la somme des coefficients par ligne est constante $(= S)$. Montrer que S est une valeur propre de A.

Même question avec la somme des coefficients par colonne. [003508]

Exercice 3509 Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall\, i,j,\ m_{ij} \geqslant 0 \\ \forall\, i,\ m_{i,1}+m_{i,2}+\cdots+m_{i,n} = 1. \end{cases}$ (*matrice stochastique*)

1. Montrer que 1 est valeur propre de M.
2. Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ (si $(x_1,\dots,x_n) \in (x^2+1)^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module). Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

[003509]

Exercice 3510 $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X^2-1)P''+(2X+1)P'$.

1. Chercher la matrice de u dans la base canonique de $K_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Correction ▼ [003510]

Exercice 3511 $(X-a)P'$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto (X-a)P'$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u. [003511]

Exercice 3512 $X(X-1)P'-2nXP$

Soit $E = K_{2n}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X(X-1)P'-2nXP$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003512]

Exercice 3513 X^3P mod $(X-a)(X-b)(X-c)$

Soient $\alpha,\beta,\gamma \in K$ distincts, et $\varphi : K_2[X] \to K_2[X], P \mapsto R$ où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ.

Correction ▼ [003513]

Exercice 3514 $P(2-X)$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(2-X)$.

Correction ▼ [003514]

Exercice 3515 $P(X+1)-P'$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\theta : K[X] \to K[X], P \mapsto P(X+1)-P'$.

Correction ▼ [003515]

Exercice 3516 Eivp 91

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ qui à P associe $(X-a)P'+P-P(a)$. Donner la matrice de f dans la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Chercher $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et les éléments propres de f.

Correction ▼ [003516]

Exercice 3517 $\operatorname{tr}(A)M+\operatorname{tr}(M)A$

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. L'endomorphisme f de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ défini par $f(M) = \operatorname{tr}(A)M+\operatorname{tr}(M)A$ est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003517]

Exercice 3518 Étude d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & (0) \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des réels positifs ou nuls, avec $a_1 a_n > 0$.

1. Quel est le polynôme caractérique de A ?
2. Montrer que A admet une unique valeur propre $r > 0$ et que l'on a $r < 1 + \max(a_1, \dots, a_n)$.
3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant r$ et $|\lambda| = r \Rightarrow \lambda = r$.
4. Montrer qu'il existe un entier k tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs.

Correction ▼ [003518]

40.3 Espaces fonctionnels

Exercice 3519 $f \mapsto f(2x)$

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues tq $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty\}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ et $u : E \to E, f \mapsto f \circ \varphi$.
Montrer que u n'a pas de valeurs propres (si $u(f) = \lambda f$, étudier les limites de f en 0 ou $\pm\infty$). [003519]

Exercice 3520 Ensi Physique P 94

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = f(x+1)$. Trouver les valeurs propres de T.

Correction ▼ [003520]

Exercice 3521 Équation intégrale

Soit $E = \mathscr{C}([0, +\infty[\to \mathbb{R})$ et $u : E \to E, f \mapsto \tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction ▼ [003521]

Exercice 3522 Endomorphisme sur les suites

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}.$$

Quelles sont les valeurs propres de f ?

Correction ▼ [003522]

Exercice 3523 Opérateur intégral

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $f : E \to E, u\tilde{u}$ avec $\tilde{u}(x) = \int_{t=0}^{1} \min(x,t) u(t)\,dt$.
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Correction ▼ [003523]

40.4 Polynômes caractéristique

Exercice 3524 Formules pour une matrice 3×3

Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\chi_A(\lambda)=-\lambda^3+(\text{tr}A)\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda+\det(A)$.
2. Soit λ une valeur propre de A et L_1,L_2 deux lignes non proportionnelles de $A-\lambda I$ (s'il en existe). On calcule $L=L_1\wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X={}^tL$. Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

[003524]

Exercice 3525 Recherche de vecteurs propres pour une valeur propre simple

Soit $A\in\mathscr{M}_n(K)$ et $\lambda\in K$ une valeur propre de A telle que $\text{rg}(A-\lambda I)=n-1$.

1. Quelle est la dimension du sous espace propre E_λ ?
2. Montrer que les colonnes de ${}^t\text{com}(A-\lambda I)$ engendrent E_λ.
3. Exemple : diagonaliser $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003525]

Exercice 3526 Éléments propres de C^tC

Soit $C=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M=C^tC$.

1. Chercher le rang de M.
2. En déduire le polynôme caractéristique de M.
3. M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003526]

Exercice 3527 Ensi Chimie P 94

Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}=\frac{i}{j}$. A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003527]

Exercice 3528 Ensi Chimie P 93

On considère le polynôme défini par : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ P_n(x)=x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i x^i$ avec $\alpha_0>0$ et $\alpha_i\geqslant 0$ pour $1\leqslant i\leqslant n-1$.

1. Montrer qu'il existe une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ pour P_n.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0&\dots&0\\2&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&&\ddots&1\\n&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$. Montrer que A admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Correction ▼ [003528]

Exercice 3529 Ensi Physique 93

Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in (x^2+1)$. Calculer $\Delta_n = \det(I+(x_iy_j))$.

Correction ▼ [003529]

Exercice 3530 Centrale MP 2000

On considère la matrice de $M_n((x^2+1))$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq b$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\frac{(-1)^n}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
2. Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

Correction ▼ [003530]

Exercice 3531 Centrale MP 2000

Soit $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A_n$.
2. Calculer χ_A le polynôme caractéristique de A.
3. On suppose $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$. Montrer que A_n est diagonalisable $\Big($on pourra utiliser $\chi_A(t)/\prod_{i=1}^n(a_i-t)\Big)$.
4. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ et, pour tout i, $b_i > 0$?

Correction ▼ [003531]

Exercice 3532 Polynômes caractéristiques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A.

Correction ▼ [003532]

Exercice 3533 Matrice compagnon

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in K_n[X]$. La matrice compagnon de P est $M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit E un K-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathscr{B}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. En déduire que $P(M) = 0$.

[003533]

Exercice 3534 Matexo

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n((x^2+1))$. Montrer que $\operatorname{spec}(A) \cap \operatorname{spec}(B) = \varnothing$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Application : Soient A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur popre commune. [003534]

Exercice 3535 Matrices à spectres disjoints

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$. Montrer l'équivalence entre :
(a) : $\forall C \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$, il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$ tel que $AX - XB = C$.
(b) : $\forall X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$ on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$.
(c) : $\chi_B(A)$ est inversible.
(d) : A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Correction ▼ [003535]

Exercice 3536 AB et BA ont même polynôme caractéristique

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
3. Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M, N, P \in \mathscr{M}_{2n}(K))$.
   Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

[003536]

Exercice 3537 $\det(I + A\overline{A}) \geqslant 0$

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$.

1. Soit $\lambda \in (x^2+1)$ une valeur propre non nulle de $A\overline{A}$, et X un vecteur propre associé. Montrer que $A\overline{X}$ est aussi vecteur propre de $A\overline{A}$.
2. Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}^+$, montrer que X et $A\overline{X}$ sont linéairement indépendants.
3. En déduire que $\det(I + A\overline{A}) \in \mathbb{R}^+$.

[003537]

Exercice 3538 Centrale PC 1999

Soit l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$. Calculer sa trace par un moyen simple.

Correction ▼ [003538]

Exercice 3539 Multiplicité d'une valeur propre

Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Montrer que la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u est égale au nombre de facteurs invariants de u ayant λ pour racine. [003539]

Exercice 3540 Fermat pour la trace, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit p premier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod p$.

Correction ▼ [003540]

40.5 Polynômes annulateur

Exercice 3541 Matrice bitriangulaire

Donner une CNS sur $a, b \in (x^2+1)$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction ▼ [003541]

Exercice 3542 $A^2 = A$ et $tr(A) = 0$

Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. [003542]

Exercice 3543 Matexo

Soient E un ev de dimension finie sur (x^2+1) et u un endomorphisme de E.
On suppose que $u^3 = u^2, u \neq \mathrm{id}, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.

1. Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.
2. Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u.
3. Montrer que u *n'est pas* diagonalisable.
4. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.
5. Monter que $u|_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$ est l'identité.

[003543]

Exercice 3544 INT gestion 94

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$.
2. Calculer $(A - xI)({}^tA - xI)$ et en déduire $\chi_A(x)$.
3. Montrer que A est (x^2+1)-diagonalisable.

Correction ▼ [003544]

Exercice 3545 $X^n P(1/X)$

Soit $E = K_n[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X^n P(1/X)$.

1. Déterminer $u \circ u$. En déduire que u est diagonalisable.
2. Donner une base de vecteurs propres de u.

[003545]

Exercice 3546 TPE 93

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer e^A. ($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$)
Correction ▼ [003546]

Exercice 3547 Ensi Physique 93

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Correction ▼ [003547]

Exercice 3548 u^2 diagonalisable

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable. [003548]

Exercice 3549 Ensi PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ inversible diagonalisable et $B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Correction ▼ [003549]

Exercice 3550 Ensi P 90

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Correction ▼ [003550]

Exercice 3551 $A^3 = A + I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Correction ▼ [003551]

Exercice 3552 Mines-Ponts PC 1999

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} A$ est pair. [003552]

Exercice 3553 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer qu'alors on a $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Correction ▼ [003553]

Exercice 3554 $A^p = I$ et $\mathrm{spec}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Correction ▼ [003554]

Exercice 3555 $P(u) = \sum P(\lambda_i) u_i$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'il existe des endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
2. Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que pour tout $P \in K[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$. Montrer que u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

[003555]

Exercice 3556 Mines PSI 1998

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f.

Correction ▼ [003556]

Exercice 3557 Endomorphismes anticomutant (Centrale MP 2003)

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ ($p \geqslant 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall\, k,\ u_k^2 = -\mathrm{id}_E, \quad \forall\, k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.

2. Montrer que n est pair.
3. Donner le spectre de chaque u_k.
4. Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k.
5. Calculer $\det(u_k)$.

Correction ▼ [003557]

Exercice 3558 Ensi PC 1999

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.

1. Quelle relation y a-t-il entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$? Montrer que $2\operatorname{rg} u \leqslant \dim E$.
2. On suppose ici $\dim E = 4$ et $\operatorname{rg} u = 2$. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ de E telle que : $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $u(\vec{e}_2) = \vec{0}$, $u(\vec{e}_3) = \vec{e}_4$, $u(\vec{e}_4) = \vec{0}$.
3. On suppose $\dim E = n$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

[003558]

Exercice 3559 Réduction de M tq $M^3 = I$

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ? (On vérifiera que ce sont effectivement des valeurs propres de M)
2. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

[003559]

Exercice 3560 Centrale PSI 1998

Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1. Cas particulier, $n = 3$, $\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
2. Cas général.
   (a) Que peut-on dire de $\operatorname{tr}(u)$ et $\operatorname{tr}(v)$?
   (b) Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par h.
   (c) Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (d) Quel est le polynôme minimal de u ?

Correction ▼ [003560]

Exercice 3561 Indépendance du polynôme minimal par rapport au corps

Soient $K \subset L$ deux corps et $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On note $\mu_K(A)$ et $\mu_L(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans K ou dans L. Montrer que ces polynômes sont égaux. [003561]

Exercice 3562 Polynôme minimal et caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Montrer que χ_A et μ_A ont les mêmes facteurs irréductibles. [003562]

Exercice 3563 X MP* 2004

Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $(P(A)=0) \Rightarrow (\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Correction ▼ [003563]

Exercice 3564 TPE MP 2005

Soient $A,B,C \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telles que $AC = CB$ et $\mathrm{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Correction ▼ [003564]

Exercice 3565 Polynôme minimal imposé, Centrale MP 2005

Le polynôme $X^4+X^3+2X^2+X+1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003565]

Exercice 3566 $\mathrm{Ker} u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$, Polytechnique MP* 2006

Soit E un K-ev de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P.

1. Si $p = 0$, que dire de u ?
2. Si $p = 1$, montrer que $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker} u$.
3. Dans le cas général, montrer que $E = \mathrm{Ker} u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

Correction ▼ [003566]

40.6 Endomorphismes de composition

Exercice 3567 Équation $AM = \lambda M$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que $AM = \lambda M$. [003567]

Exercice 3568 $v \mapsto v \circ u$ (Centrale MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathscr{L}(E)$ associe $v \circ u$.

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u est diagonalisable)...
   (a) en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u.
   (b) en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u.

Correction ▼ [003568]

Exercice 3569 Matexo

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, (F,G) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G. Soit $E_p = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ? [003569]

Exercice 3570 $f \mapsto p \circ f \circ p$

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection et $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto p \circ f \circ p$.
Déterminer les éléments propres de Φ.

Correction ▼ [003570]

Exercice 3571 $f \mapsto u \circ f$ et $f \mapsto f \circ u$

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
On considère les applications$\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ $\varphi : f \mapsto u \circ f$ $\psi : f \mapsto f \circ u$

1. Montrer que φ et ψ sont diagonalisables.
2. Montrer que $\varphi - \psi$ est diagonalisable.

[003571]

Exercice 3572 $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}$

Soient u, v deux endomorphisme d'un espace vectoriel E non nul tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$.

1. Simplifier $u^k \circ v - v \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P \in K[X]$.
2. Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Correction ▼ [003572]

Exercice 3573 Ensi PC 1999

Soit E un ev réel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$).

[003573]

Exercice 3574 X MP* 2001

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur K) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Correction ▼ [003574]

Exercice 3575 $\frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$ (Mines MP 2003)

Soit E un espace vectoriel de dimension n finie, p un projecteur de rang r et $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), u \mapsto \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$.

1. Est-ce que φ est diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de φ et les dimensions des sous-espaces propres.

Correction ▼ [003575]

Exercice 3576 Crochet de Lie (Ens Cachan MP* 2003)

Soit $\Phi : \mathscr{M}_n((x^2+1)^)) \to \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$ un automorphisme d'ev tel que : $\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$, $\Phi([A, B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$ où $[X, Y] = XY - YX$. Montrer : $\forall\, D \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^))$, ($D$ est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\Phi(D)$ est diagonalisable).

Indication : considérer $\phi_D : X \mapsto [D, X]$ et montrer que (D est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (ϕ_D est diagonalisable).

Correction ▼ [003576]

40.7 Similitude

Exercice 3577 Matrices réelles semblables sur (x^2+1)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur (x^2+1) : Il existe $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} P + iQ \in GL_n((x^2+1)^)) \\ (P+iQ)A = B(P+iQ). \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $(P + \lambda Q)A = B(P + \lambda Q)$.
2. En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

[003577]

Exercice 3578 Trigonalisation de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3. Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de φ dans cette base.
5. Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.

Correction ▼ [003578]

Exercice 3579 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des projecteurs $p_1, \dots, p_k \in \mathscr{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que : $\begin{cases} u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k \\ \forall\, i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0. \end{cases}$ [003579]

Exercice 3580 A^3 est semblable à A^4

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_3((x^2+1)^)$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :

1. A a 3 valeurs propres distinctes.
2. A a 2 valeurs propres distinctes
3. A a une seule valeur propre.

Correction ▼ [003580]

Exercice 3581 Décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer qu'il existe deux matrices D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$. [003581]

Exercice 3582 M et ${}^tM$ sont semblables

Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée. En déduire que pour toute $M \in \mathscr{M}_n(K)$ les matrices M et ${}^tM$ sont semblables. [003582]

Exercice 3583 Réduction de Jordan (Mines MP 2003)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})) = 2$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003583]

Exercice 3584 A et $2A$ sont semblables

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.

Correction ▼ [003584]

40.8 Usage de la réduction

Exercice 3585 Ensi PC 1999

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n.
2. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.
3. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Correction ▼ [003585]

Exercice 3586 Puissances de A

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
3. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Correction ▼ [003586]

Exercice 3587 Suites récurrentes linéaires

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Correction ▼ [003587]

Exercice 3588 Centrale P' 1996

Soit f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Que dire de E et f ?
2. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Correction ▼ [003588]

Exercice 3589 Chimie P' 1996

Soit (M_n) une suite de points dans le plan, de coordonnées (x_n, y_n) définies par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 4y_n. \end{cases}$$

1. Montrer que, quelque soit M_0, les points M_n sont alignés.
2. Étudier la suite (M_n) quand n tend vers l'infini.
3. Quelle est la limite de y_n/x_n (utiliser une méthode géométrique) ?

Correction ▼ [003589]

Exercice 3590 Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

1. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
   (b) Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A.

[003590]

Exercice 3591 $XY = YX = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2(K)$ telles que $XY = YX = A$.

Correction ▼ [003591]

Exercice 3592 Racine carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Correction ▼ [003592]

Exercice 3593 Ensi Physique 93

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B différente de A et $-A$ telle que $B^2 = A$.

Correction ▼ [003593]

Exercice 3594 Esigelec 91

Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003594]

Exercice 3595 Centrale MP 2000

Si $A \in M_n((x^2+1)^)$, on note $C(A)$ le commutant de A.

1. Pour $n = 2$, montrer que $C(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $C(A)$ est de dimension $\geqslant n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Correction ▼ [003595]

Exercice 3596 Ulm MP* 2001

En se déplaçant uniquement sur les arêtes d'un cube de côté 1, combien y a-t-il de chemins de longueur n pour aller d'un point à un autre ?

Correction ▼ [003596]

40.9 Réduction par blocs

Exercice 3597 Matrice bloc

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N}(K)$.

1. Comparer les valeurs propres de A et M.
2. Soit $P \in K[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
3. A quelle condition sur A, M est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003597]

Exercice 3598 Ensi P 90

Soit $M \in \mathcal{M}_n((x^2+1)^))$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}((x^2+1)^))$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [003598]

Exercice 3599 Matrice bloc

Soit $A \in GL_n((x^2+1)^))$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}((x^2+1)^))$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est. (Chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A)

Correction ▼ [003599]

Exercice 3600 Matrice bloc

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p.

Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m. Montrer que si $p > n-m$, alors λ est valeur propre de A.

[003600]

Exercice 3601 Réduction par blocs (Centrale MP 2003)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{Spec}(B)$ et fonction de $\mathrm{Spec}(A)$.

Correction ▼ [003601]

Exercice 3602 $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty$ (Mines MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Représenter dans un plan l'ensemble des couples (a,b) tels que $A^m \to 0$ lorsque $m \to \infty -$.

Correction ▼ [003602]

40.10 Image et noyau

Exercice 3603 Chimie P 1996

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$? [003603]

Exercice 3604 u diagonalisable $\Rightarrow Ker(u-\lambda\mathrm{id}) + Im(u-\lambda\mathrm{id})$ est directe

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Pour $\lambda \in \mathrm{spec}(u)$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id})$ et $F_\lambda = \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})$. Montrer que $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$. [003604]

Exercice 3605 $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = E$.

Correction ▼ [003605]

Exercice 3606 $rg(f - \lambda \mathrm{id})$

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in (x^2+1)$ on a $rg(f - \lambda \mathrm{id}) = rg(f - \lambda \mathrm{id})^2$. [003606]

Exercice 3607 Nombre de noyaux et d'images

Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathscr{K} = \{\mathrm{Ker}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ et $\mathscr{I} = \{\mathrm{Im}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Correction ▼ [003607]

Exercice 3608 $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\dim(\mathrm{Ker} f^2) = 2\dim(\mathrm{Ker} f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d.

Correction ▼ [003608]

40.11 Sous-espaces stables

Exercice 3609 Droites et hyperplans stables

Soit E un (x^2+1)-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.
2. Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})$ où λ est une valeur propre de u).
3. Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-ev.

[003609]

Exercice 3610 Plan stable pour une valeur propre non réelle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M.

1. Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M.
2. Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $(x^2+1)^n$.
3. Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.

[003610]

Exercice 3611 Plans stables

Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in K_2[x]$ non nul tel que $F \subset \mathrm{Ker} P(f)$.
2. Réciproquement, si $P \in K_2[x]$ est irréductible, montrer que $\mathrm{Ker} P(f)$ contient un plan stable par f.

3. Si $K=\mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

[003611]

Exercice 3612 Recherche de sev stables

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sev de $\mathbb{R}^3$ stables pour l'endomorphisme associé à A.
2. Quelles sont les matrices réelles commutant avec A ?

Correction ▼ [003612]

Exercice 3613 u diagonalisable $\Rightarrow$ diagonalisable dans un sev stable

Soit E un K-ev de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que si F est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

[003613]

Exercice 3614 Plan affine stable

Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $H: x+2y+3z=1$ un plan *affine* de E. Montrer que si H est stable par $f\in\mathscr{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f.

Correction ▼ [003614]

Exercice 3615 Endomorphisme cyclique

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que $f_{|F}$ est aussi cyclique. [003615]

Exercice 3616 Endomorphismes semi-simples.

Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f. Montrer qu'un endomorphisme d'un (x^2+1)-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable. [003616]

Exercice 3617 χ_u irréductible

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n sur le corps K. Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur K.

Correction ▼ [003617]

Exercice 3618 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f. Que peut-on dire de f ? Réciproque ?

Correction ▼ [003618]

Exercice 3619 Sous-espaces stables (Centrale MP 2003)

Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Correction ▼ [003619]

40.12 Trigonalisation

Exercice 3620 $AB = 0$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables. [003620]

Exercice 3621 Produit de matrices nilpotentes

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotentes et commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = 0$. [003621]

Exercice 3622 Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\text{tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [003622]

Exercice 3623 Mines MP 2003

Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers $u \in \mathscr{L}(E)$.

u est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [003623]

Exercice 3624 Mines-Ponts MP 2005

On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n. Soient α, β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M. Montrer que $\dim(\text{Ker}M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

Correction ▼ [003624]

41 Dualité

K désigne un corps de caractéristique nulle.

Exercice 3625 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+y-z$, $f_2(\vec{x}) = x-y+z$, $f_3(\vec{x}) = x+y+z$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

[003625]

Exercice 3626 Base de $(K^3)^*$

Dans K^3 on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x+2y+3z$, $f_2(\vec{x}) = 2x+3y+4z$, $f_3(\vec{x}) = 3x+4y+6z$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(K^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003626]

Exercice 3627 Base de $(K^n)^*$

Pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ on pose $f_i(\vec{x}) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(\vec{x}) = x_n + x_1$. Déterminer si $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $(K^n)^*$ et, le cas échéant, déterminer la base duale.

Correction ▼ [003627]

Exercice 3628 Bases duale des polynômes

Soit $E = K_n[X]$. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale lorsque ...

1. $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0,\dots,x_n$ sont des scalaires distincts.
2. $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.
3. $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ où $x_0,\dots,x_n$ sont des scalaires quelconques. (Ne pas chercher la base duale pour cet exemple)

[003628]

Exercice 3629 Base duale des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :

$$\phi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(x_i); \qquad \psi_i : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P'(x_i)$$

1. Montrer que $(\phi_1,\dots,\phi_n,\psi_1,\dots,\psi_n)$ est une base de E^*.
2. Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

Correction ▼ [003629]

Exercice 3630 Intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\,dt$.

1. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
2. Trouver la base duale.

Correction ▼ [003630]

Exercice 3631 Évaluations et intégrale

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a \;:\; P \mapsto P(a), \quad f_b \;:\; P \mapsto P(b), \quad f_c \;:\; P \mapsto P(c), \quad \varphi \;:\; P \mapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\,dt.$$

Étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Correction ▼ [003631]

Exercice 3632 Base duale de $(1, X, X(X-1), \dots)$

Soit $E = K_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$ pour $i \geqslant 1$, et $f_i : P \mapsto P(i)$.

1. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E et $\mathscr{B} = (f_0,\dots,f_n)$ est une base de E^*.
2. Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathscr{B}$. (On pourra utiliser les polynômes : $Q_i = \prod_{1\leqslant j\leqslant n; j\neq i}(X-j)$)
3. Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.

Correction ▼ [003632]

Exercice 3633 Base duale de $((X-a)^k(X-b)^{n-k})$

Soit $E = K_n[X]$ et $a,b \in K$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

1. Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E.
2. On suppose $n = 2$ et on prend comme base de E^* : $\mathscr{B} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \frac{a+b}{2}$. Exprimer les formes linéaires (P_0^*, P_1^*, P_2^*) dans $\mathscr{B}$.

Correction ▼ [003633]

Exercice 3634 Formes linéaires liées

Soient $f_1,\dots,f_n$ des formes linéaires sur K^n telles qu'il existe $\vec{x}\in K^n$ non nul tel que $f_1(\vec{x})=\dots=f_n(\vec{x})=0$. Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est liée. [003634]

Exercice 3635 $(P(X),\dots,P(X+n))$ est une base des polynômes

Soit $E=K_n[X]$, $Q\in E$ de degré n et $Q_i=Q(X+i)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$.

1. Montrer que $(Q,Q',Q'',\dots,Q^{(n)})$ est libre.
2. Montrer que toute forme linéaire sur E peut se mettre sous la forme :
   $f:P\mapsto \alpha_0 P(0)+\alpha_1 P'(0)+\dots+\alpha_n P^{(n)}(0)$.
3. Soit $f\in E^*$ telle que $f(Q_0)=\dots=f(Q_n)=0$. Montrer que $f=0$.
   (considérer le polynôme $P=\alpha_0 Q+\dots+\alpha_n Q^{(n)}$)
4. Montrer que $(Q_0,\dots,Q_n)$ est une base de E.

[003635]

Exercice 3636 $\varphi((X-a)P)=0$

Soit $E=K_n[X]$. Soit $\varphi\in E^*$ telle que : $\forall\ P\in K_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P)=0$.
Montrer qu'il existe $\lambda\in K$ tel que : $\forall\ P\in E,\ \varphi(P)=\lambda P(a)$.

[003636]

Exercice 3637 Forme linéaire sur les polynômes

Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\Phi(1)=0$, $\Phi(X)=1$ et $\Phi(P)=0$ pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0)=P(1)=0$. [003637]

Exercice 3638 Système unisolvent

Soient $f_1,\dots,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ n fonctions linéairement indépendantes. On pose $E=\operatorname{vect}(f_1,\dots,f_n)$ et pour $x\in\mathbb{R}$, $\delta_x:E\to\mathbb{R}, f\mapsto f(x)$.

1. Montrer que la famille $(\delta_x)_{x\in\mathbb{R}}$ engendre E^*.
2. En déduire qu'il existe $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ tels que $\det M\neq 0$ où M est la matrice de terme général $f_i(x_j)$.

[003638]

Exercice 3639 Polynômes à deux variables

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale si elle est de la forme : $f(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$, la somme portant sur un nombre fini de termes. Le degré de f est alors $\max(i+j$ tq $a_{ij}\neq 0)$.
On note E_k l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1. Montrer que E_k est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.
2. Soient $A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1)$. Montrer que les formes linéaires $f\mapsto f(A)$, $f\mapsto f(B)$, $f\mapsto f(C)$ constituent une base de E_1^*.
3. Chercher de même une base de E_2^*.
4. Soit T le triangle plein ABC et $f\in E_1$. Montrer que $\int\int_T f(x,y)\,dxdy=\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.
5. Chercher une formule analogue pour $f\in E_2$.

Correction ▼ [003639]

Exercice 3640 Polynômes trigonométriques

On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
Soit E_n l'espace engendré par la famille $\mathscr{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1. Montrer que pour $k \geqslant 1$, (f_k, g_k) est libre.
2. Soit $\varphi : E_n \to E_n, f \mapsto f''$. Chercher les sous-espaces propres de φ. En déduire que $\mathscr{F}_n$ est libre.
3. On note $a_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\varphi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a_k)$.
   Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de E_n^*. (On utilisera la fonction $f : x \mapsto \prod_{k=1}^{n}(\cos x - \cos a_k)$)
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = \frac{2k\pi}{N}$ et $\psi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(b_k)$. Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leqslant 2n+1$, et engendre E_n^* si et seulement si $N \geqslant 2n+1$.

Correction ▼ [003640]

Exercice 3641 trace sur $\mathscr{M}_n(K)$

Soit $E = \mathscr{M}_n(K)$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on note $\phi_A : E \to K, M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

1. Montrer que $E^* = \{\phi_A \text{ tq } A \in E\}$.
2. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathscr{S}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{A}\}$ et $\mathscr{A}^\circ = \{\phi_A \text{ tq } A \in \mathscr{S}\}$.

[003641]

Exercice 3642 Suites de Fibonacci

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.
2. Soient $f_0 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_0$ et $f_1 : E \to \mathbb{R}, u \mapsto u_1$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Correction ▼ [003642]

Exercice 3643 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et $f, f_1, \dots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_p$. [003643]

Exercice 3644 Combinaison de formes linéaires

Soit E un K-ev de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$. On considère l'application :

$$\Phi : E \to K^p, \vec{x} \mapsto \Big(f_1(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x})\Big)$$

Montrer que Φ est surjective si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. [003644]

Exercice 3645 Orthogonaux d'une somme directe

Soit E un K-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.

1. Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.
2. Montrer que F° est naturellement isomorphe à G^* et G° à F^*.

[003645]

Exercice 3646 $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \neq 0$ et $g(\vec{u}) \neq 0$. [003646]

Exercice 3647 p formes linéaires

Soit E un K-ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1,\dots,f_p$ telles que :

$$\forall\,\vec{x}\in E,\ (f_1(\vec{x})=\cdots=f_p(\vec{x})=0)\Rightarrow(\vec{x}=\vec{0}).$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p. [003647]

Exercice 3648 $\det(f_i(u_j))\neq 0$

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\in E$ et $f_1,\dots,f_n\in E^*$.
Soit M la matrice de terme général $f_i(\vec{u}_j)$. Montrer que si $\det M\neq 0$, alors $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ est une base de E et $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de E^*. [003648]

Exercice 3649 e_n^* imposé

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{F}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1})$ une famille libre de E et $f\in E^*\setminus\{0\}$. Montrer qu'on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ telle que $f=e_n^*$ si et seulement si $f(\vec{e}_1)=\cdots=f(\vec{e}_{n-1})=0$.
Y a-t-il unicité de $\vec{e}_n$? [003649]

Exercice 3650 Modification élémentaire

Soit E un K-ev de dimension finie n, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, et $\mathscr{B}'=(\vec{e}_1{}',\dots,\vec{e}_n{}')$ déduite de $\mathscr{B}$ par une opération élémentaire (échange de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul, addition à un vecteur d'un multiple d'un autre).
Étudier comment on passe de la base duale $\mathscr{B}^*$ à $\mathscr{B}'^*$ en fonction de l'opération effectuée.
Correction ▼ [003650]

Exercice 3651 Séparation

Soit E un K-ev de dimension finie.

1. Soient $\vec{x},\vec{y}\in E$ avec $\vec{x}\neq\vec{y}$. Montrer qu'il existe $f\in E^*$ telle que $f(\vec{x})\neq f(\vec{y})$.
2. Soit V un sev de E^* ayant la propriété : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\ \vec{x}\neq\vec{y}\Rightarrow\exists\,f\in V$ tq $f(\vec{x})\neq f(\vec{y})$.
   Montrer que $V=E^*$.

[003651]

42 Sommes directes

Exercice 3652

Soit $E=K_3[X]$, $F=\{P\in E$ tq $P(0)=P(1)=P(2)=0\}$, $G=\{P\in E$ tq $P(1)=P(2)=P(3)=0\}$, et $H=\{P\in E$ tq $P(X)=P(-X)\}$.

1. Montrer que $F\oplus G=\{P\in E$ tq $P(1)=P(2)=0\}$.
2. Montrer que $F\oplus G\oplus H=E$.

[003652]

Exercice 3653 Caractérisation des sommes directes

Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1+F_2+F_3$ est directe si et seulement si : $F_1\cap F_2=\{\vec{0}\}$ et $(F_1+F_2)\cap F_3=\{\vec{0}\}$.
Généraliser.

[003653]

Exercice 3654 Somme directe dans $E\Rightarrow$ somme directe dans $\mathscr{L}(E)$

Soit E un K-ev de dimension finie n et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
On note $F_i = \{u \in \mathscr{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(\vec{e}_i)\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i.
2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathscr{L}(E)$.

[003654]

Exercice 3655 Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev

Soit E un K-ev de dimension finie, F_1, F_2, ..., F_n des sev de E tels que $F_1 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$. [003655]

Exercice 3656 Somme et intersection

Soit E un K-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
2. Comparer F et G.

[003656]

Exercice 3657 Somme directe d'endomorphismes

Soit E un K-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E_1), \dots, u_n \in \mathscr{L}(E_n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|F_i} = u_i$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u_n)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_n)$.

[003657]

Exercice 3658 Somme de projecteurs

Soit E un K-ev de dimension finie et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs tels que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_n)$.

[003658]

Exercice 3659 Projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f_1, \dots, f_n$ n applications linéaires toutes non nulles. On suppose que : $\forall\ (i,j) \in [[1,n]]^2,\ f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.
Correction ▼ [003659]

Cinquième partie
Algèbre bilinéaire

43 Produit scalaire

Exercice 3660 Produits scalaires ?

Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $(x,x') \mid (y,y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $(1,t) \mid (1,t)$, $t \in \mathbb{R}$).
2. $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mid (y_1, \dots, y_n) = a \sum_i x_i y_i + b \sum_{i \neq j} x_i y_j$ $\left(\text{On montrera que } (\sum x_i)^2 \leqslant n \sum x_i^2\right)$.

3. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q)=\sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Correction ▼ [003660]

Exercice 3661 Base de Schmidt

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $(P \mid Q)=\int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

Correction ▼ [003661]

Exercice 3662 Base de Schmidt

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P \mid Q)=\sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E.

Correction ▼ [003662]

Exercice 3663 Inversion

Soit E un espace vectoriel euclidien. On pose pour $\vec{x}\neq\vec{0}$: $i(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que i est une involution et conserve les angles de vecteurs.
2. Vérifier que : $\forall\, \vec{x},\vec{y}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x})-i(\vec{y})\|=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
3. Déterminer l'image par i :
   (a) d'un hyperplan affine ne passant pas par $\vec{0}$.
   (b) d'une sphère passant par $\vec{0}$.
   (c) d'une sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction ▼ [003663]

Exercice 3664 Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien.

1. Pour $\vec{x}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$. Montrer que : $\forall\, \vec{x},\vec{y}\in E\setminus\{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x})-f(\vec{y})\|=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
2. Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in E$. Montrer que $\|\vec{a}-\vec{c}\|\,\|\vec{b}-\vec{d}\|\leqslant\|\vec{a}-\vec{b}\|\,\|\vec{c}-\vec{d}\|+\|\vec{b}-\vec{c}\|\,\|\vec{a}-\vec{d}\|$.
   Indication : se ramener au cas $\vec{a}=\vec{0}$ et utiliser l'application f.

Correction ▼ [003664]

Exercice 3665 Calcul de distance

On munit $E=\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P=\sum_i a_iX^i$ et $Q=\sum_i b_iX^i$, $(P \mid Q)=\sum_i a_ib_i$.
Soit $H=\{P\in E \text{ tq } P(1)=0\}$.

1. Trouver une base orthonormale de H.
2. Calculer $d(X,H)$.

Correction ▼ [003665]

Exercice 3666 Expression analytique

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(\vec{e}_1,F)$.

Correction ▼ [003666]

Exercice 3667 Projection sur un hyperplan

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1+\dots+a_nx_n = 0\}$ où $a_1,\dots,a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Correction ▼ [003667]

Exercice 3668 Caractérisation des projections orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection. Montrer que :
p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow \forall\, \vec{x},\vec{y} \in E,\ (\vec{x} \mid p(\vec{y})) = (p(\vec{x}) \mid \vec{y})$
$\Leftrightarrow \forall\, \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$.
(Pour la deuxième caractérisation, considérer $\vec{x} \in (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ et faire un dessin) [003668]

Exercice 3669 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (de dimension éventuellement infinie) et $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ une famille orthonormée de E. On note $F = \operatorname{vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$.

1. Démontrer que $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^{\perp\perp} = F$ (on utilisera la projection associée aux $\vec{u}_i$).
2. Soit $\vec{x} \in E$. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{u}_i)^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2$. Quand a-t-on égalité ?
3. Application : Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *coefficients de Fourier de f* les réels :
$$c_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \qquad \text{et} \qquad s_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$
Démontrer l'inégalité de Bessel : $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \geqslant \frac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)^2+s_k(f)^2}{\pi}$.

[003669]

Exercice 3670 Composition de projecteurs

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.
[003670]

Exercice 3671 Projecteurs commutant

Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} \cap \operatorname{Im} q$ sont orthogonaux.

Correction ▼ [003671]

Exercice 3672 Caractérisation des bases orthonormales

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,\quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)^2$.

1. Démontrer que $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base orthonormale de E.
2. On remplace l'hypothèse : $\vec{e}_i$ unitaire par : $\dim E = n$.
   (a) Démontrer que $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in E,\ (\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)(\vec{y} \mid \vec{e}_i)$.
   (c) On note G la matrice de Gram de $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$. Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

Correction ▼ [003672]

Exercice 3673 Matrice de Gram

Soient $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E, et G leur matrice de Gram.

1. Montrer que $\mathrm{rg} G = \mathrm{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.
2. Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace $\vec{x}_k$ par $\vec{x}_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i \vec{x}_i$.
3. Soit $F = \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{x} \in E$. On note $d(\vec{x}, F) = \min(\|\vec{x} - \vec{y}\|, \vec{y} \in F)$.
   Montrer que $d(\vec{x}, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})}{\mathrm{Gram}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$.

[003673]

Exercice 3674 Gram$(u(e_i))$

Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E. On note G le déterminant de Gram. Montrer que $G(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)) = (\det u)^2 G(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. [003674]

Exercice 3675 Équation du second degré

Soient E espace vectoriel euclidien, $\vec{a} \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\alpha(\vec{x} \mid \vec{x}) + \beta(\vec{x} \mid \vec{a}) + \gamma = 0$.

Correction ▼ [003675]

Exercice 3676 Vecteur défini par ses produits scalaires

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.
Existe-t-il $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\ i,\ \int_{t=0}^{1} f(t) f_i(t)\, dt = 1$? [003676]

Exercice 3677 Décomposition QR

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.
2. Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs quelconques.
   Démontrer que $|\det_{(\vec{e}_i)}(\vec{u}_j)| \leqslant \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

[003677]

Exercice 3678 Coefficients diagonaux dans la méthode de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Montrer que $P_{ii} \times d(\vec{u}_i, \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1})) = 1$. [003678]

Exercice 3679 Coordonnées des vecteurs de Schmidt

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée déduite de $\mathscr{B}$ par la méthode de Schmidt.
On note G_n le déterminant de Gram de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, et $\Delta_{i,n}$ le cofacteur de $(\vec{u}_i \mid \vec{u}_n)$ dans G_n.
Montrer que $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1} G_n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,n} \vec{u}_i$.

Correction ▼ [003679]

Exercice 3680 $\det({}^tAA)$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det({}^tAA) \geqslant 0$. [003680]

Exercice 3681 Angles $> 2\pi/3$

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Existe-t-il trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ unitaires faisant entre eux deux à deux des angles strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$?

Correction ▼ [003681]

Exercice 3682 Polynômes orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

1. Démontrer que $(\mid)$ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i = i \\ \text{le coefficient dominant de } P_i \text{ est strictement positif} \\ \text{la famille } (P_i) \text{ est orthonormée.} \end{cases}$$

[003682]

Exercice 3683 Centrale PSI 1997

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que E, muni de $(\mid)$, est un espace euclidien.
2. Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ et $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de P ?
3. Soit $\Phi : x \mapsto \int_{t=0}^{1} P(t)t^x\,dt$. Montrer que Φ est une fonction rationnelle.
4. Trouver Φ à une constante multiplicative près.
5. En déduire les coefficients de P.
6. En déduire une base orthogonale de E.

Correction ▼ [003683]

Exercice 3684 Réduction en carrés d'une forme quadratique

Soient $f_1, \dots, f_p$ p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = n$.
En considérant le produit scalaire : $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})f_i(\vec{y})$, démontrer qu'il existe n formes linéaires $g_1, \dots, g_n$ telles que :

$$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{p} f_i(\vec{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i(\vec{x})^2.$$

Exemple : réduire $x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2$

Correction ▼ [003684]

Exercice 3685 Famille de vecteurs unitaires équidistants

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \vec{u}_i \text{ est unitaire} \\ \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \\ \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i) = \text{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i). \end{cases}$$

Démontrer que toute famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant les deux premières propriétés est libre. [003685]

Exercice 3686 Famille obtusangle

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\, i \neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) < 0$.

1. On suppose $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ libre. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la famille de Schmidt associée et M la matrice de passage de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ à $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Montrer que M est à coefficients positifs.

2. Dans le cas général, démontrer par récurrence sur n que $\mathrm{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) \geqslant n-1$.
3. Si $\mathrm{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) = n-1$, démontrer que toute famille de $n-1$ vecteurs extraite de $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

[003686]

Exercice 3687 $F+F^\perp \neq E$

Soit $E = \mathscr{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} fg(t)\,dt$, et $F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Correction ▼ [003687]

Exercice 3688 Forme linéaire sur les polynômes

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $(P \mid Q) = \int_{t=0}^{1} PQ(t)\,dt$.

1. Vérifier que c'est effectivement un produit scalaire.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$. Trouver le polynôme A tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (A \mid P)$.

Correction ▼ [003688]

Exercice 3689 Norme uniforme sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{t=-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$.
Montrer que $\sup\{|P(x)| \text{ tq } -1 \leqslant x \leqslant 1\} \leqslant 2\sqrt{2}$.
Indications : Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(a) = \int_{t=-1}^{1} P(t)P_a(t)\,dt$.
Calculer explicitement P_a, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction ▼ [003689]

Exercice 3690 Centrale MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \int_{[0,1]} fg + f'g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\limits_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

Correction ▼ [003690]

Exercice 3691 Polytechnique MP* 2000

Soit H un espace euclidien, $(y_j)_{j\in I}$ une famille de vecteurs de H telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall\, x \in H,\ A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in I} (x \mid y_j)^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

1. Montrer que $(y_j)_{j\in I}$ engendre H.
2. On choisit $H = \mathbb{R}^2$. Montrer que $y_1 = \binom{0}{1}$, $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $y_3 = y_2$ conviennent.
3. Si $A = B = 1$ et $\|y_j\| = 1$ pour tout j, montrer que $(y_j)_{j\in I}$ est une base orthonormale.
4. Si $A = B$, montrer que pour tout $x \in H$, $x = \frac{1}{A}\sum_{j\in I}(x \mid y_j)y_j$.

Correction ▼ [003691]

Exercice 3692 $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.

Correction ▼ [003692]

Exercice 3693 X MP* 2000

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. Trouver toutes les fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ continues telles que $u \perp v \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Correction ▼ [003693]

---

44 Espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3

Exercice 3694 Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \mid (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}$$
$$[\vec{t}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{u} + [\vec{u}, \vec{t}, \vec{w}]\vec{v} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t}.$$

[003694]

Exercice 3695 Division vectorielle

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs donnés, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$. On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.

Correction ▼ [003695]

Exercice 3696 $a \wedge b$, $b \wedge c$, $c \wedge a$ donnés

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ connaissant $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ et $\vec{w} = \vec{c} \wedge \vec{a}$ (calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$).

Correction ▼ [003696]

Exercice 3697 $f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Prouver que : $[f(\vec{u}), \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, f(\vec{v}), \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{w})] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\mathrm{tr}(f)$.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ telle que : $\forall\, \vec{u}, \vec{v}$, on a $f(\vec{u}) \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge f(\vec{v}) = g(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
3. Dans une *bond*, exprimer la matrice de g en fonction de celle de f.

Correction ▼ [003697]

Exercice 3698 Applications bilinéaires antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique.
Montrer qu'il existe $f \in E^*$ unique telle que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y},\ \phi(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

[003698]

Exercice 3699 Volume d'un parallélépipède

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On donne $\|\vec{u}\| = a$, $\|\vec{v}\| = b$, $\|\vec{w}\| = c$, $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha$, $\overline{(\vec{v},\vec{w})} \equiv \beta$, $\overline{(\vec{w},\vec{u})} \equiv \gamma$.
Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$?

Correction ▼ [003699]

Exercice 3700 Applications conservant le produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Trouver les applications $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

1. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.
2. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.

[003700]

Exercice 3701 Expression d'une rotation

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{u} \in E$ unitaire, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la rotation autour de $\vec{u}$ d'angle de mesure α.

1. Exprimer $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{x}$ et α.
2. On donne les coordonnées de $\vec{u}$ dans une base orthonormée : a,b,c. Calculer la matrice de f dans cette base.

Correction ▼ [003701]

Exercice 3702 Conjuguée d'une rotation

Soit ρ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $f \in \mathscr{O}(E)$. Reconnaître $f \circ \rho \circ f^{-1}$.
Application : Déterminer le centre de $\mathscr{O}^+(E)$. [003702]

Exercice 3703 Conjugaison dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$

Soient $f,g \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ ayant même polynôme caractéristique.
Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.
Si f et g sont positifs, a-t-on h positif ?

Correction ▼ [003703]

Exercice 3704 Décomposition des rotations

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une *bond* d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 E, et $f \in \mathscr{O}^+(E)$.

1. On suppose $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$. Montrer qu'il existe r,r' rotations autour de $\vec{j}$ et $\vec{i}$ telles que $r' \circ r = f$.
2. En déduire que tout $f \in \mathscr{O}^+(E)$ se décompose de deux manières sous la forme : $f = r'' \circ r' \circ r$ où r,r'' sont des rotations autour de $\vec{j}$ et r' est une rotation autour de $\vec{i}$.
3. Décomposer $(x,y,z) \mapsto (y,x,z)$ et $(x,y,z) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$.

Correction ▼ [003704]

Exercice 3705 Sous-groupes finis de $\mathscr{O}^+(3)$

Déterminer les sous-groupes de $\mathscr{O}^+(3)$ de cardinal 2,3, ou 4. [003705]

Exercice 3706 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{id}_E + f \in GL(E)$.
2. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1} \in \mathscr{O}^+(E)$ et $\mathrm{id} + g$ est inversible.
3. Réciproquement, soit $h \in \mathscr{O}^+(E)$ tq $\mathrm{id} + h$ soit inversible. Montrer qu'il existe f antisymétrique tel que $h = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$.

Correction ▼ [003706]

Exercice 3707 Applications antisymétriques

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice dans $\mathscr{B}$: $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconaître f.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.
3. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Correction ▼ [003707]

Exercice 3708 Exponentielle d'une application antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{a} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. On note $\alpha = \|\vec{a}\|$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$.

1. Vérifier que $f^3 = -\alpha^2 f$.
2. On pose $g(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\vec{x})}{k!}$. Simplifier $g(\vec{x})$ et en déduire que g est une rotation.

Correction ▼ [003708]

Exercice 3709 Matrice à trou

1. Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.
2. Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [003709]

Exercice 3710 Matrice circulante

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

Correction ▼ [003710]

Exercice 3711 Expressions analytiques

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x' = 2x + y + 2z \\ 3y' = 2x - 2y - z \\ 3z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x' = -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$

Correction ▼ [003711]

Exercice 3712 Ensi Physique 92

Déterminer la matrice de la rotation $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\mathscr{R}(\vec{u}) = \vec{u}$ avec $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\mathscr{R}(\vec{i}) = \vec{k}$. Donner son angle de rotation.

Correction ▼ [003712]

45 Formes quadratiques

Exercice 3713 Étude de signe

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :

1. $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.
3. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Correction ▼ [003713]

Exercice 3714 Ensi PC 1999

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice de produit scalaire ?

Correction ▼ [003714]

Exercice 3715 Calcul de signature

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Correction ▼ [003715]

Exercice 3716 Signature de ${}^tAA$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.
2. Déterminer sa signature en fonction de $\mathrm{rg}A$.

[003716]

Exercice 3717 Décomposition en carrés

Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_ix_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1} x_i\right)^2$. On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \dots + x_n)/(i+1)$.

Correction ▼ [003717]

Exercice 3718 Rang d'une décomposition en carrés

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\mathrm{rg}(f_1,\dots,f_p) \geqslant \mathrm{rg}(q)$. [003718]

Exercice 3719 Différentielle d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x},\vec{y})$. [003719]

Exercice 3720 $q(a)q(x) - f^2(a,x)$

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.
On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1. Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
2. Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
3. Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

Correction ▼ [003720]

Exercice 3721 $\mathrm{tr}(A^2)$

Soit pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature (indication : étudier les restrictions de q aux sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques). [003721]

Exercice 3722 Adjoint

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall\, x,y \in E,\ f(u(x),y) = f(x,v(y)).$$
On note $v = u^*$.
2. Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est un anti-isomorphisme involutif de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire tel que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ et $u^{**} = u$).

[003722]

Exercice 3723 Restriction d'une forme quadratique à un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et q une forme quadratique sur E de signature $(n-1,1)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $d \geqslant 1$.

1. On suppose qu'il existe $x \in H$ tel que $q(x) < 0$. Montrer que la signature de $q_{|H}$ est $(d-1,1)$.
2. On suppose que $q_{|H}$ est positive, quelle est sa signature ?

Correction ▼ [003723]

Exercice 3724 Mineurs principaux

Soit $n \geqslant 2$ et A une matrice réelle symétrique $n \times n$ représentant une forme quadratique q. On appelle mineurs principaux de A les déterminants :
$$\Delta_k(A) = \det\big((a_{i,j})_{i,j\leqslant k}\big).$$
On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, montrer que la signature de q est (r,s) où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1,\Delta_1,\dots,\Delta_n)$ et $r = n-s$.

Correction ▼ [003724]

Exercice 3725 Diagonale dominante

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On dit que A est à diagonale faiblement dominante si pour tout i on a $a_{ii} \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ et que A est à diagonale fortement dominante si pour tout i on a $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.
Montrer que si A est à diagonale fortement dominante alors A est définie positive et si A est à diagonale faiblement dominante alors A est positive.

Correction ▼ [003725]

Exercice 3726 Formes quadratiques de signature donnée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, on note :
$\mathrm{Quad}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E ;
$\mathrm{Quad}^*(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de rang n ;
$\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p,q).

1. Montrer que $\mathrm{Quad}^*(E)$ est dense dans $\mathrm{Quad}(E)$.
2. Montrer que si $p+q = n$ alors $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{Quad}(E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [003726]

Exercice 3727 $1/(\lambda_i+\lambda_j)$

1. Soit $f_1,\dots,f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues de carrés intégrables sur l'intervalle I. On pose $a_{i,j} = \int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive ssi la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.
2. En déduire que si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts alors la matrice de terme général $1/(\lambda_i+\lambda_j)$ est définie positive.

[003727]

Exercice 3728 Matrice des inverses

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous non nuls. On note A' la matrice de coefficient général $1/a_{i,j}$.

1. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques définies positives (examiner les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = n$).
2. Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques positives (examiner les cas $n = 2$, $n = 3$, $n = n$).

Correction ▼ [003728]

Exercice 3729 Centrale MP 2000

Soit S une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, symétrique définie positive. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $q : X \mapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ est définie négative.

Correction ▼ [003729]

Exercice 3730 Polytechnique MP* 2000

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique : $q(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x|a)^2$ où $\alpha > 0$, β réel et $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter de la signature et du rang de q.

Correction ▼ [003730]

Exercice 3731 Ensae MP* 2000

Soit q une forme quadratique non nulle sur $M_2((x^2+1)^)$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$. Déterminer q.

Correction ▼ [003731]

Exercice 3732 Déterminant de Gram, X MP* 2005

Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque, $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux familles de vecteurs de E et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive.
Montrer que $(\det[\phi(x_i,y_j)])^2 \leqslant \det[\phi(x_i,x_j)] \times \det[\phi(y_i,y_j)]$.

Correction ▼ [003732]

46 Transformations orthogonales

Exercice 3733 Isométries affines

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1. On suppose que f conserve le produit scalaire. Démontrer que f est linéaire.
2. On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in E,\ \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Démontrer que $f = f(\vec{0}) + g$, avec $g \in \mathscr{O}(E)$.

[003733]

Exercice 3734 Projection sur vect(u)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

1. Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur $\text{vect}(\vec{u})$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

[003734]

Exercice 3735 $\vec{x}+\lambda(\vec{x}\mid\vec{v})\vec{v}$

Soit $\vec{v}\in E\setminus\{\vec{0}\}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x}\in E$: $f(\vec{x})=\vec{x}+\lambda(\vec{x}\mid\vec{v})\vec{v}$.
Déterminer λ pour que $f\in\mathscr{O}(E)$. Reconnaître alors f.

Correction ▼ [003735]

Exercice 3736 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F,G deux sous-espaces de E tels que $F\perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F\circ s_G=s_G\circ s_F=s_{(F\oplus G)^\perp}$. [003736]

Exercice 3737 Composition de symétries

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F,G deux sous-espaces de E tels que $F\subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F\circ s_G=s_G\circ s_F=s_{F\oplus G^\perp}$. [003737]

Exercice 3738 Condition pour que deux symétries commutent

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient H,K deux hyperplans de E, et s_H, s_K les symétries associées. Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H=K$ ou $H^\perp\subset K$. [003738]

Exercice 3739 Similitudes

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\lambda>0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\,\vec{x}\in E,\ \|f(\vec{x})\|=\lambda\|\vec{x}\|$.

1. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\ (f(\vec{x})\mid f(\vec{y}))=\lambda^2(\vec{x}\mid\vec{y})$.
2. Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.
3. Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\ \vec{x}\perp\vec{y}\Rightarrow f(\vec{x})\perp f(\vec{y})$.

[003739]

Exercice 3740 Similitudes

On définit l'application $\varphi: A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\sum_{i,j}a_{i,j}^2$. Trouvez les matrices $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A on ait $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$.

Correction ▼ [003740]

Exercice 3741 Sous-espaces stables

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u\in\mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u. [003741]

Exercice 3742 Projection sur le sous-espace invariant

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u\in\mathscr{O}(E)$. On note $v=\mathrm{id}_E-u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}v=(\mathrm{Im}\,v)^\perp$.
2. Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}v$. Montrer que : $\forall\,\vec{x}\in E,\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}u^k(\vec{x})\to p(\vec{x})$ lorsque $m\to\infty$.

[003742]

Exercice 3743 Endomorphismes orthogonaux diagonalisables

Quels sont-ils ? [003743]

Exercice 3744 Valeurs propres d'une isométrie

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

1. On suppose n impair et $f \in \mathcal{O}^+(E)$. Montrer que 1 est valeur propre de f. (comparer $\det(f - \mathrm{id})$ et $\det(f^{-1} - \mathrm{id})$)
2. Que peut-on dire quand n est pair ?
3. Soit n quelconque, $f \in \mathcal{O}^-(E)$. Montrer que -1 est valeur propre de f.

[003744]

Exercice 3745 Caractérisation des symétries orthogonales

Soit $M \in \mathcal{O}(n)$.

1. Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si M est symétrique.
2. Dans ce cas, déterminer la base et la direction de cette symétrie en fonction des matrices $I+M$ et $I-M$.

[003745]

Exercice 3746 f orthogonal antisymétrique

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E \iff \forall\, \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) \perp \vec{x} \iff \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(\vec{x} \mid f(\vec{y})).$$

[003746]

Exercice 3747 Centre de O(E)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $\vec{u} \in H^\perp, \vec{u} \neq \vec{0}$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.
2. En déduire que f et s commutent si et seulement si $\vec{u}$ est vecteur propre de f.
3. Quel est le centre de $O(E)$?

[003747]

Exercice 3748 Nombre de réflexions nécéssaires pour engendrer une application donnée

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On note $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $p = \mathrm{codim}(F)$.

1. Montrer qu'on peut décomposer f en produit d'au plus p réflexions.
2. Inversement, si f est un produit de k réflexions, démontrer que $p \leqslant k$.
3. Application : trouver $f \in \mathcal{O}(E)$ qui se décompose en n réflexions et pas moins.

[003748]

Exercice 3749 Prolongement d'une transformation orthogonale

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to E$ une application orthogonale. Démontrer qu'on peut prolonger f en une application orthogonale de E dans E.
2. Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall\, i, j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) = (\vec{v}_i \mid \vec{v}_j)$.
   (a) Si $\sum \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}$, démontrer que $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

(b) En déduire qu'il existe $f \in \mathscr{O}(E)$ telle que : $\forall\, i,\ f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

[003749]

Exercice 3750 Action de $\mathscr{O}(E)$ sur les sous-espaces vectoriels

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. $(*)$ Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Correction ▼ [003750]

Exercice 3751 Transformations orthogonales sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que les applications $\begin{cases} \phi_P : A \longmapsto AP \\ \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP \end{cases}$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathscr{O}(n)$?

Correction ▼ [003751]

Exercice 3752 $A = \mathrm{com}(A)$

Quelles sont les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

Correction ▼ [003752]

Exercice 3753 $A{}^tA + A + {}^tA = 0$

1. Trouver les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A{}^tA + A + {}^tA = 0$.
2. Montrer que pour une telle matrice, $|\det A| \leqslant 2^n$.

Correction ▼ [003753]

Exercice 3754 Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\left|\sum_{i,j} P_{ij}\right| \leqslant n$.
Quand a-t-on égalité ? [003754]

Exercice 3755 Groupe engendré par les réflexions

Soit E un espace vectoriel hermitien et G le sous-groupe de $U(E)$ engendré par les réflexions.

1. On suppose ici $\dim E \geqslant 2$. Soient $u, v \in E$. Montrer qu'il existe une réflexion σ échangeant u et v si et seulement si $\|u\| = \|v\|$ et $(u \mid v) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $G = \{f \in U(E)\ \text{ tq } \det(f) \in \{-1, 1\}\}$.

Correction ▼ [003755]

Exercice 3756 Orthotrigonalisation

Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien est trigonalisable en base orthonormale.
[003756]

Exercice 3757 Réduction des endomorphismes orthogonaux et unitaires

1. Soit G un sous groupe compact de $GL_n((x^2+1)^)$. Si $M \in G$ montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. En déduire que tout élément de G est diagonalisable.

2. Soit $M \in U_n((x^2+1)^)$. Montrer que M est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de $(x^2+1)^n$ propre pour M.
3. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale par blocs :
   $P^{-1}MP = \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1, R_1, \ldots, R_k)$ où chaque R_i est une matrice de la forme : $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

[003757]

Exercice 3758 Groupes orthogonaux égaux

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes euclidiennes telles que les groupes orthogonaux associés sont égaux. Que peut-on dire de ces normes ? [003758]

Exercice 3759 Calcul de norme

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 - x_n, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$. Avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, calculer la norme de f.

Correction ▼ [003759]

Exercice 3760 Densité (Ens Ulm MP* 2003)

$\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

Correction ▼ [003760]

Exercice 3761 Centrale MP 2003

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c de sorte que f soit une isométrie, et la préciser.

Correction ▼ [003761]

---

47 Endomorphismes auto-adjoints

E désigne un espace euclidien de dimension n.

Exercice 3762 Esem 91

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$. [003762]

Exercice 3763 Comatrice d'une matrice symétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\operatorname{com} M$ est aussi symétrique. La réciproque est-elle vraie ? [003763]

Exercice 3764 Base non orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G la matrice de Gram des $\vec{e}_i$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathscr{B}$.

1. Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.
2. Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

[003764]

Exercice 3765 autoadjoint $\Rightarrow$ linéaire

Soit $u : E \to E$ telle que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u(\vec{y}))$. Montrer que u est linéaire.

[003765]

Exercice 3766 Diagonalisation de matrices symétriques

Diagonaliser dans une base orthonormée :

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003766]

Exercice 3767 Diagonalisation de C^tC

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (a_ia_j) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Correction ▼ [003767]

Exercice 3768 Décomposition en projections orthogonales

Soit φ l'endomorphisme de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe des projections orthogonales p, q et des réels λ, μ tels que :

$$\varphi = \lambda p + \mu q, \qquad p \circ q = 0, \qquad p + q = \mathrm{id}_E.$$

Correction ▼ [003768]

Exercice 3769 Ensi Physique 93

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. On pose pour $P,Q \in E$: $< P,Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ et on considère

$$u : E \to \mathbb{R}[x], P(x) \mapsto 2xP'(x) + (x^2-1)P''(x).$$

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire et que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et que si P_k, P_ℓ sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes, alors $<P_k,P_\ell>=0$.
3. Éléments propres de u pour $n = 3$?

Correction ▼ [003769]

Exercice 3770 $(X^2-1)P'' + (2X+1)P'$

Pour $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,dt$ et $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.

1. Vérifier que $(P \mid Q)$ existe et qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour ce produit scalaire, Φ est auto-adjoint $\Big($calculer $\int_{t=-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,dt$ par parties$\Big)$.
3. Déterminer les valeurs propres de Φ et montrer qu'il existe une base propre de degrés étagés.

Correction ▼ [003770]

Exercice 3771 $\mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Im}\,u = E$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,u = E$. [003771]

Exercice 3772 $u \circ v$ autoadjoint ?

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$. [003772]

Exercice 3773 Composée de projecteurs

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
2. Montrer que $(\mathrm{Im}\,p + \mathrm{Ker}\,q) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Im}\,q) = E$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003773]

Exercice 3774 Autoadjoint et orthogonal

Quels sont les endomorphismes de E à la fois auto-adjoints et orthogonaux ? [003774]

Exercice 3775 Spectre et rang d'une matrice antisymétrique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,f \perp \mathrm{Im}\,f$. En déduire que $g = f_{|\mathrm{Im}\,f}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,f$.
3. Montrer que g^2 est diagonalisable. En déduire que $\mathrm{rg}(M)$ est pair.

[003775]

Exercice 3776 Racine carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Calculer B lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. [003776]

Exercice 3777 $A = {}^tBB$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$. [003777]

Exercice 3778 Mineurs principaux positifs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on note Δ_p le déterminant de la sous-matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p; 1 \leqslant j \leqslant p}$.

1. Montrer que si A est définie positive, alors tous les déterminants Δ_p sont strictement positifs.
2. Réciproque : on suppose $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B triangulaire supérieure inversible telle $A = {}^tBB$. En déduire que A est définie positive.

Correction ▼ [003778]

Exercice 3779 q positive $\Rightarrow q(x) = \|u(x)\|^2$

Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u auto-adjoint tel que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$. [003779]

Exercice 3780 A symétrique et $A^k = I$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$. [003780]

Exercice 3781 $\sum_{i,j} a_{ij}^2$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$. [003781]

Exercice 3782 u autoadjoint et $\mathrm{tr}(u) = 0$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel que $u(\vec{x}) \perp \vec{x}$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_i)$ telle que : $\forall\, i,\ (u(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = 0$.

Correction ▼ [003782]

Exercice 3783 Matrices symétriques commutant

Soit (A_i) une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.
Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que : $\forall\, i,\ A_i = P_i(A)$. [003783]

Exercice 3784 Valeurs propres de AB

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, B définie positive. Montrer que les valeurs propres de AB sont réelles.

Correction ▼ [003784]

Exercice 3785 $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Correction ▼ [003785]

Exercice 3786 $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

Correction ▼ [003786]

Exercice 3787 f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Correction ▼ [003787]

Exercice 3788 Quotients de Rayleigh

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leqslant (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leqslant \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.
2. Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.
3. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.
   Montrer que : $\forall\, i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

[003788]

Exercice 3789 Spec$(A+B)$

Soient $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, λ,λ' leurs plus petites valeurs propres et μ,μ' leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de $A+B$ est comprise entre $\lambda+\lambda'$ et $\mu+\mu'$. [003789]

Exercice 3790 Comparaison de valeurs propres

Soient $h \in \mathscr{L}(E)$ autoadjoint, $\vec{x}_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur vect$(\vec{x}_0)$, et $f = h+p$.
On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ celles de f.
Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n$.

Correction ▼ [003790]

Exercice 3791 Mines P' 1996

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Rightarrow f+f^* \in GL(E)$.
2. Montrer la réciproque lorsque l'on a $f^2 = 0$.

Correction ▼ [003791]

Exercice 3792 Rayon spectral

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f^* \circ f)\}$. [003792]

Exercice 3793 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. En considérant l'endomorphisme $f^* \circ f$, montrer que si f est inversible alors f se décompose de manière unique sous la forme $f = u \circ h$ avec u unitaire et h hermitien positif.
2. Si f est non inversible, montrer qu'une telle décomposition existe mais n'est pas unique (on rappelle que $U(E)$ est compact).
3. Montrer que l'application $f \mapsto (u,h)$ est continue sur $GL(E)$.

[003793]

Exercice 3794 Endomorphismes normaux

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1. Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   (1) u est normal.
   (2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
   (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
   (5) Il existe $P \in (x^2+1)^[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

[003794]

Exercice 3795 $\|u(x)\| = \|v(x)\|$

Soit E un espace hermitien non nul et $u,v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\Big(\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\, w \in\ U(E) \text{ tq } u = w \circ v\Big).$$

[003795]

Exercice 3796 $(u(x) \mid x)$ est réel

Soit E un espace vectoriel hermitien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $u = u^*$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x)$ est réel.
2. On suppose u autoadjoint positif. Montrer : $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|^4 \leqslant (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x))$.

Correction ▼ [003796]

Exercice 3797 Série d'autoadjoints positifs

Soit H un espace de Hilbert et (u_n) une suite d'endomorphismes de H autoadjoints positifs continus telle que la suite $(u_0 + \cdots + u_n)$ est bornée dans $\mathscr{L}_c(H)$. Montrer que pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est convergente.

Correction ▼ [003797]

Exercice 3798 Mines MP 2000

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n((x^2+1)^)$?

Correction ▼ [003798]

Exercice 3799 Centrale MP 2000 (avec Maple)

Soit E un espace euclidien, u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E, u étant défini positif.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w tel que $u \circ w + w \circ u = v$. Que peut-on dire de w ?
2. On suppose E de dimension 3, rapporté à une base orthonormale dans laquelle u et v ont pour matrices respectives $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer w.
3. On revient au cas général. Si v est défini positif, que dire de w ? Si w est défini positif, que dire de v ?

Correction ▼ [003799]

Exercice 3800 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace euclidien et s une symétrie de E.

1. Que dire de $s^* \circ s$?
2. Un polynôme P est dit réciproque si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$, pour P de degré n.
   Montrer que : $P(X) = \det(X\mathrm{id} + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque.
3. Montrer que $P(1) \geqslant 2^n$. A quelle condition y a-til égalité ? Y a-t-il des conditions sur s ?
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, carrée, d'ordre n, symétrique définie positive, où A_1 et A_4 sont carrées d'ordres respectifs p et q. Montrer que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_4)$.

Correction ▼ [003800]

Exercice 3801 Cachan MP* 2000

On note P l'ensemble des fonctions f polynomiales par morceaux, continues sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Si f et g sont des fonctions de P, on note $(f \mid g) = \int_{t=0}^{1} f'(t)g'(t)\,dt$.

1. Que dire de P muni de cette application ?
2. Montrer que si $x \in [0,1]$, il existe $g_x \in P$ telle que $\forall\, f \in P,\ (g_x \mid f) = f(x)$.
3. On considère n réels vérifiant : $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et on donne n réels $(\alpha_i)_{i \in [[1,n]]}$. On pose $\varphi(f) = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \alpha_i)^2$ et on demande de trouver le minimum de φ sur P.

Correction ▼ [003801]

Exercice 3802 Centrale MP 2002

1. Que peut-on dire de l'adjoint d'un projecteur orthogonal d'un espace euclidien ? Réciproque ?
2. Soit p un projecteur d'un espace euclidien tel que $p \circ p^* = p^* \circ p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Correction ▼ [003802]

Exercice 3803 IIE MP 2004

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_0^1 fg$.
Soient u, v les endomorphismes de E définis par $u(f)(x) = \int_0^x f$ et $v(f)(x) = \int_x^1 f$.

1. Montrer que $(u(f) \mid g) = (f \mid v(g))$.
2. Déterminer les valeurs propres de $u \circ v$.

Correction ▼ [003803]

Exercice 3804 Centrale MP 2004

Soit E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes autoadjoints $u_1, \dots, u_p$. Soit q_i la forme quadratique associée à u_i ($q_i(x) = (u_i(x) \mid x)$). On suppose :

$$\forall x \in E,\ q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n.$$

1. Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{id}_E$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

Correction ▼ [003804]

Exercice 3805 Mines MP 2005

Soit A matrice réelle ; montrer que A est diagonalisable ssi il existe S symétrique réelle définie positive telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Correction ▼ [003805]

Exercice 3806 Rayon spectral, Centrale MP 2006

Soient A, B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A + tB))$. Montrer que f est convexe.

Correction ▼ [003806]

48 Problèmes matriciels

Exercice 3807 $I + a(X^tY - Y^tX)$ inversible

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ indépendantes, $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice $n \times n$ telle que $m_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$.
A quelle condition $I + aM$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [003807]

Exercice 3808 Matrice orthogonale pour une forme (p, q)

Soit $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ telle que ${}^tMJM = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Correction ▼ [003808]

Exercice 3809 Calcul d'inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, avec a, b, c, d non tous nuls.
Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [003809]

Exercice 3810 Matrices normales

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \iff \mathrm{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

Correction ▼ [003810]

Exercice 3811 f normal, $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.

Correction ▼ [003811]

Exercice 3812 Chimie P 1996

Soit S, matrice orthogonale d'ordre impair, de coefficients fonction de t dérivables. Montrer que $\frac{dS}{dt}$ n'est pas inversible.

[003812]

Exercice 3813 Chimie P 1996

Déterminer a, b, c, réels non nuls pour que la matrice $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{c} & \frac{a}{b} \\ \frac{c}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{a}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une isométrie.

Correction ▼ [003813]

Exercice 3814 Noyaux de A et ${}^tA$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{tr}({}^tXAX) \geqslant 0$. Comparer les noyaux de A et ${}^tA$.

Correction ▼ [003814]

Exercice 3815 Matrice orthogonale ?

1. Peut-on définir sur $\mathbb{R}^2$ une structure euclidienne telle que l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ soit une rotation ?
2. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque.
3. Généraliser à une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Correction ▼ [003815]

Exercice 3816 Valeurs propres d'une matrice complexe

Soit $M \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$ et $\lambda \in \mathrm{spec}(M)$. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda)$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur propre de $\frac{1}{2}(M + M^*)$. [003816]

Exercice 3817 Centrale MP 2001

1. Montrer que toute matrice symétrique réelle positive a ses coefficients diagonaux positifs. Montrer que si l'un des coefficients diagonaux u_{ii} est nul, alors pour tout j on a $u_{ij} = 0$.
2. U est une matrice symétrique réelle positive de la forme $U = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ avec A et B carrées. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Correction ▼ [003817]

Exercice 3818 Centrale MP 2001

1. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ montrer l'existence de deux matrices orthogonales U et V telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.
2. Même question pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer U et V pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [003818]

Exercice 3819 X MP* 2001

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose $A \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que A est semblable à la matrice A' précédente avec une matrice de passage orthogonale.

Correction ▼ [003819]

Exercice 3820 X MP* 2001

Soient A et B deux matrices hermitiennes et $C = A + B$. On note $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ les valeurs propres de la première, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ celles de la deuxième, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_n$ celles de la troisième. Montrez que pour tout i on a $c_i \geqslant a_i + b_n$. *Indication :* se ramener au cas $b_n = 0$.

Correction ▼ [003820]

Exercice 3821 Centrale MP 2002

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients réels, $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives et $\phi \in \mathscr{L}(S_n(\mathbb{R}))$. On suppose que $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall\, M \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists\, A \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall\, \lambda > A,\ M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\phi \in GL(S_n(\mathbb{R}))$ et que $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $n = 2$ et $\phi(I_2) = I_2$. Montrer que : $\forall\, M \in S_2(\mathbb{R}),\ \chi_{\phi(M)} = \chi_M$. Montrer que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. ϕ conserve le déterminant).

Correction ▼ [003821]

Exercice 3822 Mines MP 2002

Déterminer $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $M({}^tMM)^2 = I_n\}$.

Correction ▼ [003822]

49 Espaces vectoriels hermitiens

Exercice 3823 Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que pour $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Montrer que la somme $F_1+\dots+F_n$ est directe. [003823]

Exercice 3824 Espace ℓ^2

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.
Pour $u,v \in E$, on pose : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u \mid v)$ existe.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
4. Montrer que E, muni de la norme associée, est complet.

[003824]

Exercice 3825 $f(x) \perp x \Rightarrow f = 0$

Soit E un espace vectoriel préhilbertien complexe et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a $f(\vec{x}) \perp \vec{x}$.

1. Montrer que pour tous vecteurs $\vec{x},\vec{y} \in E$, on a $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = 0$.
2. Montrer que $f = 0$.
3. Comparer avec le cas réel.

Correction ▼ [003825]

Exercice 3826 Hanh-Banach pour une boule

Soit E un espace préhilbertien réel et B une boule ouverte de E ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\, \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) > 0$. [003826]

Exercice 3827 Calcul de minimums

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto \int_{x=0}^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2\, dx$.

Correction ▼ [003827]

Exercice 3828 Calcul de minimums

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{1} (1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\, dt$. Montrer que φ admet un minimum absolu et le calculer lorsque $n = 3$.
2. Même question avec $\psi(x_1,\dots,x_n) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}(1+tx_1+\dots+t^n x_n)^2\, dt$.

Correction ▼ [003828]

Exercice 3829 Trouvez le produit scalaire

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés étagés ($\deg P_n = n$). Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

[003829]

Exercice 3830 Décomposition de Cholesky

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\, i,\ T_{ii} > 0$.

2. Application : Montrer que $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

[003830]

Exercice 3831 Changement de base unitaire

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Montrer que ${}^t\overline{P}P = I$. Que peut-on dire de $\det P$? [003831]

Exercice 3832 Déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E$. On note $G = (g_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ la matrice de Gram de ces vecteurs ($g_{ij} = (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j)$).

1. On suppose E de dimension finie, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. Exprimer G en fonction de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
2. En déduire que $\det(G)$ est un réel positif ou nul, et nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_i$ sont liés.
3. Montrer le même résultat sans supposer que E est de dimension finie.
4. Examiner le cas particulier $n = 2$.
5. Application : Le tétraèdre $ABCD$ est tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

Correction ▼ [003832]

Exercice 3833 Congruence des matrices de Gram

Soit E un espace vectoriel hermitien et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases quelconques. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

[003833]

Exercice 3834 Normes euclidiennes

1. Montrer que les applications :
$$N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2} \quad \text{et} \quad N_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$$
sont des normes.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y) \leqslant \beta N_2(x,y)$.
3. Trouver les meilleures constantes α, β (étudier si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ est positive, négative).

Correction ▼ [003834]

Exercice 3835 Famille duale de $1, X, X^2, \dots$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall\ i, j \leqslant n,\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes $(P_0, \dots, P_n, \dots)$ telle que : $\forall\ i, j \in \mathbb{N},\ \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.

Correction ▼ [003835]

Exercice 3836 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E l'ensemble des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues et $\Phi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f \times \int_a^b 1/f$.
Montrer que $\min_{f \in E} \Phi(f) = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

Correction ▼ [003836]

Exercice 3837 Intégrale double

Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace E des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ nulles sur le bord, C, de D.
Pour $f, g \in E$, on pose $(f \mid g) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy$. Montrer que c'est un produit scalaire.

[003837]

Exercice 3838 Forme quadratique associée à la matrice de Gram

Soit E un espace euclidien, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.
Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E$, $\sum_{i,j} a_{ij}(\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

Correction ▼ [003838]

Exercice 3839 Orthogonal des polynômes

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

1. Montrer que $g \notin F$.
2. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
3. En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

[003839]

Exercice 3840 Orthogonal d'un hyperplan

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et, pour $f \in E$: $\varphi(f) = \int_{t=0}^{1/2} f(t)\, dt$.

1. Montrer que φ est continue.
2. Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.
3. Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Correction ▼ [003840]

Exercice 3841 Produit scalaire

Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose pour $f, g \in E$: $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} u(t)f(t)g(t)\, dt$.

1. A quelle condition sur u définit-on ainsi un produit scalaire ?
2. Soient u, v deux fonctions convenables. A quelle condition les normes associées sont-elles équivalentes ?

Correction ▼ [003841]

Exercice 3842 Produit scalaire ?

Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ et (a_n) une suite d'éléments de $[a,b]$.
Pour $f, g \in E$, on pose : $(f \mid g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1. A quelle condition sur la suite (a_n) définit-on un produit scalaire ?
2. Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux telles suites telles que les ensembles $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. Montrer que les normes correspondantes sont non équivalentes.
3. Question ouverte : à quelle condition les normes associées à deux suites (a_n) et (b_n) sont-elles équivalentes ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de suite (a_n) pour laquelle E soit complet.

Correction ▼ [003842]

Exercice 3843 Ulm MP* 2000

V est un espace hermitien et u, v, w trois vecteurs unitaires. Montrer que :

$$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} \leqslant \sqrt{1-|(u \mid w)|^2} + \sqrt{1-|(v \mid w)|^2}.$$

Correction ▼ [003843]

Exercice 3844 Ulm MP* 2000

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer qu'elle admet une décomposition $A = UT\,{}^tU$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure si et seulement si le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [003844]

Sixième partie

Fonctions d'une variable

50 Fonctions continues

Exercice 3845 Fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique cad : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

1. Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

[003845]

Exercice 3846 Fonction ayant des limites à l'infini

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.
3. Montrer que f est uniformément continue.

[003846]

Exercice 3847 Permutation de décimales

Pour $x \in [0,1[$, on note $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x.

1. Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{10^k}$. Montrer que f est continue par morceaux.
2. Soit $g : [0,1[\to [0,1[$ définie par : $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_{2k}}{10^{2k-1}} + \frac{x_{2k-1}}{10^{2k}}\right)$. Déterminer les points où g est continue.

[003847]

Exercice 3848 $f(x+1) - f(x) \to a$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) - f(x) \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x \to +\infty$.

1. Montrer que $\frac{f(n)}{n} \to a$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to a$ lorsque $x \to \infty$.

[003848]

Exercice 3849 $\max(f,g)$

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour $x\in\mathbb{R}$: $h(x)=\max\big(f(x),g(x)\big)$. Montrer que h est continue.

[003849]

Exercice 3850 Prolongement d'inégalités

1. Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x,y\in\mathbb{Q},\ f(x)<g(x)$.
   (a) Montrer que $f\leqslant g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécéssairement : $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ f(x)<g(x)$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

[003850]

Exercice 3851 Étude d'un sup

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue. On pose $g(x)=\sup\big(f([x,x+1])\big)$. Montrer que g est continue.
Même question en supposant seulement f continue. [003851]

Exercice 3852 Weierstrass

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues. On pose $h(t)=\sup\{f(x)+tg(x)\text{ tq } x\in[a,b]\}$.
Montrer que h est continue.

[003852]

Exercice 3853 Weierstrass

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sup_{[a,b]} f=\sup_{]a,b[} f$. [003853]

Exercice 3854 Weierstrass

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x\in[a,b],\ f(x)>g(x)>0$. Montrer qu'il existe $k>1$ tel que $f>kg$.

[003854]

Exercice 3855 TVI à l'infini

Soit $f:[0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

[003855]

Exercice 3856 $f(x)=g(x)$

1. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x$.
2. Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ g=g\circ f$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Correction ▼ [003856]

Exercice 3857 f continue décroissante $\Rightarrow$ point fixe

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f(x)=x$. [003857]

Exercice 3858 Mines MP 2002

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'existe a vérifiant $f \circ f(a) = a$. f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.

Correction ▼ [003858]

Exercice 3859 Cordes de longueur $1/n$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
3. Trouver une fonction f telle que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$, $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$.
4. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, b \in \,]0, a]$, $\exists\, x \in [0, 1 - b]$ tq $f(x) = f(x + b)$.

[003859]

Exercice 3860

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, y \in [a,b]$ tq $f(x) = g(y)$.
Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

[003860]

Exercice 3861 TVI + injective $\Rightarrow$ continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b, \forall\, y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\ \exists\, x \in [a,b] \text{ tq } f(x) = y.$$

1. Montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.
2. Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

Correction ▼ [003861]

Exercice 3862 f uc $\Rightarrow$ f(intervalle borné) = intervalle borné

Soit I un intervalle borné et $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné.
[003862]

Exercice 3863 f uc $\Rightarrow |f(x)| \leqslant a + b|x|$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a + b|x|$.
(prendre $\varepsilon = 1$ et majorer $|f(x) - f(0)|$)

[003863]

Exercice 3864 Composition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue. [003864]

Exercice 3865 $\sin(t^2)$

Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

[003865]

Exercice 3866 f uc et $f(n) \to +\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \infty$.

[003866]

Exercice 3867 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.
2. On suppose f continue. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
3. On suppose que f est bornée au voisinage de 0. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

[003867]

Exercice 3868 $f(x^2) = f(x)$

Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$.

[003868]

Exercice 3869 $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$.

Correction ▼ [003869]

Exercice 3870 Polytechnique MP* 2000

Soit f continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et δ un réel positif. On note $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x-y| \leqslant \delta\}$. Montrer que $\omega(\delta)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0, puis que ω est continue.

Correction ▼ [003870]

Exercice 3871 Ensae MP* 2003

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Correction ▼ [003871]

Exercice 3872 Plus grande fonction lipschitzienne minorant f (Ens Lyon MP* 2003)

1. Existe-t-il toujours φ lipschitzienne telle que $\varphi \leqslant f$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application continue donnée ?
2. Soit $k > 0$. Trouver une CNS sur f pour qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne minorant f.
3. On suppose cette CNS vérifiée pour $k_0 > 0$. Montrer que si $k \geqslant k_0$ alors il existe φ_k, k-lipschitzienne minorant f et maximale pour l'ordre usuel des fonctions.

Correction ▼ [003872]

Exercice 3873 Suite $(f(nx))$ ENS Cachan MP* 2004

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x > 0$ la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Que peut-on dire de f ?

Correction ▼ [003873]

51 Fonctions monotones

Exercice 3874 f croissante et $f \circ f = \mathrm{id}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$. [003874]

Exercice 3875 f croissante et $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.
[003875]

Exercice 3876 Étude de $x(2+\sin(1/x))$

On pose :

$$\begin{cases} f(x) = |x|\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone. [003876]

Exercice 3877 Borne supérieure de fonctions croissantes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On note $\mathscr{E} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ croissantes tq } g \leqslant f\}$, et pour $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = \sup\{g(x) \text{ tq } g \in \mathscr{E}\}$.

1. Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{E}$.
2. On suppose f continue. Montrer que $\tilde{f}$ est aussi continue.
   (S'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim_{x\to x_0^+} \tilde{f}(x)$, construire une fonction de $\mathscr{E}$ supérieure à $\tilde{f}$)

[003877]

Exercice 3878 L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Pour $x \in]a,b[$, on pose $\delta(x) = \left|\lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y)\right|$ (saut de f en x).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E_n = \left\{x \in]a,b[\text{ tq } \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

[003878]

Exercice 3879 Fonction localement croissante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement croissante si : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0$ tq $f_{|]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ est croissante.
Montrer que : (f est localement croissante) $\Rightarrow$ (f est croissante).
(Étudier $E = \{x \geqslant 0 \text{ tq } f_{|[0,x]} \text{ est croissante}\}$ et $F = \{x \leqslant 0 \text{ tq } f_{|[x,0]} \text{ est croissante}\}$)
[003879]

Exercice 3880 Prolongement d'une fonction uniformément continue

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Pour $x \in]0,1]$ on pose : $\begin{cases} g(x) = \sup\big(f(]0,x])\big) \\ h(x) = \inf\big(f(]0,x])\big). \end{cases}$

1. Montrer que g et h sont monotones.
   On note $\ell = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $m = \lim_{x\to 0^+} h(x)$.
2. En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que $\ell = m$.
3. En déduire que $f(x) \to \ell$, si $x \to 0^+$.

[003880]

Exercice 3881 f continue, croissante sur $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.
[003881]

Exercice 3882 Morphismes de $\mathbb{R}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que : $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x+y) & = f(x)+f(y) \\ f(xy) & = f(x)f(y). \end{cases}$

Montrer que f est croissante, puis $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. [003882]

Exercice 3883 Point fixe pour une application croissante

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x$.
(Étudier $A=\{x\in[0,1] \text{ tq } f(x)\leqslant x\}$)

Correction ▼ [003883]

Exercice 3884 Fonction localement monotone à droite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\exists\,\delta>0$, tq $\forall\, y\in[x,x+\delta]$, $f(y)\geqslant f(x)$. Montrer que f est croissante.

Correction ▼ [003884]

Exercice 3885 Fonction affine

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$, $|x-y|<|x-z|\Rightarrow|f(x)-f(y)|<|f(x)-f(z)|$. Montrer successivement que f est injective, monotone, continue, et enfin affine.

Correction ▼ [003885]

---

52 Fonctions usuelles

Exercice 3886 Calcul de limite

Montrer que : $\forall\, x>0$, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.
En déduire $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

[003886]

Exercice 3887 Dérivées de $\exp(-1/x)$

On pose $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ ($n\geqslant 1$).
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0^+.
3. Montrer que le polynôme P_n possède $n-1$ racines dans $\mathbb{R}^{+*}$.

[003887]

Exercice 3888 $(1+1/t)^t$

1. Montrer que : $\forall\, t>1$, $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t<e<\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.
2. Montrer que : $\forall\, x,y>0$, $\left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x<\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Correction ▼ [003888]

Exercice 3889 $\ln(1+ax)/\ln(1+bx)$

Soient $0<a<b$. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est croissante.

Correction ▼ [003889]

Exercice 3890 Inégalité

Soient $0 < a < b$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

[003890]

Exercice 3891 Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques

Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{ch} b$, $\operatorname{sh} b$, $\operatorname{th} b$. [003891]

Exercice 3892 Simplification de $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

1. Peut-on trouver $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{ch}(x+\varphi)$?
2. Peut-on trouver $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{sh}(x+\varphi)$?

Correction ▼ [003892]

Exercice 3893 Somme de ch

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Correction ▼ [003893]

Exercice 3894 Somme de sh

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Correction ▼ [003894]

Exercice 3895 Somme de th

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\operatorname{th} x = 2\coth 2x - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Correction ▼ [003895]

Exercice 3896 Somme de $1/\operatorname{sh}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \coth\frac{x}{2} - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$.

Correction ▼ [003896]

Exercice 3897 $\operatorname{ch}(nx)$ et $\operatorname{sh}(nx)$

Montrer que les fonctions : $x \mapsto \operatorname{ch}(n\operatorname{argch}(x))$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(n\operatorname{argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont polynomiales. [003897]

Exercice 3898 $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a$, $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de solutions pour le système : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y & = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = b. \end{cases}$

Correction ▼ [003898]

Exercice 3899 Relation entre les fonctions hyperboliques et circulaires

Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Montrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\quad \operatorname{th} x = \sin y$, $\quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$. [003899]

Exercice 3900 $\operatorname{argth}((1+3\operatorname{th} x)/(3+\operatorname{th} x))$

Simplifier argth $\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)$.

Correction ▼ [003900]

Exercice 3901 Équations diverses

Résoudre $\operatorname{argch} x = \operatorname{argsh}(x-\frac{1}{2})$.

Correction ▼ [003901]

Exercice 3902 Calcul de primitives

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$.

Correction ▼ [003902]

Exercice 3903 Racine d'une somme d'exponentielles

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $a > a_p$ il existe un unique réel $x_a > 0$ solution de l'équation : $a_1^x + \cdots + a_p^x = a^x$.
2. Pour $a < b$, comparer x_a et x_b.
3. Chercher $\lim_{a\to+\infty} x_a$ puis $\lim_{a\to+\infty} x_a \ln a$

Correction ▼ [003903]

Exercice 3904 Centrale MP 2000

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall\, x, y > 0,\ f(xf(y)) = yf(x)$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$

1. Montrer que f est involutive.
2. Montrer que f conserve le produit. Que peut-on dire de la monotonie de f, de sa continuité ?
3. Trouver f.

Correction ▼ [003904]

Exercice 3905 Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\theta + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\theta = 2$.
2. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$.
3. $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$.
4. $\cos\theta - \cos 2\theta = \sin 3\theta$.
5. $\cos\theta + \cos 7\theta = \cos 4\theta$.
6. $\cos 2\theta + \cos 12\theta = \sqrt{3}\cos 5\theta$.
7. $\sin 7\theta - \sin\theta = \sin 3\theta$.
8. $\cos^3\theta \sin 3\theta + \cos 3\theta \sin^3\theta = \frac{3}{4}$.
9. $\sin\theta \sin 3\theta = \sin 5\theta \sin 7\theta$.
10. $3\tan\theta = 2\cos\theta$.
11. $\tan 4\theta = 4\tan\theta$.
12. $\operatorname{cotan}\theta - \tan\theta = \cos\theta + \sin\theta$.
13. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan(x+y) = 4/3. \end{cases}$

Correction ▼ [003905]

Exercice 3906 Inéquations

1. Résoudre : $\cos\theta + \cos(\theta + \pi/3) > 0$.
2. Résoudre : $2\cos\theta + \sin\theta < 2$.

Correction ▼ [003906]

Exercice 3907 Linéarisation

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$.
$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$.
$4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$.
$4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$.

$8\cos^4\theta = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$8\sin^4\theta = 3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$.
$32\cos^6\theta = 10 + 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$32\sin^6\theta = 10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta$.

$32\cos^4\theta\sin^2\theta = 2 + \cos 2\theta - 2\cos 4\theta - \cos 6\theta$.
$32\sin^4\theta\cos^2\theta = 2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta$.
$16\cos\theta\sin^4\theta = \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 2\cos\theta$.
$16\sin\theta\cos^4\theta = \sin 5\theta + 3\sin 3\theta + 2\sin\theta$.

$4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin 3\theta$. [003907]

Exercice 3908 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. Démontrer que : $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
2. Simplifier $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

Correction ▼ [003908]

Exercice 3909 $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ en progression arithmétique

Montrer qu'il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les nombres $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2\theta, \sin^2(\theta + \alpha)$ soient en progression arithmétique. [003909]

Exercice 3910 Calcul de somme

Calculer $\tan p - \tan q$. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction ▼ [003910]

Exercice 3911 Calcul de somme

Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$.

Correction ▼ [003911]

Exercice 3912 Calcul de somme

Calculer $\mathrm{cotan}x - 2\mathrm{cotan}2x$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{\alpha}{2^k}$.

Correction ▼ [003912]

Exercice 3913 Heptagone régulier

Soit $ABCDEFG$ un heptagone (7 côtés) plan régulier. On pose $\alpha = AB$, $\beta = AC$, $\gamma = AD$ (distances). Montrer que $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Correction ▼ [003913]

53 Fonctions circulaires inverses

Exercice 3914 arcsin et arccos à partir de arctan

Le langage “Pascal” ne dispose pas des fonctions arcsin et arccos. Définir $\arcsin x$ et $\arccos x$ à l'aide de la fonction arctan.

Correction ▼ [003914]

Exercice 3915 Formules d'addition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan a + \arctan b$.

Correction ▼ [003915]

Exercice 3916 $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$

Résoudre l'équation : $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$.

Correction ▼ [003916]

Exercice 3917 $\arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Soit $x = \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\cos 4x$ et en déduire x.

Correction ▼ [003917]

Exercice 3918 arctangentes

1. Simplifier $\arctan \frac{1-x}{1+x}$.
2. Simplifier $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
3. Simplifier $\arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
4. Simplifier $\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.
5. Simplifier $\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

Correction ▼ [003918]

Exercice 3919 $2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$

Existe-t-il une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in D,\ 2\arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$?

Correction ▼ [003919]

Exercice 3920 $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Simplifier $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Correction ▼ [003920]

Exercice 3921 $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

Simplifier $\arccos(\cos x) - \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [003921]

Exercice 3922 Équation

Résoudre : $2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Correction ▼ [003922]

Exercice 3923 $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$

Simplifier $\frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [003923]

Exercice 3924 $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$

Simplifier $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$.

Correction ▼ [003924]

Exercice 3925 Équations aux arctan

Résoudre :

1. $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Correction ▼ [003925]

Exercice 3926 Sommes remarquables

1. Montrer que : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
2. Montrer que : $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

[003926]

Exercice 3927 Sommes remarquables

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, x \in \left]0, 1\right],\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

[003927]

Exercice 3928 $\arctan((x-\sin a)/\cos a)$

Soit $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2(x-\sin a)\cos a}{x^2-2x\sin a+1}\right)$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{x-\sin a}{\cos a}\right)$.
Vérifier que f est bien définie, calculer $\sin\big(2g(x)\big)$ et comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Correction ▼ [003928]

Exercice 3929 Polynômes de Chebicheff

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales. [003929]

Exercice 3930 Équivalent de $\arccos(1-x)$

A l'aide d'un changement de variable judicieux, trouver $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$. [003930]

Exercice 3931 Matexo

Montrer que : $\forall\, x \in\,]-1,1[,\ |\arcsin(x)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$. [003931]

Septième partie
Calcul différentiel

54 Dérivation

Exercice 3932 Limite double

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, h,k \in\,]0,\delta[,\ \left|\frac{f(h)-f(-k)}{h+k} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

[003932]

Exercice 3933 Propriétés de parité et de périodicité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

[003933]

Exercice 3934 Propriété de parité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que la fonction $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire ?

Correction ▼ [003934]

Exercice 3935 Injectivité locale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\, x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

[003935]

Exercice 3936 Dérivabilité de $|f|$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.
[003936]

Exercice 3937 $f'(x) \to \ell$ et f est bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\ell = 0$. [003937]

Exercice 3938 $\lim_\infty f'(x) = \lim_\infty f(x)/x$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$. Chercher un contrexemple pour la réciproque.

[003938]

Exercice 3939 Centrale MP 2006

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \to \ell \in \mathbb{R}^*$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) \sim \frac{\alpha}{x^\beta}$ en $+\infty$.

Correction ▼ [003939]

Exercice 3940 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que : $\forall\, x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2. Dans le cas général, montrer que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003940]

Exercice 3941 Propriété des valeurs intermédiaires pour f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On note $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x,y) \in E$: $\varphi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.
2. En déduire que $f'([a,b])$ est un intervalle.

[003941]

Exercice 3942 Règle de l'Hospital

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\, x \in \,]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   (Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi)
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$ lorsque $x \to a^+$ (règle de l'Hospital).
3. Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

[003942]

Exercice 3943 Recherche de limite

Trouver $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Correction ▼ [003943]

Exercice 3944 $f(a) = f(b) = 0,\ f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ il existe un autre zéro

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leqslant 0$. [003944]

Exercice 3945 $f'(a) = f'(b)$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

[003945]

Exercice 3946 Tangentes passant par un point donné

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $(d,0)$. [003946]

Exercice 3947 Rolle itéré

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

[003947]

Exercice 3948 Rolle à l'infini

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $x \in]a,+\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

[003948]

Exercice 3949 Formule des accroissements finis avec $\theta = 1/2$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼ [003949]

Exercice 3950 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ bornée.

1. Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geqslant 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

[003950]

Exercice 3951 Distance à la corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$
(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)
2. Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

[003951]

Exercice 3952 Écart à un polynôme interpolateur

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i. On pose $Q(x) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n (x-a_i)$.
Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b) f^{(n)}(c)$
(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

[003952]

Exercice 3953 Polynômes de Legendre

On pose $f(t) = (t^2-1)^n$.

1. Montrer que : $\forall\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2. Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Correction ▼ [003953]

Exercice 3954 Racines de x^n+ax+b

Soit $n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$, et $a,b\in\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n+ax+b=0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

[003954]

Exercice 3955 Racines de $P(x)-e^x$

Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x)=e^x$.

[003955]

Exercice 3956 Limite de $1/(n+1)+\cdots+1/2n$

On veut calculer $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

1. Montrer l'existence de ℓ.
2. Soit $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)\to \ell f'(0)$ lorsque $n\to\infty$.
3. On prend $f(x)=\ln(1+x)$. Déterminer ℓ.

[003956]

Exercice 3957 Calcul de limite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0)=0$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Correction ▼ [003957]

Exercice 3958 Somme $1/k\ln k$

Pour $k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x\mapsto \ln(\ln x)$ sur $[k,k+1]$. En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$ est divergente. [003958]

Exercice 3959 $f'(x)f'(f(x))=1$

Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\begin{cases}\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x))=1\\ f(0)=0 \text{ et } f'(0)>0.\end{cases}$

Correction ▼ [003959]

Exercice 3960 $f\circ f=f$

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ dérivable telle que $f\circ f=f$. Montrer que f est constante ou bien $f=\mathrm{id}_{[0,1]}$. [003960]

Exercice 3961 Dérivabilité uniforme

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, x,y \in [a,b], \text{ si } 0 < |x-y| < \delta, \text{ alors } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

[003961]

Exercice 3962 Formes indéterminées

Soient $u,v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) \neq v(x) \\ \lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} v(x) = a > 0. \end{cases}$

1. Chercher $\lim_{x\to 0} \frac{u^v - v^v}{u-v}$.
2. Chercher $\lim_{x\to 0} \frac{u^v - v^u}{u^u - v^v}$.

Correction ▼ [003962]

Exercice 3963 $(1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit $k \in\,]-1,1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geqslant 0$, $k < 0$).

Correction ▼ [003963]

Exercice 3964 Dérivée n-ème de $\cos^3 x$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

[003964]

Exercice 3965 Dérivée n-ème de $\arctan x$ et e^{x^3}

Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :
$f : x \mapsto \arctan x$ et $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Correction ▼ [003965]

Exercice 3966 Dérivée n-ème de $(x^3+2x^2-5)e^{-x}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto (x^3+2x^2-5)e^{-x}$.

Correction ▼ [003966]

Exercice 3967 Ensi Chimie P 94

Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [003967]

Exercice 3968 Dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Correction ▼ [003968]

Exercice 3969 Dérivées n-èmes de $t^{n-1}\ln(t)$ et $t^{n-1}e^{1/t}$

Calculer $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\ln t\right)$, et $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\exp(1/t)\right)$ (essayer $n = 1,2,3$).

Correction ▼ [003969]

Exercice 3970 Dérivée n-ème de $f(x^2)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.

1. Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall\, x,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.
2. Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k.

Correction ▼ [003970]

Exercice 3971 Dérivée n-ème de $f(1/x)$

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

[003971]

Exercice 3972 Dérivées de e^{-1/x^2}

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

[003972]

Exercice 3973 $(f(2t) - f(t))/t$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{f(2t)-f(t)}{t} \to a$ (si $t \to 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

[003973]

Exercice 3974 $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geqslant 0$

On pose $f(x) = \sin x - \frac{3x}{\pi} + \frac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

[003974]

Exercice 3975 Courbes homothétiques

Soit $a > 0,\ a \neq 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathscr{C}'$ celle d'équation : $y = a \ln x$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont une et une seule tangente commune.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont homothétiques.

Correction ▼ [003975]

Exercice 3976 Matexo

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x)f'(x) \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Correction ▼ [003976]

Exercice 3977 Mines MP 2000

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2}\, dt = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

Correction ▼ [003977]

Exercice 3978 $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ (Centrale MP 2003)

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Correction ▼ [003978]

Exercice 3979 $f' = f^{-1}$ (Ens Cachan MP* 2003)

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ bijectives de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

1. Trouver un élément de E du type $x \mapsto cx^m$, où c et m sont réels.
2. Quelle est la limite en 0 de f ?
3. Montrer que f est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que f admet un unique point fixe.
5. Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

Correction ▼ [003979]

Exercice 3980 $f^2+(1+f')^2 \leqslant 1$, Polytechnique MP* 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2+(1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [003980]

---

55 Fonctions convexes

Exercice 3981 Déterminant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$. [003981]

Exercice 3982 Somme de fractions

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Correction ▼ [003982]

Exercice 3983 Monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :
– soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
– soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
– soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a,+\infty[$.

[003983]

Exercice 3984 Fonction convexe bornée

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

[003984]

Exercice 3985 f convexe majorée par g affine

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ affine. On suppose : $\begin{cases} \forall\, x > 0,\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(1) = g(1). \end{cases}$

Montrer que $f = g$. [003985]

Exercice 3986 Position par rapport à une asymptote

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

[003986]

Exercice 3987 Fonction convexe dérivable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

[003987]

Exercice 3988 Étude à l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$.

1. Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\frac{f(x)}{x}$.
2. Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.

Correction ▼ [003988]

Exercice 3989 Zéro de f''

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x) \to f(0)$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

[003989]

Exercice 3990 $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x,y \in [a,b],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

[003990]

Exercice 3991 Suites adjacentes

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

[003991]

Exercice 3992 Polygone inscrit dans un cercle de périmètre maximum

Soit $n \geqslant 3$ et $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.
Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier. [003992]

Exercice 3993 Fonctions logarithmiquement convexe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\iff$ ($\forall\, \alpha > 0$, f^α est convexe). [003993]

Exercice 3994 Limite de $f(x) - xf'(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2. On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3. Montrer alors que $f(x) - mx - p \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction ▼ [003994]

Exercice 3995 Fonction positive concave

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ concave.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall\, x,y \geqslant 0,\ f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Correction ▼ [003995]

Exercice 3996 Constante d'Euler

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 1,\ f(x+1)-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)-f(x-1)$.
2. On pose : $\begin{cases} u_n = f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n) \\ v_n = f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n+1). \end{cases}$ Montrer que ces suites convergent.
3. On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

[003996]

Exercice 3997 Tangentes passant par un point

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par A.

[003997]

Exercice 3998 Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ tq $a<b,\ \exists!\ c \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \longmapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est monotone sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

[003998]

Exercice 3999 Pseudo-dérivée seconde

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ D^2f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, calculer $D^2f(x)$.
2. Soit f quelconque et $a<b<c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$.
   Montrer qu'il existe $x \in]a,c[$ tq $D^2f(x) \leqslant 0$.
   On suppose à présent que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, D^2f(x) \geqslant 0$.
3. Soient $a<b<c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a,b,c. Montrer que $P'' \geqslant 0$.
4. Calculer P'' en fonction de a,b,c et $f(a),f(b),f(c)$. En déduire que f est convexe.

Correction ▼ [003999]

Exercice 4000 Fonction convexe non dérivable sur un sous ensemble dénombrable

Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}$.
Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.

Correction ▼ [004000]

Exercice 4001 Convergence simple + convexité => convergence uniforme sur un compact

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f supposée continue.
Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, x,y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \frac{b-a}{p} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

   On choisit un tel p, et on fixe une subdivision (a_k) de $[a,b]$ telle que $a_k = a + k\frac{b-a}{p}$.
2. Soit $t \in [0,1]$. Encadrer $f_n\big(ta_k + (1-t)a_{k+1}\big)$ par deux fonctions affines de t en utilisant la convexité de f_n.
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

[004001]

Exercice 4002 DL d'une fonction convexe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x) = a + bx + \frac{cx^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$.
Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = c$
(encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x - \varepsilon x$, x et $x + \varepsilon x$).

[004002]

Exercice 4003 DL d'une fonction convexe

Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x) = x^2 + o(x)$. Montrer que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.

Correction ▼

[004003]

---

56 Formules de Taylor

Exercice 4004 Déterminant

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable en a. Étudier $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$.

Correction ▼

[004004]

Exercice 4005 Dérivées nulles en 0

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0,$$
$$\exists\, \lambda > 0 \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| \leqslant \lambda^n n!.$$

Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

[004005]

Exercice 4006 Fonctions absolument monotones

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) > 0$.
Montrer que pour tout entier n, $\frac{f(x)}{x^n} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

[004006]

Exercice 4007 Fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

1. Montrer que $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| \geqslant 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$.

Correction ▼ [004007]

Exercice 4008 Formule de Simpson

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$, impaire, telle que $f'(0)=0$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f^{(5)}(x)|\leqslant M$.
   Montrer qu'il existe une constante λ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f(x)-\frac{x}{3}f'(x)\right|\leqslant\lambda M|x^5|$.
2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$ telle que :

$$f'(a)=f'(b)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,\qquad \text{et}\quad \forall x\in[a,b],\ |f^{(5)}(x)|\leqslant M.$$

   Montrer que $\left|f(b)-f(a)\right|\leqslant\frac{M(b-a)^5}{2880}$.

Correction ▼ [004008]

Exercice 4009 $f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a)$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On note $M=\sup|f''|$ et on suppose $M>0$.

1. Montrer que : $\forall x\in\,]a,b[$, on a $\left|f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|<M\frac{b-a}{2}$.
2. Si $\left|f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=M\frac{b-a}{2}$, montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Correction ▼ [004009]

Exercice 4010 Matexo

Soit $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que :

$$\forall x\in[-a,a],\ |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2a}|f(a)-f(-a)|+\frac{a^2+x^2}{2a}\sup|f''|.$$

Application. Montrer que si $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ on a $\sin x\geqslant x\cos x-x^2$.

Correction ▼ [004010]

Exercice 4011 Limite de θ

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pour a fixé, on écrit la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(a+h)=f(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+h\theta_h).$$

Montrer que si $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, alors pour h suffisament petit, θ_h est unique et $\theta_h\to\frac{1}{n+1}$ lorsque $h\to 0$.

Correction ▼ [004011]

Exercice 4012

Différences finies Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $h>0$. On pose :

$$\Delta_h f(x)=\frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h}\qquad\text{et}\quad \Delta_h^p=\underbrace{\Delta_h\circ\Delta_h\circ\dots\circ\Delta_h}_{p\text{ fois}}.$$

Par exemple, $\Delta_h^2 f(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

1. (a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\,\theta\in\,]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x)=f'\left(x+\frac{\theta h}{2}\right)$.
   (b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\,\theta'\in\,]-1,1[$ tq $\Delta_h f(x)=f'(x)+\frac{h^2}{24}f^{(3)}\left(x+\frac{\theta' h}{2}\right)$.
2. Montrer par récurrence sur p que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\,\theta_p\in\,]-p,p[\ \text{tq}\ \Delta_h^p f(x)=f^{(p)}(x)+\frac{ph^2}{24}f^{(p+2)}\left(x+\frac{\theta_p h}{2}\right).$$

[004012]

Exercice 4013 f et f'' sont bornées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \alpha$ et $|f''(x)| \leqslant \beta$.

1. Montrer que : $\forall\, h > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}$.
2. Pour quelle valeur de h obtient-on la meilleure inégalité ?

Correction ▼ [004013]

Exercice 4014 Inégalité sur f'

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \leqslant M$.

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geqslant 0$.
2. En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$.
3. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| = \sqrt{2Mf(x)}$. Que pouvez-vous dire de f ?

Correction ▼ [004014]

Exercice 4015 Majoration des dérivées de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que les dérivées intermédiaires sont aussi bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Cas $n = 2$: Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Cas général : Utiliser l'exercice 4012.

[004015]

Exercice 4016 $f''(x) \geqslant -\frac{k}{x^2}$

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, et : $\forall\, x > 0,\ f''(x) \geqslant -\frac{k}{x^2}$.
Montrer que $xf'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^+$ (écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + \varepsilon x$).

Correction ▼ [004016]

Exercice 4017 Ens PC* 2001

Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants, de coefficients dominants positifs.
On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les racines de P' de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_q$ celles de Q' de multiplicités $n_1, \ldots, n_q$. Montrer qu'il existe f, $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, tel que $P \circ f = Q$ si et seulement si :

$$p = q, \qquad \forall\, i,\ P(x_i) = Q(y_i), \qquad \forall\, i,\ m_i = n_i.$$

Correction ▼ [004017]

57 Calculs de développements limités

Exercice 4018 Calculs de DL

Fonctions trigonométriques

$$x/\sin x = 1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$$
$$1/\cos x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$$
$$\ln(\sin x/x) = -x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835 + o(x^6)$$
$$\exp(\sin x/x) = e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$$
$$\sqrt{\tan x} = 1 + h + h^2/2 + o(h^2), h = x - \pi/4$$
$$\sin(x + x^2 + x^3 - x^4) = x + x^2 + 5x^3/6 - 3x^4/2 + o(x^4)$$
$$\ln(x\tan(1/x)) = x^{-2}/3 + 7x^{-4}/90 + o(1/x^4)$$
$$(1 - \cos x)/(e^x - 1)^2 = 1/2 - x/2 + x^2/6 + o(x^2)$$
$$\sin((\pi\cos x)/2) = 1 - \pi^2 x^4/32 + \pi^2 x^6/192 + o(x^6)$$
$$\cos x \ln(1 + x) = x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^4)$$
$$(\sin x - 1)/(\cos x + 1) = -1/2 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$$
$$\ln(2\cos x + \tan x) = \ln 2 + x/2 - 5x^2/8 + 11x^3/24 - 59x^4/192 + o(x^4)$$
$$e^{\cos x} = e(1 - x^2/2 + x^4/6) + o(x^5)$$

Fonctions circulaires inverses

$$\arcsin^2 x = x^2 + x^4/3 + 8x^6/45 + o(x^6)$$
$$1/\arcsin^2 x = x^{-2} - 1/3 - x^2/15 + o(x^2)$$
$$\arctan\sqrt{(x+1)/(x+2)} = \pi/4 - x^{-1}/4 + 3x^{-2}/8$$
$$\arccos(\sin x/x) = |x|/\sqrt{3}(1 - x^2/90) + o(1/x^3)$$
$$1/\arctan x = x^{-1} + x/3 - 4x^3/45 + 44x^5/945 + o(x^5)$$
$$\arcsin\sqrt{x} = \pi/6 + 1/\sqrt{3}(2h - 4h^2/3 + 32h^3/9) + o(h^3), h = x - 1/4$$
$$\arcsin(\sin^2 x) = x^2 - x^4/3 + 19x^6/90 - 107x^8/630 + o(x^8)$$
$$\arctan(1 + x) = \pi/4 + x/2 - x^2/4 + x^3/12 + o(x^4)$$
$$\arcsin x/(x - x^2) = 1 + x + 7x^2/6 + o(x^2)$$
$$e^{\arcsin x} = e^{\pi/6}(1 + 2h/\sqrt{3} + 2(1 + \sqrt{3})h^2/(3\sqrt{3})) + o(h^2), h = x - 1/2$$
$$e^{1/x}\arctan x = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)x^{-1} + (\frac{\pi}{4} - 1)x^{-2} + (\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6})x^{-3} + o(1/x^3)$$

Exponentielle et logarithme

$$x/(e^x - 1) = 1 - x/2 + x^2/12 + o(x^2)$$
$$\ln x/\sqrt{x} = h - h^2 + 23h^3/24 + o(h^3), h = x - 1$$
$$\ln((2 - x)/(3 - x^2)) = \ln(2/3) - x/2 + 5x^2/24 + o(x^2)$$
$$\ln(1 + x)/(1 - x + x^2) = x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$$
$$\mathrm{ch}\, x/\ln(1 + x) = x^{-1} + 1/2 + 5x/12 + o(x)$$
$$\ln(\ln(1 + x)/x) = -x/2 + 5x^2/24 - x^3/8 + o(x^3)$$
$$\ln(a^x + b^x) = \ln 2 + x\ln\sqrt{ab} + x^2\ln^2(a/b)/8 + o(x^2)$$
$$\exp(1/x)/x^2 = e(1 - 3h + 13h^2/2 - 73h^3/6) + o(h^3), h = x - 1$$

Fonctions hyperboliques inverses

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}(\sin x) &= x + x^3/6 + x^5/24 + o(x^5)\\ \operatorname{argsh}(e^x) &= \ln(1+\sqrt{2}) + 1/\sqrt{2}(x + x^2/4) + o(x^2)\end{aligned}$$

Formes exponentielles

$$\begin{aligned}(1-x+x^2)^{1/x} &= e^{-1}(1 + x/2 + 19x^2/24) + o(x^2)\\ ((1+x)/(1-x))^{\alpha} &= 1 + 2\alpha x + 2\alpha^2 x^2 + 2\alpha(2\alpha^2+1)x^3/3 + o(x^3)\\ (\sin x/x)^{2/x^2} &= e^{-1/3}(1 - x^2/90) + o(x^3)\\ (\sin x/x)^{3/x^2} &= e^{-1/2}(1 - x^2/60 - 139x^4/151200) + o(x^4)\\ (1+\sin x)^{1/x} &= e(1 - x/2 + 7x^2/24) + o(x^2)\\ (1+\sin x+\cos x)^x &= 1 + x\ln 2 + x^2(\ln^2 2 + 1)/2 + o(x^2)\\ (\sin x)^{\sin x} &= 1 - h^2/2 + 7h^4/24 + o(h^4), h = x - \pi/2\\ (\tan x)^{\tan 2x} &= e^{-1}(1 + 2h^2/3 + 4h^4/5) + o(h^4), h = x - \pi/4\\ &\text{Développer d'abord } \ln((1+x)/(1-x))\end{aligned}$$

Radicaux

$$\begin{aligned}x\sqrt{(x-1)/(x+1)} &= 1/\sqrt{3}(2 + 5h/3 + h^3/54) + o(h^3), h = x-2\\ \sqrt{1+\sqrt{1-x}} &= \sqrt{2}(1 - x/8 - 5x^2/128 - 21x^3/1024) + o(x^3)\\ \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} &= |x|/\sqrt{2}(1 + x^2/8 + 7x^4/128) + o(x^5)\\ e^x - \sqrt{1+2x} &= x^2 - x^3/3 + 2x^4/3 - 13x^5/15 + o(x^5)\\ (\sqrt[3]{x^3+x^2} + \sqrt[3]{x^3-x^2})/x &= 2 - 2x^{-2}/9 + o(1/x^3)\end{aligned}$$

[004018]

Exercice 4019 EIT 1999

Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004019]

---

58 Calculs de limites par développements limités

Exercice 4020 Fonctions circulaires et hyperboliques

1. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \to \frac{2}{3}$ lorsque $x \to 0$.
2. $\frac{\sin x \operatorname{sh} x - \tan x \operatorname{th} x}{\operatorname{sh}^4 x - \operatorname{th}^4 x} \to -> -\frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
3. $(\operatorname{ch} x)^{\alpha} - (\operatorname{sh} x)^{\alpha} \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2,\\ 1 & \text{si } \alpha = 2,\\ 0 & \text{si } \alpha < 2.\end{cases}$ lorsque $x \to +\infty$

4. $\frac{\exp(x^2)-\operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{(\operatorname{ch}x-\cos x)(\operatorname{ch}2x-\cos 2x)} \to \frac{1}{12}$ lorsque $x \to 0$.
5. $(2x^2-3x+1)\tan \pi x \to \frac{1}{\pi}$ lorsque $x \to 1/2$.
6. $\frac{\cos \pi x}{4x^2-9} \to -> \frac{\pi}{12}$ lorsque $x \to 3/2$.
7. $\frac{\sin 3x}{1-2\cos x} \to -\sqrt{3}$ lorsque $x \to \pi/3$.
8. $\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.
9. $\frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

[004020]

Exercice 4021 Logarithme et exponentielle

1. $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \to \frac{1}{2}$. lorsque $x \to 0$
2. $\frac{x^x-1}{\ln x - x + 1} \to \pm\infty$ lorsque $x \to 1$.
3. $\frac{x^a-a^x}{\log_a(x)-\log_x(a)} \to \frac{a^{a+1}\ln a(1-\ln a)}{2}$ lorsque $x \to a$.
4. $\left(\frac{a^x+b^x}{1+c^x}\right)^{1/x} \to \exp\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$ lorsque $x \to 0$.
5. $\frac{x^{x^x}}{x^x-1} \to 0$ lorsque $x \to 0^+$.

[004021]

Exercice 4022 Exposants variables

1. $x^{\arcsin x} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
2. $\frac{(\sin x)^{\sin x}-1}{x^x-1} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$.
3. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to e^{2/\pi}$ lorsque $x \to 1$.
4. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to -> 1$ lorsque $x \to 2^-$.
5. $(\sin x + \cos x)^{1/x} \to e$ lorsque $x \to 0$.
6. $(\cos 2x - 2\sin x)^{1/x} \to e^{-2}$. lorsque $x \to 0$
7. $(\sin x)^{\tan x} \to 1$. lorsque $x \to \pi/2$
8. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to e^{-1/\sqrt{2}}$ lorsque $x \to \pi/4$.
9. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to 1$ lorsque $x \to (\pi/2)^-$.
10. $(\sin x)^{1/\ln x} \to e$ lorsque $x \to 0^+$.
11. $(\ln x)^{x-1} \to 1$ lorsque $x \to 1^+$.
12. $(\ln x)^{\ln(e-x)} \to -> 1$ lorsque $x \to e^-$.

[004022]

Exercice 4023 Radicaux

1. $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan(\pi x/4)} \to 0$ lorsque $x \to 1$.
2. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
3. $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.

[004023]

Exercice 4024 Sommes de cotangentes

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. CNS pour que $\sum_{k=1}^n a_k \operatorname{cotan}(kx)$ ait une limite finie en 0 ?

Correction ▼ [004024]

Exercice 4025 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$

On pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$. Trouver : $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$, $v = \lim_{p\to\infty} v_p$, $w_n = \lim_{p\to\infty} u_{n,p}$ et $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Correction ▼ [004025]

Exercice 4026 Ensi P 91

Calculer $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}$ puis $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

Correction ▼ [004026]

Exercice 4027 Recherche de tangentes

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente pour $x = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1. $y = \frac{e^{\sin x}-1}{x}$.
2. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}$.
3. $y = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$.
4. $y = (2e^x - e^{-x})^{1/x}$.
5. $y = \frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x}$.
6. $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Correction ▼ [004027]

Exercice 4028 Comparaison de fonctions

On pose : $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$.
Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}_k$ au voisinage de 0.

Correction ▼ [004028]

Exercice 4029 Recherche d'asymptotes

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
2. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
3. $y = (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
4. $y = (x+1)\arctan(1+2/x)$.
5. $y = x.\arctan x.e^{1/x}$.
6. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.
7. $y = \sqrt{x^2-x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Correction ▼ [004029]

59 Développements limités théoriques

Exercice 4030 DL de $(\mathrm{ch}\,x)^(1/x)$

1. Montrer que $\frac{1}{x}\ln(\mathrm{ch}\,x)$ admet en $+\infty$ un développement limité généralisé à tout ordre.
2. En déduire le développement limité de $(\mathrm{ch}\,x)^{1/x}$ en $+\infty$ à un ordre n quelconque.

Correction ▼ [004030]

Exercice 4031 Théorème de division

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On pose $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ f'(0) & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. On suppose que $f(x)=o(x^n)$.
   (a) Démontrer que : $\forall\, p\leqslant n,\ f^{(p)}(x)=o(x^{n-p})$, et : $\forall\, p<n,\ g^{(p)}(x)=o(x^{n-p-1})$.
   (b) En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.
2. Démontrer le même résultat dans le cas général.
3. Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f(0)=g(0)=0$ et $g'(0)\neq 0$. Montrer que f/g se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

[004031]

Exercice 4032 DL de f^{-1}

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de valuation 1. Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que :

$$\begin{cases}X=Q_n\circ P+R_n\\ \deg Q_n\leqslant n<\mathrm{v}(R_n).\end{cases}$$

Application : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective telle que $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$, avec $a_1\neq 0$. Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et donner les deux premiers termes.

Correction ▼ [004032]

Exercice 4033 DL de $(1-e^x)^n$

Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.
En déduire $\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kk^p$ pour $p=0,1,\dots,n+2$.

Correction ▼ [004033]

Exercice 4034 Approximation de f''

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. Chercher $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$.

[004034]

Exercice 4035 Dérivation d'un DL d'ordre 2

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+o(h^2)$.
Démontrer que f est deux fois dérivable en a et $f''(a)=0$ (comparer $f'(a+h)$ aux taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, et entre $a+h$ et $a+2h$).
Étudier le cas où $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{Lh^2}{2}+o(h^2)$.

[004035]

Exercice 4036 $f(x+y)f(x-y)\leqslant f^2(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \leqslant f^2(x)$.
Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t)f''(t) \leqslant f'^2(t)$. [004036]

60 Développements limités implicites

Exercice 4037 $\tan(x) = x$

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \to \infty$.
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de x_n à l'ordre 2.

Correction ▼ Vidéo ■ [004037]

Exercice 4038 maximum de $x\cos^n x$

On note $f_n(x) = x\cos^n x$. Soit $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1. Existence et unicité de x_n ?
2. Chercher $\lim_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$ $(n \to \infty)$.
4. Trouver un équivalent de $f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004038]

Exercice 4039 Développement asymptotique

Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x} e^x$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si λ est assez grand, la droite d'équation $y = \lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points d'abscisses $a < b$.
   (a) Montrer que $a \sim \frac{1}{\lambda}$, et $e^b \sim \lambda$ pour $\lambda \to +\infty$.
   (b) Chercher la limite de b^a quand λ tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004039]

Exercice 4040 Polytechnique MP* 2000

Soit $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Trouver la limite et un équivalent de la suite (x_n) en $+\infty$.

Correction ▼ [004040]

Exercice 4041

Soit u_n une suite réelle telle que pour tout n on ait $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Correction ▼ [004041]

Exercice 4042 Mines MP 2001

Montrez que pour n entier $(n > 0)$ l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

Correction ▼ [004042]

Exercice 4043 Centrale MP 2001

Pour tout n entier naturel non nul, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

Correction ▼ [004043]

61 Équivalents

Exercice 4044 Recherche d'équivalents

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0

Correction ▼ Vidéo ■ [004044]

Exercice 4045 Approximation de cos

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [004045]

Exercice 4046 Approximation de sin

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\sin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit infiniment petit d'ordre maximal.

Correction ▼ [004046]

Exercice 4047 Equivalent de $\arccos x$ en 1

Simplifier $\arccos(1-2x^2)$, en trouver un équivalent pour $x \to 0$, puis donner un équivalent de $\arccos(u)$ pour $u \to 1^-$.

[004047]

Exercice 4048 $\arcsin \circ \arctan - \arctan \circ \arcsin$

1. Soient $P(X) = X + aX^3 + bX^5 + cX^7$ et $Q(X) = X + \alpha X^3 + \beta X^5 + \gamma X^7$. Chercher la partie de degré inférieur ou égale à 7 de $P \circ Q - Q \circ P$.
2. Application : Donner le DL à l'ordre 7 en 0 de $\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$.

Correction ▼ [004048]

Exercice 4049 $(u^v - v^u)/(u-v)$

Soient u, v deux fonctions positives, $u \sim v$, $u \to 0$. Montrer que $\frac{u^v - v^u}{u-v} \sim -\ln(v)$.
(Écrire $u = v + w$ avec $w/v \to 0$)

[004049]

Exercice 4050 Développement asymptotique d'une réciproque

Soit $f : [-1, +\infty[\to [-e^{-1}, +\infty[, x \mapsto xe^x$. Montrer que f est bijective et $f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

[004050]

Exercice 4051 Équivalent de $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$

Chercher un équivalent simple en 0^+ de $f_k(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ (k fois x).

Correction ▼ [004051]

Exercice 4052 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ pour $n \to \infty$.

[004052]

Exercice 4053 $(1+a_n/n)^n$

1. Soit $f(x) = \ln(1+x) - x$.
   (a) Étudier f.
   (b) Chercher un équivalent simple de f en 0.
   (c) Soit (x_n) une suite de réels telle que $f(x_n) = o(1/n)$. Montrer que $nx_n^2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Application : Soit (a_n) une suite de réels. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $a_n = o(\sqrt{n})$.
   (b) $\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \sim e^{a_n}$.

[004053]

62 Équations différentielles linéaires (I)

Exercice 4054 Équations linéaires d'ordre 1

Intégrer les équations suivantes :

1. $(2+x)y' = 2-y$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
4. $x^3y' - x^2y = 1$.
5. $3xy' - 4y = x$.
6. $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.
7. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.
8. $x(x+1)y' + y = \arctan x$.
9. $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.
   pour 8 : Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004054]

Exercice 4055 Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Intégrer :

1. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.
4. $y'' + y = \text{cotan} x$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6. $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme.
7. $y'^2 + y^2 = 1$ (dériver).

Correction ▼ [004055]

Exercice 4056 Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Intégrer les équations suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
2. $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
3. $x(1 - 2\ln x)y'' + (1 + 2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x$ (poser $u = \ln x$).
5. $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
6. $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ $\left(\text{poser } y = \frac{u}{x^2}\right)$.
7. $(x^2 + 3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales).
8. $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

Correction ▼ [004056]

Exercice 4057 Résolution par DSE

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.
2. $xy'' + 2y' - xy = 0$.
3. $4xy'' + 2y' - y = 0$.
4. $y'' + xy' + 3y = 0$.
5. $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$.
6. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Correction ▼ [004057]

Exercice 4058 $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004058]

Exercice 4059 $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004059]

Exercice 4060 $y' = |x - y|$

Résoudre l'équation : $y' = |x - y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

Correction ▼ [004060]

Exercice 4061 $y'' + |y| = 1$

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Correction ▼ [004061]

Exercice 4062 Mines MP 2000

Résoudre $(E) : 4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz = 1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

Correction ▼ [004062]

Exercice 4063 Mines MP 2000

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} g' + ag = f \\ g(0) = b. \end{cases}$
2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, g l'est également. Relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Correction ▼ [004063]

Exercice 4064 Systèmes différentiels à coefficients constants

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

Correction ▼ [004064]

Exercice 4065 Système différentiel à coefficients non constants

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$

Correction ▼ [004065]

Exercice 4066 Lemme des noyaux, Matexo

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y'' + py' + qy = 0$. On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f) = f'$.

1. D peut elle être une homothétie ?
2. Déterminer les valeurs de p et q pour lequelles D n'est pas un isomorphisme de S.
3. Vérifiez que $D \circ D + pD + q\mathrm{id}_S = 0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D - r_1\mathrm{id}_S) \circ (D - r_2\mathrm{id}_S) = 0$.
4. Les applications $D - r_1\mathrm{id}_S$, $D - r_2\mathrm{id}_S$ peuvent-elles être inversibles ?

[004066]

Exercice 4067 $y'' + x\,y' + y = 0$, Matexo

On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y'' + x\,y' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

1. Montrer que les dérivées de y vérifient $y^{(n)} + x\,y^{(n-1)} + (n-1)\,y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geqslant 2$.
2. Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.
3. Montrer que y admet le développement limité à l'origine $(x \to 0)$:

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}).$$

[004067]

Exercice 4068 $f''(x) + f(-x) = x\cos x$

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall\, x \in R,\ f''(x) + f(-x) = x\cos x$.

Correction ▼ [004068]

Exercice 4069 $y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$

On considère l'équation différentielle : $(*) \iff y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$.

1. On pose $z(x) = y'(x) + \frac{y(x)}{\operatorname{th} x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
2. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
3. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
   On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$.
4. Démontrer que y_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\frac{y_0'(x)}{\operatorname{th} x}$ admet une limite finie en 0.
   En déduire que y_0 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Correction ▼ [004069]

Exercice 4070 $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, (x^2+1)^)$ et $\Phi : E \to E$, définie par $\Phi(f) = g$ où g est l'application $g : t \mapsto f'(t) + tf(t)$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
3. Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004070]

Exercice 4071 $x^2 f''(x) + xf'(x) = \lambda f(x)$

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ $\Phi(P)(X) = X^2P''(X) + XP'(X)$.
2. $E = \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[)$ $\Phi(f)(x) = x^2f''(x) + xf'(x)$.
3. $E = \mathscr{C}^\infty(]0,1[)$ $\Phi(f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}f'(x)$.

Correction ▼ [004071]

Exercice 4072 $AP' - nA'P = \lambda P$

Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
   (a) $A = X^2 - 1$,
   (b) $A = X^2$,
   (c) $A = X^2 + 1$.

Correction ▼ [004072]

Exercice 4073 Équation intégrale

Trouver les applications $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_{t=0}^{x} g^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt\right)^2.$$

Correction ▼ [004073]

Exercice 4074 Inéquations différentielles

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et y, z solutions de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leqslant a(t)z + b(t). \end{cases}$

Démontrer que : $\forall\, t \geqslant 0$, on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Correction ▼ [004074]

Exercice 4075 Tangentes parallèles ou concourantes

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' = a(x)y + b(x)$ et x_0 un réel fixé. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004075]

Exercice 4076 $y' + ay =$ fct périodique

Soit $\lambda \in (x^2+1)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ T-périodique. On considère l'équation : $(*) \Leftrightarrow y' + \lambda y = \varphi(x)$.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors $y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que y, solution de $(*)$, est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
3. Montrer que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ, l'équation $(*)$ admet une et une seule solution T-périodique.

[004076]

Exercice 4077 Coefficients périodiques

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont des fonctions continues, T-périodiques.

1. Montrer que si y est solution de $(*)$, alors la fonction définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.
2. En déduire que si $\int_{t=0}^{T} a(t)\,dt \neq 0$, alors $(*)$ admet une unique solution T-périodique.

Correction ▼ [004077]

Exercice 4078 Équation intégrale

Soit $E = \{\text{fcts} : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continues }\}$ et $\Phi : E \to E, f \mapsto g$ avec $g(x) = \int_{t=0}^{1} \inf(t,x) f(t)\,dt$.
Chercher les valeurs propres et les fonctions propres de Φ.

Correction ▼ [004078]

Exercice 4079 Matexo

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère : $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 3\}$.

Déterminer $\inf\limits_{f \in E} \int_{t=0}^{1} (f'(t) + kf(t))^2\,dt$. *Indication : poser $f' + kf = g$ et calculer $f(1)$ en fonction de g.*

Correction ▼ [004079]

Exercice 4080 Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000

Soient u, v, w trois applications bornées et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^\infty \|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite de terme général t_n tendant vers $+\infty$ telle que $u(t_n)$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,dt$ tend vers a.
2. Montrer que les suites de termes généraux $v_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt$ et $w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt$ tendent vers 0.

Correction ▼ [004080]

Exercice 4081 Centrale MP 2001

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y + f = 0$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction ▼ [004081]

Exercice 4082 Centrale MP 2001

Trouver les fonctions f, g continues vérifiant : $\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = x - 1 + g(x)$ et $\int_{t=0}^{x} g(t)\,dt = x - 1 + f(x)$.

Correction ▼ [004082]

Exercice 4083 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle $y' = \sin(x+y)$. Montrer que pour toute condition initiale l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$. Ensemble des points d'inflexion des courbes solutions ?

Correction ▼ [004083]

Exercice 4084 Polytechnique PC 2002

Soit l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d\cos(x))u(x) = 0$.

1. Existence et domaine de définition des solutions maximales A et B telles que $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ et $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$.
2. Montrer que A est paire et B est impaire.
3. Montrer que $A(k,d,x) = A(k,0,x) + 2d \int_{t=0}^{x} B(d,0,x-t) A(k,d,x) \cos(t)\,dt$.

Correction ▼ [004084]

Exercice 4085 $f \mapsto f+f'$ (Mines MP 2003)

Soit E l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.
Soit $u: E\to E, f\mapsto f+f'$.

1. Montrer que $u\in\mathscr{L}(E)$.
2. Est-ce que u est injectif ?
3. Est-ce que u est surjectif ?

Correction ▼ [004085]

Exercice 4086 Centrale MP 2004

On considère l'équation différentielle : $-y''+\frac{y}{p^2}=f$ où $p\in\mathbb{N}^*$ et f est une fonction continue donnée.

1. Donner les solutions de cette équation. Montrer que $x\mapsto -\int_{t=0}^{x} pf(t)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt$ est solution.
2. Montrer qu'il existe une unique solution telle que $y(0)=y(1)=0$. On la note u_p.
3. Montrer que (u_p) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Correction ▼ [004086]

Exercice 4087 Centrale MP 2004

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(\mathscr{E})\Leftrightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2}+(1-\lambda)x^2u(x)=0$.

1. Montrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est une fonction développable en série entière.
2. Déterminer les valeurs de λ telles que H soit une fonction polynomiale non nulle.

Correction ▼ [004087]

63 Équations différentielles linéaires (II)

Exercice 4088 Lemme de Gronwall (X MP* 2003)

Soient f,g deux fonctions continues et $a\in\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, t\geqslant 0,\ g(t)\geqslant 0 \quad\text{et}\quad f(t)\leqslant a+\int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,du$.
Montrer : $\forall\, t\geqslant 0,\ f(t)\leqslant a\exp\left(\int_{u=0}^{t} g(u)\,du\right)$.

Correction ▼ [004088]

Exercice 4089 $y''+y\geqslant 0$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)+f''(x)\geqslant 0$.
Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

Correction ▼ [004089]

Exercice 4090 $f''+f'+f\to 0$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f''(t)+f'(t)+f(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$. Démontrer que $f(t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$.

Correction ▼ [004090]

Exercice 4091 $f''\geqslant f+2/ch(x)^3$, Centrale PC 1997

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geqslant f(x) + \frac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x : $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$.

[004091]

Exercice 4092 $y' + ay = b$, $y(-\infty) = 0$

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x) \geqslant 1$ et $b(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

1. Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. On suppose $b(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Correction ▼ [004092]

Exercice 4093 $y'' + ay = 0$, $a > 0 \Rightarrow y$ s'annule

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

1. Soit y une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit z une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004093]

Exercice 4094 $y'' + ay' = 0$ a croissante positive => y est bornée

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$ (on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$). [004094]

Exercice 4095 $y'' + ay = 0$, a intégrable

Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$ (on commencera par prouver que si y_1, y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant).

Correction ▼ [004095]

Exercice 4096 Zéros entrelacés (Centrale MP 2003)

Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall\, x \in I,\ r(x) \geqslant q(x)$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \Leftrightarrow y'' + qy = 0, \qquad (E_2) \Leftrightarrow z'' + rz = 0.$$

1. Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?
2. Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
3. Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
4. Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Correction ▼ [004096]

Exercice 4097 Zéros des solutions de $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'équation $(*) \iff y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a, b continues.

1. Soit y une solution non nulle de $(*)$. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Soient y, z deux solutions de $(*)$ non proportionelles.
   (a) Montrer que y et z n'ont pas de zéros commun.

(b) Montrer que si u, v sont deux zéros consécutifs de y, alors z possède un unique zéro dans l'intervalle $]u, v[$ (étudier $\frac{z}{y}$).

Correction ▼ [004097]

Exercice 4098 $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$

Soit $\lambda > 0$ et y une solution de $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y a un zéro dans l'intervalle $]a, a + \pi[$. (Étudier $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t - a)$)

Correction ▼ [004098]

Exercice 4099 $y'' + e^t y = 0$

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est infini dénombrable.
2. On note a_n le $n$ème zéro positif de y. En utilisant les fonctions $\begin{cases} \varphi(t) = \sin\left(e^{a_n/2}(t - a_n)\right) \\ \psi(t) = \sin\left(e^{a_{n+1}/2}(t - a_n)\right), \end{cases}$ montrer que $\frac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$.
3. Donner un équivalent de a_n quand $n \to \infty$.

Correction ▼ [004099]

Exercice 4100 Conditions aux limites

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. Montrer qu'il existe une unique solution pour le problème aux limites : $y'' = f(t)y + g(t)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Correction ▼ [004100]

Exercice 4101 Comparaison de solutions

Soient $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues avec : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ q(x) < 0$. Soient $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y'' + p(x)y' + q(x)y \leqslant z'' + p(x)z' + q(x)z \\ y(a) \leqslant z(a),\ y'(a) < z'(a). \end{cases}$$

Montrer que : $\forall\, x > a,\ y(x) < z(x)$.

Correction ▼ [004101]

Exercice 4102 Système différentiel à coefficients positifs

Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto (a_{ij}(t))$ continue avec : $\forall\, t \geqslant 0,\ \forall\, i, j,\ a_{ij}(t) \geqslant 0$ et X une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que si toutes les coordonnées de $X(0)$ sont positives ou nulles il en est de même pour $X(t)$ pour tout t (commencer par le cas strictement positif).

Correction ▼ [004102]

Exercice 4103 Intégrale fonction d'un paramètre

On pose $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} e^{itx} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Former une équation différentielle satisfaite par f. En déduire f.

Correction ▼ [004103]

Exercice 4104 Ulm MP* 2000

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I.

On pose $E = \{f \in \mathscr{C}^2(I) \mid f(a) = f(b) = 0\}$. On considère enfin l'opérateur $K : f \mapsto \frac{f''}{\Delta}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(K) \subset]-\infty, 0[$.

2. Trouver un produit scalaire $(\ |\ )$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. On suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 2$. Soit $\lambda < 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle $\begin{cases} f_\lambda'' = \lambda \Delta f_\lambda \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$
   (b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros $(x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots)$ et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [004104]

Exercice 4105 Centrale MP 2001

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leqslant \int_0^\pi f'^2$.
   Indication : prolonger f en une fonction impaire 2π-périodique.
2. Soit une fonction q de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, à valeurs dans $]-\infty,1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe $\mathscr{C}^2$ s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''(t) + q(t)x(t) = 0$ est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et deux réels a,b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $x(0) = a$, $x(\pi) = b$ et $x''(t) + q(t)x(t) = f(t)$.

Correction ▼ [004105]

Exercice 4106 X MP* 2000

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur $\mathbb{R}$: $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Trouver une condtion nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment un.

Correction ▼ [004106]

Exercice 4107 X MP* 2000

Soit A coninue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit $\mathbb{R}^+$, et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y' = AY$ valant X_0 en $t = 0$, on a pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t) \geqslant 0$.

Correction ▼ [004107]

Exercice 4108 ENS MP 2002

Soit une application A de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $(x^2+1)^n$. Montrer qu'il existe X de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $(x^2+1)^n$, solution de $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$.
Indication : commencer par le cas $n = 1$, A constante.

Correction ▼ [004108]

Exercice 4109 X MP* 2003

1. Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $k > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{u=t_0}^t f(u)\,du$.
   Montrer que : $\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{u=t_0}^t e^{k(t-u)} g(u)\,du$.
2. Soient $A,B : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T > t_0$, $K > 0$ et $\eta > 0$ tels que : $\forall\, t \in [t_0,T],\ |||A(t)||| \leqslant K$ et $|||A(t) - B(t)||| \leqslant \eta$. On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy : $M(t_0) = I,\ M'(t) = A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0) = I,\ N'(t) = B(t)N(t)$). Montrer que : $\forall\, t \in [t_0,T],\ |||M_0(t) - N_0(t)||| \leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.
3. On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $X(t_0) = \alpha,\ X'(t) = A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0) = \alpha,\ Y'(t) = B(t)Y(t)$) où $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on sur $\|X_0(t) - Y_0(t)\|$?

Correction ▼ [004109]

64 Équations différentielles non linéaires (I)

Exercice 4110 Équations à variables séparables

1. $y' = y(1+y)$.
2. $y' = \sin x \cos y$.
3. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
4. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
5. $y' = \sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Correction ▼ [004110]

Exercice 4111 Équations homogènes

1. $y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $y' = \frac{x-y}{x+y}$.
3. $(x^2+y^2)y' = 2xy$.
4. $(x+y)y' = 2x-y$.

Correction ▼ [004111]

Exercice 4112 Équations de Bernouilli

1. $xy' + y = xy^3$.
2. $2xy' + y = \frac{2x^2}{y^3}$.
3. $\sqrt{x}y' - y + (x+2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.
4. $xy' + y = (xy)^{3/2}$.
5. $x^3y' = y(3x^2+y^2)$.

Correction ▼ [004112]

Exercice 4113 Équations de Riccati

1. $x^2(y'+y^2) = xy - 1$.

Correction ▼ [004113]

Exercice 4114 Divers ordre 1

$(x^2-y^2-1)y' = 2xy$: poser $z = \frac{y}{x^2+y^2-1}$.

Correction ▼ [004114]

Exercice 4115 Centrale MP 2004

Soit $n > 0$ et $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t)+y^2(t). \end{cases}$

1. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver une autre solution présentant une symétrie avec γ. Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$? En déduire une propriété géométriques des solutions maximales de (S).
2. Déterminer les courbes du plan formées des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy). En déduire quelques solutions particulières.

3. A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer Φ et en déduire toutes les courbes intégrales.

Correction ▼ [004115]

Exercice 4116 Chimie P 91

Résoudre numériquement le système

$$\begin{cases} y' = -y \\ z' = y - z \\ y(0) = 1 \text{ et } z(0) = 0. \end{cases}$$

Prendre $h = 0.1$ et faire un tableau avec 10 valeurs. Faire la résolution analytique.

Correction ▼ [004116]

Exercice 4117 Équations d'ordre 2

1. $y'' = \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
2. $2(2a - y)y'' = y'^2$.
3. $yy'' = y'^2 - y^2$: poser $z = y'/y$.

Correction ▼ [004117]

65 Équations différentielles non linéaires (II)

Exercice 4118 Centrale MP 2000

Existe-t-il des solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Que peut-on dire de l'équation : $y'^2 = 4y$? [004118]

Exercice 4119 Étude qualitative : $y' = x^3 + y^3$

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a \geqslant 0$, et $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition. Montrer que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$, que β est borné, et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$.

Correction ▼ [004119]

Exercice 4120 Étude qualitative : $y' = x - e^y$

Soit y une solution maximale de l'équation $y' = x - e^y$.

1. Montrer que y est décroissante puis croissante.
2. Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
3. Montrer que $\alpha > -\infty$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \alpha^-$.

Correction ▼ [004120]

Exercice 4121 Étude qualitative : $x' = \cos(t) + \cos(x)$

Soit x la solution maximale du problème de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in]0, \pi[$.
Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$. [004121]

Exercice 4122 Étude qualitative : $x' = x^2 - t$, ENS Cachan MP* 2005

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t, x) \,|\, x^2 - t < 0\}$.

Montrer que si x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$, alors x est définie sur $[t_0, +\infty[$ et la courbe intégrale reste dans D_0. En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction ▼ [004122]

Exercice 4123 Intervalle maximal pour $y' = f(y)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ strictement positive et y la solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$ du problème de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Montrer que $\beta = x_0 + \int_{t=y_0}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ et que $y \to +\infty$ lorsque $x \to \beta^-$. [004123]

Exercice 4124 Étude qualitative de $y' = 2ty + y^2$

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2$, $y(t_0) = y_0$. Soit y une solution maximale.

1. Montrer que $y = 0$ ou bien y ne s'annule pas.
2. On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de y.
   (a) Montrer que si $y_0 \geqslant -2t_0$, alors y est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.
   (b) Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, y et y' seraient bornées sur $]t_1, t_0]$.)
   (c) Donner l'allure générale de la courbe de y.
3. Résoudre l'équation en posant $z(t) = \frac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

[004124]

Exercice 4125 Équation admettant simultanément t et $\sin t$ comme solution

Existe-t-il une fonction $f : (y,t) \to f(y,t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation : $y^{(n)} = f(y,t)$ admette les deux solutions $y(t) = t$ et $y(t) = \sin t$ sur $\mathbb{R}$?
Même question avec l'équation $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y, t)$. [004125]

Exercice 4126 $y'' = F(x,y)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

Soit $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, l'application $y \mapsto F(x,y)$ est strictement croissante. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe au plus une solution à l'équation : $y'' = F(x,y)$ avec les conditions aux limites $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Correction ▼ [004126]

Exercice 4127 Comparaison d'équations

Soient y, z solutions de $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ z' = g(z,t) \\ y(0) = z(0) \end{cases}$ où f, g sont deux fonctions localement lipschitziennes telles que :

$$\begin{cases} \forall\, u,t,\ f(u,t) \leqslant g(u,t) \\ \forall\, u,v,t,\ u \leqslant v \Rightarrow f(u,t) \leqslant f(v,t). \end{cases}$$

1. Pour $\varepsilon > 0$, on note z_ε la solution de $\begin{cases} z'_\varepsilon = g(z_\varepsilon, t) + \varepsilon \\ z_\varepsilon(0) = y(0). \end{cases}$
   Montrer que $z_\varepsilon \geqslant y$ (sur leur domaine commun de définition).
2. Démontrer que $z_\varepsilon \to z$ lorsque $varepsilon \to 0^+$ uniformément sur tout intervalle borné. Conclusion ?

[004127]

Exercice 4128 Étude de l'équation

$$\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha \geqslant 0. \end{cases}$$

Soit y la solution maximale. On a l'intégrale première : $\frac{y'^2}{2} - \cos y = C = \alpha^2 - 1$.

1. (a) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que y est impaire.
2. On suppose ici que $C > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $y(T) = 2\pi$.
   (b) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = y(t) + 2\pi$.
3. On suppose ici que $-1 < C < 1$: On pose $C = -\cos\theta$, et $F(x) = \int_{u=0}^{x} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}$.
   (a) Soit a maximal tel que $y'(t) > 0$ sur $[0, a[$. Montrer que $y(a) = \theta$ et $F(\theta) = a$.
   (b) Montrer que y est $4a$-périodique.
4. Étudier les cas $C = 1$, $C = -1$.

[004128]

Exercice 4129 Résolution approchée de $y' = f(y,t),\ y(a) = y_0$ par la méthode d'Euler

On suppose que f est bornée par M et $|f(y,s) - f(z,t)| \leqslant K(|y-z| + |s-t|)$. On divise $[a,b]$ en n intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et on approche la solution y par la fonction z, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0) = y_0 \\ \text{sur }]a_k, a_{k+1}[,\ z' = f(z(a_k), a_k). \end{cases}$$

1. Soit $\varepsilon_k = |z(a_k) - y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\, t \in [a_k, a_{k+1}],\quad |y(t) - z(t)| \leqslant kh^2(M+1) + (1+Kh)\varepsilon_k \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$.
2. En déduire que $\sup|y-z| \leqslant (M+1)(e^{K(b-a)} - 1)\frac{b-a}{n}$.

[004129]

Exercice 4130 Lyon MP* 2000

1. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que la suite $(f'(a_n))$ tende vers 0.
2. Soit f une application minorée et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de $\mathbb{R}^p$ telle que la suite $(df(a_n))$ tende vers 0, c'est à dire $\nabla f(a_n)$ tend vers 0.

Correction ▼ [004130]

Exercice 4131 ENS MP* 2001

Soit un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Montrer qu'il existe une unique fonction $u = (u_1, u_2, u_3)$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3)$ et $u(0) = v$.
Indication : étudier la fonction $p \mapsto p + u \wedge p$ avant de pouvoir évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Correction ▼ [004131]

Exercice 4132 Centrale MP 2001

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ de la manière suivante : f_0 est la fonction constante 1 et pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} f_n(t - t^2)\, dt$.

1. En étudiant $f_{n+1} - f_n$ montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Que valent $f'(0)$ et $f'(1)$?

3. Étudier la concavité de f.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $1+x \leqslant f(x) \leqslant \exp(x)$.

Correction ▼ [004132]

Exercice 4133 ENS MP 2002

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^1$, et a,b des réels tels que $a < b$. On suppose que f est T-périodique par rapport à t et que l'on a : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ f(t,a) > 0$ et $f(t,b) < 0$.

1. Que peut-on dire des solutions du problème de Cauchy E_y : $(x'(t) = f(t,x(t)),\ x(0) = y \in [a,b])$?
2. Montrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[a,b]$.
3. Montrer qu'il existe une solution de E_y qui est T-périodique.

Correction ▼ [004133]

Exercice 4134 X MP* 2005

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il existe a,b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tous t,y : $(f(t,y) \mid y) \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t)$. Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t,y)$ est définie sur J entier.

Correction ▼ [004134]

Exercice 4135 Système autonome, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

On considère le système différentiel :

$$(V) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1). \end{cases}$$

dont on cherche les solutions (x,y) définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

1. Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^2((\mathbb{R}^{+*})^2, \mathbb{R})$ telle que pour toute solution (x,y) de V, $f(x,y)$ soit constante.
2. Montrer que les solutions de (V) sont périodiques.

Correction ▼ [004135]

---

66 Dérivées partielles

Exercice 4136 Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

1. $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$
2. $f(x,y) = \min(x,y^2)$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

[004136]

Exercice 4137 DL d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0,1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$.

Peut-on déterminer $\lim_{t\to 0} \frac{f(t^2,\operatorname{ch} t,e^t)}{f(t,\cos t,\operatorname{ch} t)}$?

Correction ▼ [004137]

Exercice 4138 Simplification

Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

Correction ▼ [004138]

Exercice 4139 Somme des angles d'un triangle

Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x,y,z sont strictement positifs. [004139]

Exercice 4140 Intégrale fonction de paramètres

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n) \mapsto \int_{t=0}^{1} f(t, x_1t + x_2t^2 + \cdots + x_nt^n)\,dt$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles. [004140]

Exercice 4141 Dérivées secondes composées

Soient $u,v,f,g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Correction ▼ [004141]

Exercice 4142 Les polynômes complexes sont harmoniques

Soient $P \in (x^2+1)^{[}X]$ et $f : \mathbb{R}^2 \to (x^2+1)^{\cdot}(x,y) \mapsto P(x+iy)$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. [004142]

Exercice 4143 Laplacien en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, et $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Correction ▼ [004143]

Exercice 4144 Laplacien en sphériques

Soient $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ avec $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi, \end{cases}$ et $F = f \circ \Phi$.

Vérifier que :

$$(\Delta f)\circ\Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs. [004144]

Exercice 4145 Laplacien en dimension n

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x_1,\dots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$.
Calculer le laplacien de F en fonction de f.

Correction ▼ [004145]

Exercice 4146 Contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathscr{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f. En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Correction ▼ [004146]

Exercice 4147 Contre-exemple au théorème de Schwarz (Centrale MP 2003)

Soit $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Correction ▼ [004147]

Exercice 4148 Dérivées d'ordre k distinctes

Trouver $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que les $k+1$ dérivées d'ordre k en $(0,0)$ soient distinctes.

[004148]

Exercice 4149 Les isométries conservent le laplacien

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\| \, \|_2$.

1. Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $(\Delta f)\circ\varphi = \Delta(f\circ\varphi)$.

[004149]

Exercice 4150 Changement de variables affine

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine.

1. Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $A \in \mathbb{R}^2$, on note $H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$ (*matrice Hessienne de* f). Montrer que : $\forall A \in \mathbb{R}^2$, $H_{f\circ\varphi}(A) = {}^tJ H_f(\varphi(A))J$.

[004150]

Exercice 4151 Formule de Leibniz

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Calculer $\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ en fonction des dérivées de f et g.

Correction ▼ [004151]

Exercice 4152 Intégration de formes différentielles

Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+y}{x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} \end{cases}$

Correction ▼ [004152]

Exercice 4153 Formes différentielles exactes

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(y)(xe^y\,dx + y\,dy)$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004153]

Exercice 4154

Quelles sont les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = f(x,y)\,d(x^2+y^2)$ soit exacte ?

Correction ▼ [004154]

Exercice 4155

Trouver les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = 2xz\,dx + f(y)g(z)\,dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)dz$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Correction ▼ [004155]

Exercice 4156 Équation associée à une différentielle exacte

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln x}{xy^2} \end{cases}$
2. Application : Résoudre l'équation différentielle : $(x\ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Correction ▼ [004156]

Exercice 4157 Équation aux dérivées partielles

Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$. [004157]

Exercice 4158 DL d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(a,b) + o(h^2+k^2).$$

[004158]

Exercice 4159 Ajustement linéaire

Problème d'ajustement linéaire : Etant donné n couples de réels (x_i, y_i) $1 \leqslant i \leqslant n$, on cherche une droite D d'équation $y = ax + b$ telle que $\mu(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimal.
On note $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$, et on suppose $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$.

1. Résoudre le problème.

2. Interpréter la relation $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

[004159]

Exercice 4160 Jacobien des fonctions symétriques

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \dots, x_n$. Calculer le déterminant jacobien de f.

Correction ▼ [004160]

Exercice 4161 Changement de variables

On pose $f(x,y) = (x+y, xy) = (u,v)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

[004161]

Exercice 4162 Changement de variables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Correction ▼ [004162]

Exercice 4163 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées :

$$\forall\, i,j,\ \forall\, A \in U,\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right| \leqslant M.$$

1. Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left| f(B) - f(A) - df_A(\vec{AB}) \right| \leqslant \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left| f(B) - f(A) - df_C(\vec{AB}) \right| \leqslant \frac{M\|\vec{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A,B]$.

[004163]

Exercice 4164 Application du théorème des fonctions implicites

On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0,0)$.

Correction ▼ [004164]

Exercice 4165 Théorème des fonctions implicites

1. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Correction ▼ [004165]

Exercice 4166 Théorème des fonctions implicites, Ensi P 91

Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Correction ▼ [004166]

Exercice 4167 Équation implicite $x \ln x = y \ln y$

Soit $f(x,y) = x \ln x - y \ln y$ $(x, y > 0)$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $f(x,y) = k$.

1. Suivant la position de $(a,b) \in \mathscr{C}_k$, préciser l'orientation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ en (a,b).
2. Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t\ln t$.
3. Dessiner $\mathscr{C}_0$. (Étudier en particulier les points $(0,1),(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)
4. Indiquer l'allure générale des courbes $\mathscr{C}_k$ suivant le signe de k.

[004167]

Exercice 4168 Fonction implicite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.
2. Montrer que l'on a alors : $\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

[004168]

Exercice 4169 Équation fonction de deux paramètres

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow x^5 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 1 = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage, V, de $(0,0)$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}&\varphi \text{ est } \mathscr{C}^\infty\\&\varphi(0,0) = 1\\&\forall\,(\lambda,\mu) \in V,\ \varphi(\lambda,\mu) \text{ est racine simple de } (*).\end{aligned}$$

Donner le DL à l'ordre 2 de φ en $(0,0)$.

Correction ▼ [004169]

Exercice 4170 Changement de variable singulier, Matexo

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même définie par $f(x,y) = (u,v)$, où

$$u(x,y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Calculer sa matrice jacobienne. Est-elle inversible localement ? Caractériser $f(\mathbb{R}^2)$.

Correction ▼ [004170]

Exercice 4171 Longueur d'un arc de courbe

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont les dérivées partielles sont bornées sur U et $t \in I \mapsto M_t$ une courbe paramétrée dans U de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $a,b \in I$ comparer les longueurs des arcs $\overset{\frown}{M_aM_b}$ et $\overset{\frown}{f(M_a)f(M_b)}$. [004171]

Exercice 4172 Différentielle du déterminant

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \det M$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on a pour $M,H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $df_M(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$.
Application : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$. Exprimer a_1 en fonction des cofacteurs de M. [004172]

Exercice 4173 Mise en facteur de x et y

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0,0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $g,h : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que :

$$\forall\,(x,y) \in U,\ f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$

2. Y a-t-il unicité de g et h ?
3. Généraliser au cas où U n'est pas convexe.

Correction ▼ [004173]

Exercice 4174 Fonctions convexes

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall\, x,y \in U,\ \forall\, t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1. On suppose que f est convexe.
   (a) Soient $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ tel que $x-h \in U$ et $x+h \in U$. Montrer :
   $$(1+t)f(x)-tf(x-h) \leqslant f(x+th) \leqslant (1-t)f(x)+tf(x+h).$$
   (b) Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n=2$ puis généraliser).
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $(x,y) \in U$ on a : $f(y) \geqslant f(x)+df_x(y-x)$. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n=2$.
3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$ la forme bilinéaire symétrique $d^2 f_x$ est positive.
   (b) Si, pour tout $x \in U$, $d^2 f_x$ est définie positive, montrer que f est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

Correction ▼ [004174]

Exercice 4175 Les racines d'un polynôme sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ des coefficients

Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.

1. Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P. Montrer que l'application $P \mapsto (x_1,\dots,x_n)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

[004175]

Exercice 4176 Non injectivité locale de l'exponentielle

Soit $f : \mathscr{M}_n((x^2+1)^) \to \mathscr{M}_n((x^2+1)^), M \mapsto \exp(M)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ et exprimer, pour $M,H \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$, $df_M(H)$ sous forme d'une série.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ tel que pour toutes matrices $A,B \in V$ on a : $\exp(A) = \exp(B) \Rightarrow A = B$.
3. Trouver une suite (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$ distinctes ayant même exponentielle et convergeant vers une matrice A (donc il n'existe pas de voisinage de A sur lequel la restriction de f est injective).
4. Donner de même un point de non injectivité locale dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [004176]

Exercice 4177 Caractérisation des isométries

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que f est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante (c'est-à-dire $df_x = df_y$ pour tous x, y, égalité dans $\mathscr{L}(E)$).
2. Soit X un ensemble non vide quelconque et $\varphi : X^3 \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall\, x,y,z \in X,\ \varphi(x,y,z) = \varphi(y,x,z) = -\varphi(z,y,x).$$

   Montrer que $\varphi = 0$ (lemme des tresses).
3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, df_x est une application orthogonale.

[004177]

Exercice 4178 Différentiabilité de la norme

Pour chacune des trois normes classiques sur $\mathbb{R}^2$ dire en quels points elles sont différentiables. [004178]

Exercice 4179 Difféomorphisme

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, h \in E,\ (df_x(h) \mid h) \geqslant \alpha \|h\|^2.$$

1. Montrer pour $x, y \in E$: $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geqslant \alpha \|x - y\|^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

[004179]

Exercice 4180 Difféomorphisme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et k-lipschitzienne avec $k < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x + f(y), y - f(x))$.
Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. [004180]

Exercice 4181 Partiellement dérivable $\Rightarrow$ continue ?

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner un exemple de fonction $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières, mais discontinue en au moins un point.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières *bornées* sur U. Montrer que f est continue.

Correction ▼ [004181]

Exercice 4182 Point non extrémal

On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Calculer $f(x, x^2)$. Conclusion ?

Correction ▼ [004182]

Exercice 4183 Contre-exemple au théorème de Leibniz

On pose : $f(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } y\geqslant 0 \text{ et } 0\leqslant x\leqslant \sqrt{y}\,; \\ 2\sqrt{y}-x & \text{si } y\geqslant 0 \text{ et } \sqrt{y}<x\leqslant 2\sqrt{y}\,; \\ 0 & \text{si } y\geqslant 0 \text{ et } 2\sqrt{y}<x \text{ ou } x\leqslant 0\,; \\ -f(x,-y) & \text{si } y<0. \end{cases}$ et : $F(y)=\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx$.

Faire un dessin, vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, calculer $F(y)$ pour $-\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant \frac{1}{4}$, $F'(0)$ et $\int_{x=0}^{1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,dx$.

[004183]

Exercice 4184 Centrale MP 2000

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $c>0$ tels que, pour tous x,y, $\|f(x)-f(y)\|\geqslant c\|x-y\|$.

1. Montrer que pour tous x,h, $\|df_x(h)\|\geqslant c\|h\|$.
2. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ (pour la surjectivité on considèrera, si $a\in\mathbb{R}^n$, le minimum de $\|f(x)-a\|^2$).

Correction ▼ [004184]

Exercice 4185 Centrale MP 2000

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

1. On suppose que $\Delta u>0$. Montrer que $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y)=\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}\setminus\Omega} u(x,y)$.
2. Même question en supposant seulement $\Delta u\geqslant 0$.
3. Soit $0<r_1<r_2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,r_1^2<x^2+y^2<r_2^2\}$. On suppose que u est continue sur $\overline{A}$, $\mathscr{C}^2$ sur A et que $\Delta u\geqslant 0$ sur A. On pose pose $M(r)=\max\limits_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$.

   Montrer que, pour tout $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, $M(r)\leqslant\frac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$.

   Indication : la fonction $v:(x,y)\mapsto\ln(x^2+y^2)$ vérifie $\Delta v=0$.

Correction ▼ [004185]

Exercice 4186 Mines MP 2001

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur le disque unité du plan, telle que son laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ soit nul.

1. Montrer $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$ ne dépend pas de $r\in[0,1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x,y)\,dxdy$ D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Correction ▼ [004186]

Exercice 4187 Mines MP 2001

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geqslant 1$ et $|g'(x)|<1$. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(f(x)+g(y),f(y)+g(x))$.

1. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
2. On suppose qu'il existe $k\in\,]0,1[$ tel que $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $|g'(x)|<k$; montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004187]

Exercice 4188 ENS MP 2002

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $|f(x)|/\|x\|\to+\infty$ lorsque $\|x\|\to\infty$. Prouver que ∇f est surjective sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004188]

Exercice 4189 ENS MP 2002

Soit n un entier > 0, $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(x)/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, et qu'en tout point la matrice hessienne de f est définie positive.
On pose $g(y) = \sup\{(x \mid y) - f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Étudier les propriétés de g.

Correction ▼ [004189]

Exercice 4190 $\int \varphi \circ f$, X MP* 2004

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On y définit une norme par : $\|f\| = \sqrt{\int_{t=0}^{1} f^2(t)\,dt}$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que φ'' est bornée. Pour $f \in E$ on pose $T(f) = \int_{t=0}^{1} \varphi(f(t))\,dt$.

1. Montrer que l'application ainsi définie $T : E \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que T est différentiable en tout point.

Correction ▼ [004190]

67 Étude d'extrémums

Exercice 4191 Étude de points critiques

Chercher les extrémums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

1. $3xy - x^3 - y^3$
2. $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$
3. $x^2y^2(1+3x+2y)$
4. $2x + y - x^4 - y^4$
5. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$
6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
8. $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$
9. $MA + MB - MO, \quad O = \mathrm{mil}(A,B)$

Correction ▼ [004191]

Exercice 4192 Distances aux sommets d'un triangle

Soit $A \in \mathbb{R}^p$ fixé et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, M \mapsto AM^2$ $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, M \mapsto AM$ (distance euclidienne)

1. Calculer les gradients de f et g en un point M.
2. Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :
   (a) $MA^2 + MB^2 + MC^2$.
   (b) $MA + MB + MC$.
   (c) $MA \times MB \times MC$.

Correction ▼ [004192]

Exercice 4193 Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle de cotés a, b, c.

1. Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a, b, c.
2. Montrer que $\frac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatéral.

Correction ▼ [004193]

Exercice 4194 Centrale MP 2000

On considère un vrai triangle ABC et f la fonction définie par : $f(M) = d(M,AB) \times d(M,AC) \times d(M,BC)$. Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC, et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

Correction ▼ [004194]

Exercice 4195 Loi de réfraction

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (0,a)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1 = \overline{(\vec{j},\vec{MA})}$ $\alpha_2 = \overline{(-\vec{j},\vec{MB})}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

[004195]

Exercice 4196 Centrale MP 2001

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Correction ▼ [004196]

Exercice 4197 Centrale MP 2001

D_1, D_2, D_3 sont trois droites d'un plan portant les côtés d'un triangle équilatéral de côté a. On pose

$$\varphi : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M,N,P) \mapsto MN + NP + PM.$$

Déterminer $\min \varphi$ et les triplets (M,N,P) où ce minimum est atteint.

Correction ▼ [004197]

Exercice 4198 Centrale MP 2006

E désigne l'espace affine euclidien classique. D_1, D_2, D_3 sont trois droites deux à deux non parallèles. Soit $f : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}, (M_1,M_2,M_3) \mapsto \|\vec{M_1M_2}\|^2 + \|\vec{M_2M_3}\|^2 + \|\vec{M_3M_1}\|^2$.

1. Montrer que f admet un minimum atteint pour un unique triplet.
2. Dans le cas où D_1, D_2, D_3 sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, trouver ce triplet.

Correction ▼ [004198]

Exercice 4199 Plus court chemin, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Déterminer le plus court chemin entre les pôles nord et sud d'une sphère en dimension 3.

Correction ▼ [004199]

Exercice 4200 Extremums liés, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur B et $x \in B$ tel que $f(x) = \max\{f(y), y \in B\}$.
Montrer que $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Correction ▼ [004200]

68 Équations aux dérivées partielles

Exercice 4201 $2\frac{\partial f}{\partial x}+3\frac{\partial f}{\partial y}=4f$

Résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x}+3\frac{\partial f}{\partial y}=4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t)=t$ $(t\in\mathbb{R})$.
(Étudier $\varphi : t\mapsto f(a+bt,a+ct)$ avec a,b,c bien choisis)

Correction ▼ [004201]

Exercice 4202 $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=\text{cste}$

Déterminer les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=a$ où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u=x+y$, $v=x-y$.

Correction ▼ [004202]

Exercice 4203 $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{x}{y}.\end{cases}$

Correction ▼ [004203]

Exercice 4204 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U=\{(x,y)\text{ tq }x>0,\ y>0\}$. Trouver les applications $f : U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$. On utilisera le changement de variable : $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

Correction ▼ [004204]

Exercice 4205 $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$

Résoudre sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$

Correction ▼ [004205]

Exercice 4206 $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=2f$

Soit $f : U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=2f$. où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On pose $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial\rho}$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}$, puis trouver f ...

1. Si $U=\{(x,y)\text{ tq }x>0\}$.
2. Si $U=\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [004206]

Exercice 4207 Ensi Physique P 94

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x=\frac{u^2+v^2}{2}$ et $y=\frac{u}{v}$.

Correction ▼ [004207]

Exercice 4208 Fonctions homogènes

Soit $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\text{ tq }(x,y)\neq(0,0)\}$, et $f : \Omega\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y).$$

(On étudiera $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$) [004208]

Exercice 4209

Résoudre l'équation : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha(\alpha-1)f$ où α est un réel fixé, $\alpha\neq\frac{1}{2}$. On posera $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

Correction ▼ [004209]

Exercice 4210 Équation d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*)\Leftrightarrow a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

où f est une fonction inconnue : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u=x+\alpha y$, $v=x+\beta y$.

1. Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.
2. En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :
   $(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0,\qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=0,\qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0.$

Correction ▼ [004210]

Exercice 4211 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

Trouver les applications $f:(\mathbb{R}^{+*})^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On utilisera le changement de variables : $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

Correction ▼ [004211]

Exercice 4212 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}$

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto g(y/x)$. Trouver g telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}$.

Correction ▼ [004212]

Exercice 4213 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $g(x,y)=f(2x+y,2x-y)$.

1. Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f.
2. Trouver f telle que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

Correction ▼ [004213]

Exercice 4214 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

On considère l'équation aux dérivées partielles sur $\Omega=(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Résoudre cette équation en posant $\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{x}{y}.\end{cases}$

Correction ▼ [004214]

Exercice 4215 $f(\cos x/\operatorname{ch} y)$ harmonique

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On considère $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

Déterminer f pour que g vérifie : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Correction ▼ [004215]

Exercice 4216 $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ préserve les fonctions harmoniques

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto F(u,v)$ et f définie par : $f(x,y) = F(u,v)$.
Montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$ entraîne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Correction ▼ [004216]

Exercice 4217 $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = y$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(u,v) = f(uv, u+v)$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.
2. Résoudre l'équation : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = y$.

Correction ▼ [004217]

Exercice 4218 $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ tq $\Delta f = -f$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g(x,y,z) = \frac{f(r)}{r}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Déterminer f de sorte que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -g$.

Correction ▼ [004218]

Exercice 4219 $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

1. Trouver les fonctions $g : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u > v\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $\frac{\partial}{\partial u}\left(g + v\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(g + u\frac{\partial g}{\partial u}\right)$ (penser au théorème de Poincaré).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ l'équation : $x^4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en posant $u = y + \frac{1}{x}$, $v = y - \frac{1}{x}$.

Correction ▼ [004219]

Huitième partie
Calcul intégral

69 Intégrale de Riemann

Exercice 4220 Densité des fonctions en escalier

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt = 0$. Démontrer que $f = 0$.

[004220]

Exercice 4221 Changements de signe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que : $\forall\, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $\int_{t=a}^{b} t^k f(t)\,dt = 0$.
Démontrer, par récurrence, que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$ (raisonner par l'absurde).

[004221]

Exercice 4222 Formule de la moyenne généralisée

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.
3. Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_{t=0}^{x} t f(t)\,dt$.

Correction ▼ [004222]

Exercice 4223 Inégalité de Jensen

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} g(f(t))\,dt$. [004223]

Exercice 4224 $\sqrt{1+f^2}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue positive. On pose $A = \int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$.
Montrer que $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_{t=0}^{1}\sqrt{1+f^2(t)}\,dt \leqslant 1+A$.

[004224]

Exercice 4225 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+}\int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t\,\ln(1+t^2)}{\sin^2 t\,\operatorname{sh} t}\,dt$. [004225]

Exercice 4226 Calcul de limite

Pour $0 < a < b$, déterminez $\lim_{x\to 0^+}\int_{t=ax}^{bx} \frac{1-\cos u}{u^3}\,du$.

Correction ▼ [004226]

Exercice 4227 $\int f + \int f^{-1}$

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue, bijective, strictement croissante.
Calculer $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt + \int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,du$ (faire un dessin, et commencer par le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$).

[004227]

Exercice 4228 Sommes de Riemann

1. Trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.
3. Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.
4. Trouver $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.
5. Donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
6. Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Correction ▼ [004228]

Exercice 4229 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$.

[004229]

Exercice 4230 Moyenne géométrique

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \to \exp \int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.
(On pourra utiliser : $\forall\, x \geqslant -\frac{1}{2},\ x - x^2 \leqslant \ln x \leqslant x$) [004230]

Exercice 4231

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Correction ▼ [004231]

Exercice 4232 Maximum-minimum

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \min(x,b_n)\,dx,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \max(x,a_n)\,dx.$$

Correction ▼ [004232]

Exercice 4233 Intégrale de $\ln|x-e^{it}|$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$, on pose $I = \int_{t=0}^{2\pi} \ln|x-e^{it}|\,dt$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer I.

[004233]

Exercice 4234 Intégrale de $|f|$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{t=a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt\right|$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Montrer que $I_n \to \int_{t=a}^{b} |f(t)|\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

[004234]

Exercice 4235 Usage de symétrie

Soit $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.

Correction ▼ [004235]

Exercice 4236 Usage de symétrie

Calculer $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}\,dt$.

Correction ▼ [004236]

Exercice 4237 Usage de symétrie

Calculer $\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt$. On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$. [004237]

Exercice 4238 École de l'air 94

On note $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\,dx$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ et $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. En déduire I_n en fonction de n.

Correction ▼ [004238]

Exercice 4239 Calcul d'intégrale

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$.

Correction ▼ [004239]

Exercice 4240 arcsin et arccos

Simplifier $\int_{t=0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

Correction ▼ [004240]

Exercice 4241 Approximation des rectangles pour une fonction lipchitzienne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, K-lipchitzienne.

Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$.

[004241]

Exercice 4242 Approximation des tangentes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Soit $I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1. Donner une interprétation géométrique de I_n.
2. Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt - I_n\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$.

[004242]

Exercice 4243 Approximation des trapèzes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_{t=a}^{b} \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$.
2. Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $I = \int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$, et I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Démontrer que $|I - I_n| \leqslant \frac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

[004243]

Exercice 4244 Calcul de limite

Étudiez la limite de la suite définie par $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Correction ▼ [004244]

Exercice 4245 Aire sous une corde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M' = \|f'\|_\infty$.

1. En majorant f par une fonction affine par morceaux, démontrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right| \leqslant M'\frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Quand y a-t-il égalité ?

[004245]

Exercice 4246 Échange de décimales

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$ (échange des deux $1^{\text{ères}}$ décimales).

Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\int_{t=0}^{1} f(t)\,dt$. [004246]

Exercice 4247 $\int f(t)\cos(t)\,dt$

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ convexe de classe $\mathscr{C}^2$. Quel est le signe de $I=\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos t\,dt$?

Correction ▼ [004247]

Exercice 4248 Convexité

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et $g(x)=\int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Montrer que g est convexe. [004248]

Exercice 4249 Expression d'une primitive n-ème de f

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $g(x)=\int_{t=a}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$. Montrer que $g^{(n)}=f$. [004249]

Exercice 4250 Théorème de division

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+p}$ telle que $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$.
On pose $g(x)=\frac{f(x)}{x^n}$ pour $x\neq 0$ et $g(0)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale.
2. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^p$ et $|g^{(p)}(x)|\leqslant\frac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)|$ tel que $0\leqslant t\leqslant 1\}$.

[004250]

Exercice 4251 Fonction absolument monotone

Soit $f:[0,a[\,\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $[0,a[$.

1. Montrer que la fonction $g_n: x\longmapsto\frac{1}{x^n}\left(f(x)-f(0)-\dots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right)$ est croissante.
2. On fixe $r\in\,]0,a[$. Montrer que la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Correction ▼ [004251]

Exercice 4252 Deuxième formule de la moyenne

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, f positive décroissante.
On note $G(x)=\int_{t=a}^{x} g(t)\,dt$, et

$$M=\sup\{G(x),\ x\in[a,b]\}\qquad m=\inf\{G(x),\ x\in[a,b]\}.$$

1. On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $mf(a)\leqslant\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt\leqslant Mf(a)$.
2. Démontrer la même inégalité si f est seulement continue, en admettant qu'elle est limite uniforme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ décroissantes.
3. Démontrer enfin qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt=f(a)\int_{t=a}^{c} g(t)\,dt$.

[004252]

Exercice 4253 Inégalité de la moyenne

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, f décroissante, et $0\leqslant g\leqslant 1$. On note $G(x)=a+\int_{t=a}^{x} g(t)\,dt$.
Démontrer que $\int_{t=a}^{b} fg(t)\,dt\leqslant\int_{t=a}^{G(b)} f(t)\,dt$.

[004253]

Exercice 4254 Une inégalité

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a)=0$ et $\forall\ t\in[a,b],\ 0\leqslant f'(t)\leqslant 1$. Comparer $\int_{t=a}^{b} f^3(t)\,dt$ et $\left(\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt\right)^2$.
On introduira les fonctions : $F(x)=\int_{t=a}^{x} f(t)\,dt$, $G(x)=\int_{t=a}^{x} f^3(t)\,dt$, et $H=F^2-G$.

Correction ▼ [004254]

Exercice 4255 Intégrales de Wallis

On note $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

1. Comparer I_n et $\int_{t=0}^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.
2. En coupant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que $I_n \to 0$ pour $n \to \infty$.
3. Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
4. Démontrer que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5. Démontrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de C_{2n}^n pour $n \to \infty$.

[004255]

Exercice 4256 Norme L^∞

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue non identiquement nulle. On pose $I_n = \int_{t=a}^{b} f^n(t)\,dt$ et $u_n = \sqrt[n]{I_n}$.
Soit $M = \max\{f(x) \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b\}$ et $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.

1. Comparer M et u_n.
2. En utilisant la continuité de f en c, démontrer que : $\forall\ \varepsilon \in]0, M[$ il existe $\delta > 0$ tel que $I_n \geqslant \delta(M-\varepsilon)^n$.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

[004256]

Exercice 4257 Lemme de Lebesgue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$, (lorsque $n \to \infty$) ...

1. si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. si f est en escalier.
3. si f est continue.

[004257]

Exercice 4258 Plus grande fonction convexe minorant f

1. Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.
   On suppose que : $\forall\ x \in I,\ f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \tilde{f}(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f(t)dt$ (commencer par le cas où f est en escalier).

[004258]

Exercice 4259 Centrale PC 1998

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continue.

1. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :
   $\forall\ k \in [[0, n-1]],\ \int_{t=x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$.
2. Étudier $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Correction ▼ [004259]

Exercice 4260 Mines MP 2000

Soit $f : \mathbb{R} \to$

*declasse*C^1, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}$ est un entier.

Correction ▼ [004260]

Exercice 4261 Fonctions affines

Soit $E = \mathscr{C}([a,b])$, et $F = \{f \in \mathscr{C}^2([a,b]),\ \text{tel que}\ f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F$ vérifiant $g'' = f$ si et seulement si $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} x f(x)\,dx = 0$.
2. Soit $f \in E$ telle que $\int_{x=a}^{b} f(x)g''(x)\,dx = 0$ pour toute fonction $g \in F$. Montrer que f est affine.

Correction ▼ [004261]

Exercice 4262 Mines MP 2001

Soit $a < 0 < b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

Correction ▼ [004262]

---

70 Primitives

Exercice 4263 Fractions rationnelles

$\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\frac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{3(x^3-1)}$
$\frac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$
$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
$\frac{1}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x^2}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x}{(x^4+1)^2}$	$\frac{\arctan x^2}{4} + \frac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\arctan(x+1)$
$\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{11}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\frac{1}{x^{20}-1}$	$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1) - \sin k\alpha\arctan\left(\frac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\right)\right] + \frac{1}{20}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$
$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\frac{1}{(b-a)^n}\ln\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

[004263]

Exercice 4264 Fonctions trigonométriques

$\frac{1}{\sin x\sin 4x}$	$-\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\left\lvert\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$
$\frac{\tan x}{1+\tan x}$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$
$\frac{1}{\sin x+\sin 2x}$	$\frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) - \frac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$
$\frac{1}{\cos x\cos 2x}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{argth}(\sqrt{2}\sin x) - \mathrm{argth}(\sin x)$
$\frac{1}{\sin x\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$	$-2\sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x}} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{2\sin x}}$ (poser $u = 1/\sin x$)
$\frac{a\sin x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}$	$-\arctan\left(\frac{\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}{a}\right)$

[004264]

Exercice 4265 Radicaux

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$
$\frac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$	$-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{3}{2}\arcsin(x-3/2)$
$\frac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$	$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
$\frac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$ (poser $x=1+2\cos\varphi$)
$\frac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$	$(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4})+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$
$x+\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$ $(n\neq 1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$\frac{1}{6}\ln\left[\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}, u=\sqrt[3]{1+1/x^3}$ (poser $v=1/x^3$)

[004265]

Exercice 4266 Diverses primitives

$x^k\ln x$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x-\frac{1}{k+1}\right)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x$
$\frac{x^2+a}{x^2+1}\arctan x$	$\frac{1}{2}\big((2x+(a-1)\arctan x)\arctan x-\ln(1+x^2)\big)$
$\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1/x}$	$xe^{1/x}$
$\frac{x}{\cos^2 x}$	$x\tan x+\ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$	$2\arctan\sqrt{e^x-1}$
$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$	$(x+2)\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}-\ln\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\big)$
$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$	$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}$
$e^{\arcsin x}$	$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arcsin x}$
$x(\cos^2 x)e^{-x}$	$\frac{e^{-x}}{50}\big((3-5x)\cos 2x+(4+10x)\sin 2x-25(x+1)\big)$
$(x^2+x+1)e^{2x}\cos x$	$(\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{39}{125})e^{2x}\cos x+(\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{25}+\frac{27}{125})e^{2x}\sin x$

[004266]

Exercice 4267 Intégrales définies

$\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=\frac{3\pi}{16}$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^3 t\,dt=\frac{4}{15}$

$\int_{t=0}^{\pi/2}t^2\cos t\,dt=\frac{\pi^2}{4}-2$

$\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2}t^2\sin t\cos^2 t\,dt=0$

$\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\frac{\pi}{4}$

$\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{dt}{1+\sin t}=1$

$\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,dt=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$

$\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{\sqrt{1-a\sin t}}\,dt=\frac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$

$\int_{t=0}^{1}t\ln t\,dt=-\frac{1}{4}$

$\int_{t=0}^{1}\arcsin t\,dt=\frac{\pi}{2}-1$

$\int_{t=0}^{3}\frac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\int_{t=0}^{1}\frac{t^2\arctan t}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\sqrt{2}$

$\int_{t=0}^{\ln 2}\sqrt{e^t-1}\,dt=2-\frac{\pi}{2}$

$\int_{t=4}^{9}\frac{dt}{\sqrt{t}-1}=2+2\ln 2$

$\int_{t=0}^{1}\frac{te^t}{\sqrt{e^t+1}}\,dt=4\sqrt{2}-2\sqrt{e+1}+4\ln\left[\frac{\sqrt{e+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right]-2$

$\int_{t=0}^{1}\frac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,dt=a\ln\left\lvert\frac{1-a}{1+a}\right\rvert-\ln(1-a^2)$

$\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}(3 - \frac{4}{\sqrt{3}})$
$\int_{t=-1}^{1} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$
$\int_{t=-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

[004267]

71 Intégrale généralisée

Exercice 4268 Étude de convergence

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ (cv)
$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\, dt$ (dv)
$\int_{0}^{1} \frac{t^\alpha-1}{\ln t}\, dt$ (cv ssi $\alpha > -1$)
$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$ (dv)
$\int_{0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) dt$ (dv)
$\int_{0}^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$ (cv)
$\int_{0}^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, dt$ (cv ssi $\alpha > 1$)
$\int_{0}^{1} \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ (dv)
$\int_{0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\, dt$ (cv ssi $0 < \beta-\alpha < 1$ ou $\alpha = 0$)
$\int_{0}^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$ (cv)
$\int_{0}^{1} \frac{dt}{\arccos t}$ (cv)
$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\, dt$ (dv)
$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\, dt}{(t^2-1)^\alpha}$ (cv ssi $0 < \alpha < 1$)
$\int_{0}^{1} \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\, dt$ (cv ssi $\alpha < \beta+1$)
$\int_{0}^{+\infty} t^\alpha\left(1-e^{-1}\sqrt{t}\right) dt$ (cv ssi $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$)
$\int_{0}^{1} \sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1}tt^{-k}\, dt$ (cv)

[004268]

Exercice 4269 Fractions rationnelles

$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \pi$
$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)} = \frac{\pi}{2|\sin\alpha|}$
$\int_{0}^{+\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{3\pi}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)(t^2+a^2)} = \frac{\pi}{1+|a|}$
$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^6(1+t^{10})} = \frac{4-\pi}{20}$

[004269]

Exercice 4270 Fonctions trigonométriques

$\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2+\sin t+\cos t} = 2\pi\sqrt{2}$
$\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\, dt = \int_0 +\infty \frac{2t^2\, dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_{0}^{\pi/2} \frac{dt}{3\tan t+2} = \frac{\pi+3\ln(3/2)}{13}$

$\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a\sin^2 t+b\cos^2 t)^2} = \frac{\pi(a+b)}{2\sqrt{ab}^3}$
$\int_0^{\pi/4} \cos t \ln(\tan t)\,dt = -\ln(1+\sqrt{2})$

[004270]

Exercice 4271 Radicaux

$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \frac{\pi}{2}$
$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}} = \frac{9}{2}$
$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi$
$\int_0^1 \frac{t^5\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{8}{15}$
$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2-t^3}} = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
$\int_0^1 \arctan\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

[004271]

Exercice 4272 Exponentielles

$\int_2^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)} = \ln\left(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}}\right)$
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^4 t+\mathrm{sh}^4 t} = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$

[004272]

Exercice 4273 Divers

$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt = 12$
$\int_0^1 \arcsin t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$
$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = -2\ln 2$
$\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,dt = -\frac{1}{32}$
$\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\frac{\pi\ln 2}{2}$
$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = 4\ln 2 - 4$ $(u = \sqrt{1-t})$
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$ $(u = 1/t)$
$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \ln 2 - \frac{\pi}{2}\left(u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$
$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)$
$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt = a\pi$
$\int_0^{+\infty} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{t\,dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|(a^2+1)}$

[004273]

Exercice 4274 Centrale PC 1999

Soit (a_k) une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k = 0$. Étudier la convergence de $\int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \cos(a_k t)\,\frac{dt}{t}$. [004274]

Exercice 4275 Chimie P 91

Existence et calcul de $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1-x\cos t}$.

Correction ▼ [004275]

Exercice 4276 Chimie P 1996

Convergence et calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t\,dt}{\operatorname{sh} t}$ (on pourra décomposer l'intégrande en somme d'une série de fonctions).

Correction ▼ [004276]

Exercice 4277 Calcul par récurrence

On pose $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\sin t)\,dt$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$ et en déduire I_n en fonction de n.

Correction ▼ [004277]

Exercice 4278 Calcul par récurrence

Soit $\alpha \in]0,\pi[$ et $I_n = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\cos nt\,dt}{1-\sin\alpha\cos t}$.
Calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de I_{n+1} puis exprimer I_n en fonction de α et n.

Correction ▼ [004278]

Exercice 4279 Calcul par récurrence

Calculer par récurrence : $I_n = \int_{t=0}^{1} \frac{t^n\,dt}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$.

Correction ▼ [004279]

Exercice 4280 Mines-Ponts 1999

Calculer $I_n = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

Correction ▼ [004280]

Exercice 4281 Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.
2. Montrer que $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,dt$ est comprise entre $A_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$ et $B_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \operatorname{cotan}^2 t \sin^2 nt\,dt$.
3. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.
4. Lorsque $n \to \infty$ montrer que $\frac{I_n}{n} \to J = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Correction ▼ [004281]

Exercice 4282 $\int_0^\infty$ périodique$/t\,dt$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique de période $T > 0$. On note $m = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,dt$. Montrer que $\int_{t=T}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge si et seulement si $m = 0$. [004282]

Exercice 4283 $\int_0^\infty f(t)/t\,dt$

Soit f une application continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. On pourra introduire la fonction $F(x) = \int_{t=1}^{x} f(t)\,dt$. [004283]

Exercice 4284 Polynôme$\times e^{-t}$

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (a_0,\dots,a_n)$ avec $a_k = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^k P(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de φ.
2. Montrer que φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

[004284]

Exercice 4285 Constante d'Euler

Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^2}\, dt$ en fonction de la constante d'Euler.

Correction ▼ [004285]

Exercice 4286 Constante d'Euler

Soit γ la constante d'Euler. Montrer que ...

1. $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} \ln t\, dt = -\gamma$.
2. $\int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\, dt = \gamma$.
3. $\int_{t=0}^{1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) dt = \gamma$.

Correction ▼ [004286]

Exercice 4287 Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue croissante. On pose $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

1. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\, dt$ converge, montrer que $S_n \to \int_{t=a}^{b} f(t) dt$ lorsque $n \to \infty$.
2. Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\, dt$ diverge, montrer que $S_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.

[004287]

Exercice 4288 Sommes de Riemann

Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

Correction ▼ [004288]

Exercice 4289 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\int^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.
2. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

[004289]

Exercice 4290 Comparaison série-intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On pose, sous réserve de convergence, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$ pour $t > 0$.

1. Si f est monotone et intégrable, montrer que $g(t)$ existe pour tout $t > 0$ et que l'on a $tg(t) \to \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\, du$ lorsque $t \to 0^+$.
2. Même question en supposant f de classe $\mathscr{C}^1$ et f, f' intégrables.
3. On suppose maintenant f de classe $\mathscr{C}^2$ et f, f', f'' intégrables.
   Montrer que $g(t) = \frac{1}{t} \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\, du + \frac{f(0)}{2} + O_{t\to 0^+}(t)$.

Correction ▼ [004290]

Exercice 4291 Valeur moyenne d'une variable aléatoire à densité

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} tf(t)\, dt$ converge. On pose $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\, dt$.

1. Justifier l'existence de $F(x)$, et montrer que $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \to +\infty$.
2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} F(t)\, dt = \int_{t=0}^{+\infty} tf(t) dt$.

[004291]

Exercice 4292 $\int_0^\infty f(t)/t^2\,dt$

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\exists\ \alpha>0$ tel que $\forall\ x\geqslant 0,\ f'(x)\geqslant\alpha$. Montrer que $\int_{t=1}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ diverge.

[004292]

Exercice 4293 $x(f(x)-f(x+1))$

Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\int_{t=1}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $xf(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$, puis que $\int_{t=1}^{+\infty}t(f(t)-f(t+1))\,dt$ converge, et calculer la valeur de cette intégrale.

Correction ▼ [004293]

Exercice 4294 $f(|t-1/t|)$

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.
Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt=\int_{u=0}^{+\infty}f\left(\left|u-\frac{1}{u}\right|\right)du$.

[004294]

Exercice 4295 $(f(ax)-f(x))/x$

1. Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\begin{cases}f(x)\to\ell\\ f(x)\text{ si }x\to 0^+\to L\text{ si }x\to+\infty.\end{cases}$

   Pour $a>0$, établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt$.
2. Application : Calculer $\int_{t=0}^{1}\frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Correction ▼ [004295]

Exercice 4296 $f(t+a)-f(t)$, Ensi PC 1999

1. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}(f(t+a)-f(t))\,dt$ converge.
2. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty}(\arctan(t+1)-\arctan(t))\,dt$.

Correction ▼ [004296]

Exercice 4297 Valeur moyenne

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\int_{t=-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge. On pose $F(x)=\frac{1}{2}\int_{t=x-1}^{x+1}f(t)\,dt$.
Montrer que $\int_{t=-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$.
Démontrer le même résultat en supposant seulement la convergence de $\int_{t=-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$.

Correction ▼ [004297]

Exercice 4298 $(\int tf(t)\,dt)/x$

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x}tf(t)\,dt\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

Correction ▼ [004298]

Exercice 4299 f uniformément continue

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que $f(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$(raisonner par l'absurde).
2. Si f est positive, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}f^2(t)\,dt$ converge.

3. Donner un contre-exemple si f n'est pas de signe constant.

[004299]

Exercice 4300 f décroissante $\Rightarrow xf(x) \to 0$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Si $f(x) \to L$ lorsque $x \to +\infty$, combien vaut L ?
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Si f est décroissante, montrer que $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

[004300]

Exercice 4301 $\int e^{-t}/t, dt$

On pose $f(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Chercher $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0^+$.

Correction ▼ [004301]

Exercice 4302 Intégrale de Gauss

1. Montrer que pour $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ on a : $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2}$ et pour x quelconque : $e^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
2. Calculer les intégrales $I_n = \int_{t=0}^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $J_n = \int_{t=0}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ en fonction des intégrales : $K_p = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^p t\,dt$.
3. On admet que $K_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$ quand $p \to \infty$. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004302]

Exercice 4303 Intégrales de Gauss

On admet que $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer les intégrales : $I_n = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [004303]

Exercice 4304 Mines-Ponts MP 2005

Nature et calcul de $\int_{x=0}^{+\infty} \exp\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right) dx$?

Correction ▼ [004304]

Exercice 4305

Existence de $\int_{x=0}^{+\infty} \sin(x^4+x^2+x)\,dx$.

Correction ▼ [004305]

Exercice 4306 $\cos(P(t))$

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \cos(P(t))\,dt$ converge.

Correction ▼ [004306]

Exercice 4307 Ensi PC 1999

Soient $I = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\,du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Correction ▼ [004307]

Exercice 4308 f et f'' de carrés sommables

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} f''^2(t)\,dt$ convergent. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f'^2(t)\,dt$ converge. [004308]

Exercice 4309 $f' \leqslant 1$, Ulm 1999

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrable.

1. On suppose $f' \leqslant 1$. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Est-ce encore vrai si on suppose seulement $f' \leqslant 1+g$ avec g intégrable ?

[004309]

Exercice 4310 Intégrales emboitées

Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty}\int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\,dx$.

Correction ▼ [004310]

Exercice 4311 Centrale MP 2001

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que ff'' et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que f est uniformément continue et qu'elle tend vers zéro en $+\infty$.

Correction ▼ [004311]

Exercice 4312 X MP* 2000

Donnez un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\int_{t=0}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

Correction ▼ [004312]

72 Intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 4313 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\,dt$.

Correction ▼ [004313]

Exercice 4314 Calcul de limite, Ensi P 90

Calculer les limites : $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,dt$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt$.

Correction ▼ [004314]

$\frac{t}{\tan^2 t} = \frac{1}{t} + \varphi(t)$ avec φ prolongeable par continuité en 0, donc $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,dt = \ln 3$.
$\frac{t^2}{t+e^{3t}} = t^2 + o(t^2)$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt = \frac{1}{3}$. **Exercice 4315** Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}\int_{t=3}^{x^2+x} \frac{\sin t\,dt}{3+\ln(\ln t)}$.

Correction ▼ [004315]

Exercice 4316 Calcul de limite

Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=x}^{x^2} \frac{e^{-t}\,dt}{\sin t \ln t}$.

Correction ▼ [004316]

Exercice 4317 Série d'intégrales, Esem 91

Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

Correction ▼ [004317]

Exercice 4318 $\sin(t)/(t+x)$

1. Prouver l'existence pour $x>0$ de $I(x)=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}I(x)$.

Correction ▼ [004318]

Exercice 4319 Calcul de limite

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x\to0^+}\int_{t=0}^{1}\frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004319]

Exercice 4320 Calcul d'équivalent, Mines 1999

Donner un équivalent pour $x\to+\infty$ de $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{x^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004320]

Exercice 4321 Calcul de limite

Soit $a>0$. Donner le DL en $x=1$ à l'ordre 3 de $f(x)=\int_{t=a/x}^{ax}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004321]

Exercice 4322 $(\int f^x)^{1/x}$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x)=\left(\int_{t=a}^{b}(f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.

1. Montrer que $\varphi(x)\to\max(f)$ lorsque $x\to+\infty$.
2. On suppose $f>0$ et $b-a=1$. Montrer que $\varphi(x)\to\exp\left(\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right)$ lorsque $x\to0^+$.

Correction ▼ [004322]

Exercice 4323 $t^nf(t)$

Soit $I_n=\int_{t=0}^{1}t^n\ln(1+t^2)\,dt$. Montrer que $I_n\to0$ lorsque $n\to\infty$.

[004323]

Exercice 4324 $t^nf(t)$

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1}t^nf(t)\,dt=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

[004324]

Exercice 4325 $f(t^n)$

1. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1}f(t^n)\,dt\to f(0)$ lorsque $n\to\infty$.
2. Chercher un équivalent pour $n\to\infty$ de $\int_{t=0}^{1}\frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.
3. Chercher un équivalent pour $n\to\infty$ de $-1+\int_{t=0}^{1}\sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004325]

Exercice 4326 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+t^n}$.

Correction ▼ [004326]

Exercice 4327 $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004327]

Exercice 4328 $f(t^n)$

Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=1}^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Correction ▼ [004328]

Exercice 4329 Calcul de limite

Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{x+2}\,dx$.

[004329]

Exercice 4330 Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} nf(t)e^{-nt}\,dt$.

Correction ▼ [004330]

Exercice 4331 $(1-x/n)^n$, Ensi PSI 1998

Soit $x \in [0,n]$. Montrer que $(1-x/n)^n \leqslant e^{-x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1-x/n)^n\,dx$.

Correction ▼ [004331]

Exercice 4332 Équation intégrale, Ensi P 91

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$.

Correction ▼ [004332]

Exercice 4333 $\tan^n t$, Ensi Physique P 94

On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,dt$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Calculer I_n en fonction de n.
3. Que peut-on en déduire ?

Correction ▼ [004333]

Exercice 4334 Calcul de limite, École de l'air 94

Chercher $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$.

Correction ▼ [004334]

Exercice 4335 Approximation de la mesure de Dirac

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue atteignant son maximum en un unique point $c \in \,]a,b[$.

1. Soit $\mu > 0$ tel que $[c-\mu, c+\mu] \subset [a,b]$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \left(\int_{t=a}^{b} f^n(t)\,dt \Big/ \int_{t=c-\mu}^{c+\mu} f^n(t)\,dt \right)$.

2. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^{b} f^n(t)g(t)\,dt \Big/ \int_{t=a}^{b} f^n(t)\,dt\right)$.

Correction ▼ [004335]

Exercice 4336 Équation intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \to \ell \neq 0$ (lorsque $x \to +\infty$). Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Correction ▼ [004336]

Exercice 4337 Convolution

Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $a,b \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)g(x-t)\,dt$.

1. Montrer que φ est continue et que si g est de classe $\mathscr{C}^k$, alors φ l'est aussi.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et g continue), alors φ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

[004337]

Exercice 4338 Convolution (Mines MP 2003)

Soient $f,g \in \mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On pose $h(x) = \int_{t=0}^{x} f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Existence et continuité de h.
2. Peut-on inverser f et g ?
3. On suppose f intégrable sur $[0,+\infty[$ et g bornée. Montrer que h est bornée.
4. On prend $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \cos(\alpha x)$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. h est-elle bornée (on pourra étudier les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$) ?

Correction ▼ [004338]

Exercice 4339 Calcul d'intégrale

1. Calculer $\varphi(a) = \int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+at}$.
2. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{t\,dt}{(1+at)^2}$.

Correction ▼ [004339]

Exercice 4340 Fonction définie par une intégrale

On pose $\varphi(x) = \int_{t=0}^{1} e^{-x/t}\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Vérifier que $\varphi''(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

[004340]

Exercice 4341 Fonction définie par une intégrale, Mines 1999

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série. [004341]

Exercice 4342 Fonction définie par une intégrale

On pose pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$.
Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Correction ▼ [004342]

Exercice 4343 Fonction définie par une intégrale

On pose $I(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$.

1. Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Correction ▼ [004343]

Exercice 4344 Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_{t=0}^{x} e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.
2. Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004344]

Exercice 4345 Intégrale de Gauss, Ensi PC 1999

On donne : $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$.

Correction ▼ [004345]

Exercice 4346 Fonction définie par une intégrale

1. Soit $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$. Prouver que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Correction ▼ [004346]

Exercice 4347 Fonctions définies par des intégrales

On pose, pour x réel, $F(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

1. Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et que $F(x) = |x|F(1)$.
2. Montrer que la fonction $F - G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

[004347]

Exercice 4348 Théorème de division des fonctions $\mathscr{C}^\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Vérifier que $g(x) = \int_{t=0}^{1} f'(tx)\,dt$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Montrer de même que la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{x^k}\left(f(x) - f(0) - xf'(0) - \cdots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0.

[004348]

Exercice 4349 $y'' + y = f$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,dt$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y'' + y = f(x)$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

[004349]

Exercice 4350 Fonction définie par une intégrale

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On définit pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}$: $g(x,y)=\frac{1}{x}\int_{t=x}^{xy}f(t)\,dt$.

1. Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose de plus f dérivable en 0. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Correction ▼ [004350]

Exercice 4351 Fonctions définies par des intégrales

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2}|x+t|\sin t\,dt$.
2. $f(x)=\int_{t=x}^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.
3. $f(x)=\int_{t=x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.
4. $f(x)=\int_{t=0}^{1}\frac{e^t\,dt}{t+x}$.
5. $f(x)=\int_{t=0}^{\pi/2}x\exp\left(\frac{\sin t}{x}\right)dt$.
6. $f(x)=\int_{t=0}^{x}\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004351]

Exercice 4352 Fonction définie par une intégrale

Montrer qu'il existe un unique réel $x\in[0,\pi]$ tel que $\int_{\theta=0}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=0$. Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

Correction ▼ [004352]

Exercice 4353 Développement en série, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999

Soit $I(\alpha)=\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{e^x-1}\,dx$.

1. Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{b+n^2}$.
3. Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha\to+\infty$.

Correction ▼ [004353]

Exercice 4354 Formule de Stirling

Montrer que $\Gamma(x+1)\sim x^xe^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [004354]

Exercice 4355 Développement en série, Mines 1999

Soit $\theta\in\,]0,\pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{e^{-i\theta}-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(in\theta)}{n}$. [004355]

Exercice 4356 Fonction définie par une intégrale, X 1999

1. Calculer $f(a)=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\cos(at)\,dt$.
2. Soit $g(a)=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\frac{\sin(at)}{t}\,dt$; calculer $\lim_{a\to+\infty}g(a)$.

Correction ▼ [004356]

Exercice 4357 Développement asymptotique

Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$.
Calculer $\lim_{x\to 0^+}(J(x) - K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2\ln 2 + o_{x\to 0^+}(1)$. [004357]

Exercice 4358 Transformée de Laplace

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (pas forcément absolument).
On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que φ est continue en 0.

Correction ▼ [004358]

Exercice 4359

On pose pour $n \geqslant 2$: $v_n = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum(v_n - 1)$?
Correction ▼ [004359]

Exercice 4360

On pose pour $n \geqslant 2$ $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum(u_n - 1)$ converge également.
Correction ▼ [004360]

Exercice 4361 Centrale MP 2000

Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.
Correction ▼ [004361]

Exercice 4362 Centrale MP 2000

On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
2. Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
4. Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Correction ▼ [004362]

Exercice 4363 Ensae MP* 2000

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.
Correction ▼ [004363]

Exercice 4364 Polytechnique MP* 2000

Existence et continuité de $f(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt$. Montrer que f est intégrable.
Correction ▼ [004364]

Exercice 4365 Centrale MP 2001

1. Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,dt$ en série de fractions rationnelles.

2. Montrer qu'en 0^+, $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.

Correction ▼ [004365]

Exercice 4366 X MP* 2001

Étudier $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Correction ▼ [004366]

Exercice 4367 Ensi MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $f - f'$.
4. Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \to +\infty$.
5. Montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
6. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004367]

Exercice 4368 Ensea MP 2004

Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $I = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx$. Indication : écrire $I = \lim_{a\to+\infty} \int_{x=0}^{a} f(x)\,dx$.

Correction ▼ [004368]

Exercice 4369 X MP* 2000

Étudier la limite en 0+ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-\cos t}{t} e^{-xt}\,dt$.

Correction ▼ [004369]

Exercice 4370 ζ et Γ

Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt$. [004370]

Exercice 4371 Centrale MP 2002

Soit $f : x \mapsto \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Correction ▼ [004371]

Exercice 4372 Polytechnique MP 2002

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x)\exp(\lambda n \sin^2(x))\,dx$.

Correction ▼ [004372]

Exercice 4373 Centrale MP 2004

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!}\int_{t=0}^{1} t(t-1)\dots(t-n)\,dt$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2. Donner un équivalent de a_n.

Correction ▼ [004373]

Exercice 4374 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, Mines-Ponts MP 2004

Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1}\sin(nx)$ avec $0 < x < \pi$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\frac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n(t)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt$.
4. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Correction ▼ [004374]

Exercice 4375 Lemme de Lebesgue, Centrale MP 2004

Soit f continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans (x^2+1).

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. On suppose que f est intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t)\,dt$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ et la préciser.

Correction ▼ [004375]

Exercice 4376 Suite d'intégrales, Centrale MP 2004

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1],\ f_n(x) = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ.
2. (a) La convergence est-elle uniforme ?
   (b) La convergence est-elle monotone ?
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^{1} f_n(x)\,dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Correction ▼ [004376]

Exercice 4377 Mines-Ponts MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{1-t}{\ln t} t^x\,dt$. Étudier le domaine de définition de f, sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004377]

Exercice 4378 Mines-Ponts MP 2004

Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} e^{-ax}\,dx$.

1. Quel est le domaine de définition de I ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de I.
3. Calculer $I(a)$.

Correction ▼ [004378]

Exercice 4379 ENS Lyon MP* 2004

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-itx}\,dt$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer que $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,dt$.

4. Soit $g(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-ixt^2/2}\,dt$. Montrer que $g(x) = \frac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Correction ▼ [004379]

Exercice 4380 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$ de degré $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans (x^2+1). On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r,\theta) = \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r,\theta)\,d\theta$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
2. Vérifier que $ir\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$. En déduire que F est constante.
3. Obtenir une contradiction.

[004380]

---

73 Intégrale multiple

Exercice 4381 Intégrales doubles

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$:

1. $D = \{y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, y-x \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = x^2y$.
2. $D = \{x^2+y^2 \leqslant R^2\}$,
   $f(x,y) = x^2y$.
3. $D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = x^2+y^2$.
4. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{y^2}{4}\}$,
   $f(x,y) = x^2+y^2$.
5. $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = (x+y)^2$.
6. $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
7. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = x+y+1$.
8. $D = \{|x+y| \leqslant 1, |x-y| \leqslant 1\}$,
   $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.
9. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$,
   $f(x,y) = (x+y)\sin x \sin y$.
10. $D = \{|x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$,
    $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^2$.
11. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant a\}$,
    $f(x,y) = x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
12. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\}$,
    $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
13. $D = \{x^2+y^2-2y \leqslant 0\}$,
    $f(x,y) = y\exp(x^2+y^2-2y)$.

14. $D = \{y^2 \leqslant 2px, x^2 \leqslant 2py\}$,
$f(x,y) = \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$.

Correction ▼ [004381]

Exercice 4382 ESEM 94

Calculer $I = \iint_\Delta xy\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)$ tel que $y \geqslant 0$ et $(x+y)^2 \leqslant 2x/3\}$.

Correction ▼ [004382]

Exercice 4383 Ensi PC 1999

Calculer $I = \iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)$ tel que $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2-2x \leqslant 0$ et $x^2+y^2-2y \leqslant 0\}$.

Correction ▼ [004383]

Exercice 4384 Intégrales triples

Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$:

1. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$.
2. $D = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$,
$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} \quad (a > R > 0)$.
3. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z) = xyz$.
4. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$.
5. $D = \{x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant a\}$,
$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.
6. $D = \{x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$,
$f(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.
7. $D = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$,
f(x,y,z)=x$^2+y^2$.

Correction ▼ [004384]

Exercice 4385 Ensi Chimie P 93

1. Calculer $\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$ avec $D = \{(x,y,z)$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z\}$.
2. En déduire $\int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Correction ▼ [004385]

Exercice 4386 Ensi Chimie P 93

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.
En calculant $J = \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D = \{(x,y)$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ de deux façons différentes, trouver I.

Correction ▼ [004386]

Exercice 4387 Ensi Chimie P 93

Soit T un tore plein d'axe (Oz) et de rayons R, r $(R > r)$. Calculer $\iiint_T (x^2+y^2)\,dxdydz$.

Correction ▼ [004387]

Exercice 4388 $MF+MF'$

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$, E le domaine limité par $\mathscr{E}$ et F,F' les foyers de $\mathscr{E}$. Calculer $I=\iint_{M\in E}(MF+MF')\,dxdy$.
On effectuera le changement de variable : $x=\sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y=u\sin v$ où $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Correction ▼ [004388]

Exercice 4389 $\int_{x=0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$

1. Montrer l'existence de $I=\int_{x=0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$.
2. Montrer que $I=\iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy$ où $D=[0,\frac{\pi}{2}]^2$.
3. En déduire la valeur de I.

Correction ▼ [004389]

Exercice 4390 Intégrale de Gauss

Calcul de $I=\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Pour $a>0$ on note $\Delta_a=[0,a]\times[0,a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.
   (a) Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b.
   (b) Calculer $\iint_{C_b} f(x,y)\,dxdy$ en polaires et en déduire la valeur de I.

[004390]

Exercice 4391 $\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$

1. Calculer $A=\iint_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. Démontrer la convergence des intégrales :
   $B=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, $C=\int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, et $D=\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$.
3. Démontrer que $A=B$ (passer en coordonnées polaires dans A).
4. Calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D.
5. En déduire les valeurs de C et D.

Correction ▼ [004391]

Exercice 4392 Aires

Calculer l'aire des domaines suivants :

1. D est la partie du disque unité située dans la concavité de l'hyperbole d'équation $xy=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. D est l'intersection des domaines limités par les ellipses d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Correction ▼ [004392]

Exercice 4393 Ensi P 90

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Correction ▼ [004393]

Exercice 4394 Chimie P 91

On considère les courbes planes : $\mathscr{Q}_i : (x^2 = 2q_i y)$ et $\mathscr{P}_i : (y^2 = 2p_i x)$. On suppose $0 < q_1 < q_2$ et $0 < p_1 < p_2$. Calculer l'aire du "quadrilatère" limité par $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$.

Correction ▼ [004394]

Exercice 4395 Chimie P 1996

Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2 = a^2 - x^2$.

Correction ▼ [004395]

Exercice 4396 Volumes

Calculer le volume des domaines suivants :

1. D est l'intersection du cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de la boule de centre O de rayon 1 $(0 < a < 1)$.
2. D est l'intersection de la boule de centre O de rayon 1 et du cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$.
3. D est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite coplanaire avec le disque, située à la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre à air).

Correction ▼ [004396]

Exercice 4397 Ensi Physique P 94

Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ $(p > 0,\ \lambda > 0)$.

Correction ▼ [004397]

Exercice 4398 Volume

Dans le plan Oxy on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a > 0,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$. En tournant autour de Ox, $\mathscr{C}$ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite (on posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\cos\phi$, $z = \rho\sin\theta\sin\phi$).

Correction ▼ [004398]

Exercice 4399 Volume

On coupe une demi-boule par un plan P parallèle à sa base. Quelle doit être la position de P pour que les deux morceaux aient même volume ? (Donner un résultat approché)

Correction ▼ [004399]

Exercice 4400 Somme double

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$. [004400]

Exercice 4401 Nombre de couples (a,b) tel que $a^2 + b^2 \leqslant n$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p^2 + q^2 \leqslant n\}$ et $C_n = \mathrm{Card}\,(E_n)$.

Interpréter C_n comme une aire et donner un équivalent de C_n lorsque $n \to \infty$. [004401]

Exercice 4402 Ens MP 2002

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^1 f = 1$. Pour $\psi \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose

$$\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi\Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big) f(x_1) \dots f(x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Montrer que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\left(\int_{x=0}^{1} x f(x)\,dx\right)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004402]

Neuvième partie

Séries

74 Fonction exponentielle complexe

Exercice 4403 $\cos z$

Quels sont les complexes z tels que $\cos z \in [-1,1]$?

Correction ▼ [004403]

Exercice 4404 $\lim((1+z/n)^n)$

Soit $z \in (x^2+1)$. Montrer que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^z$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004404]

Exercice 4405 Inégalité

Soit $z \in (x^2+1)$. Montrer que $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}$.

Correction ▼ [004405]

Exercice 4406 Inégalité, Polytechnique MP* 2006

Soit $z = x+iy \in (x^2+1)$ avec $x,y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. Montrer que $\left|\frac{e^z-1}{z}\right| \leqslant \left|\frac{e^x-1}{x}\right|$. Que dire en cas d'égalité ?

Correction ▼ [004406]

Exercice 4407 Morphismes $(\mathbb{R},+) \to ((x^2+1)^{,}*)$

Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)^*$ telle que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Si f est dérivable, montrer qu'il existe $\lambda \in (x^2+1)$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\lambda x}$.
2. Obtenir le même résultat si f est seulement supposée continue (prendre une primitive, F, de f et montrer qu'elle est de classe $(x^2+1)^2$).

[004407]

Exercice 4408 $e^z = z$

Montrer qu'il existe une infinité de complexes z tels que $e^z = z$ (on calculera x en fonction de y, et on étudiera l'équation obtenue).

Correction ▼ [004408]

Exercice 4409 Équations trigonométriques

Résoudre dans (x^2+1) :

1. $\cos z = 2$.
2. $\operatorname{ch} z = -1$.
3. $\sin z + \sin jz + \sin j^2 z = 0$.
4. $8\cos z + 4i\sin z = 7+5i$.

Correction ▼ [004409]

Exercice 4410 $|\cos|$ et $|\sin|$ sur le cercle unité

Calculer $\sup\{|\cos z| \text{ tel que } |z| \leqslant 1\}$ et $\sup\{|\sin z| \text{ tel que } |z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [004410]

Exercice 4411 Courbes

Soient M, M' deux points du plan d'affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. On suppose que z et z' sont liés par la relation : $z' = e^z$. Étudier la courbe décrite par M' lorsque M décrit :
   (a) une droite $x =$ cste.
   (b) une droite $y =$ cste.
   (c) une droite quelconque.
2. Reprendre les questions 1a et 1b avec $z' = \cos z$.

[004411]

Exercice 4412 Centrale MP 2002

Résoudre dans $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [004412]

75 Séries numérique

Exercice 4413 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
2. $\operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$.
3. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
4. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
5. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
6. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
7. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. $\frac{(-1)^n}{\ln n}$.
9. $\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.
10. $\frac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$.
11. $\frac{1!+2!+\dots+n!}{(n+2)!}$.
12. $\frac{1!-2!+\dots\pm n!}{(n+1)!}$.
13. $\frac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$.
14. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
15. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
16. $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

17. $\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.
18. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Correction ▼ [004413]

Exercice 4414 Centrale PC 1999

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme. A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Correction ▼ [004414]

Exercice 4415 Ensi PC 1999

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

Correction ▼ [004415]

Exercice 4416 Mines MP 2000

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$.

Correction ▼ [004416]

Exercice 4417 Mines MP 2003

Si $\alpha > 0$, donner la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$, $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Correction ▼ [004417]

Exercice 4418 Ensi PC 1999

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \to a$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \to b$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004418]

Exercice 4419 Encadrement

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge. [004419]

Exercice 4420 Calcul approché

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\sin(0.4/n)\right)^n$ converge. Calculer à la machine une valeur approchée à 10^{-8} près de sa somme.

Correction ▼ [004420]

Exercice 4421 Ensi MP 2002

On suppose que la série à termes positifs de terme général u_n est divergente et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue décroissante. Comparer les énoncés :
1. f est intégrable
2. La série de terme général $u_n f(S_n)$ converge.

Correction ▼ [004421]

Exercice 4422 Centrale P' 1996

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Correction ▼ [004422]

Exercice 4423 $C_{2n}^n/n4^n$

L'une au moins des deux séries : $\sum \frac{C_{2n}^n}{n4^n}$ et $\sum \frac{n4^n}{C_{2n}^n}$ diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.

[004423]

Exercice 4424 $1/(1+n^2u_n)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit (u_n) une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge. Étudier le cas où $\sum u_n$ diverge.

Correction ▼ [004424]

Exercice 4425 $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$

Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction ▼ [004425]

Exercice 4426 $1/a^{\text{nb de chiffres de } n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n (sans zéros inutiles). Soit $a > 0$. Étudier la convergence et déterminer la somme éventuelle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Correction ▼ [004426]

Exercice 4427 Cauchy-Schwarz

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n + v_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

[004427]

Exercice 4428 $(-1)^n/(n^{3/4} + \cos n)$

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. En écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004428]

Exercice 4429 Reste d'une série alternée

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004429]

Exercice 4430 Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^k}\right)$.
8. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \tan(2^{-k}\alpha)$.
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.
10. $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Correction ▼ [004430]

Exercice 4431

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Correction ▼ [004431]

Exercice 4432 Chimie P 90

1. Résoudre les équations différentielles : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y=2e^{-x}\cos x$.
2. Soit f la solution commune. On définit la série de terme général $u_n = \int_{x=n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Correction ▼ [004432]

Exercice 4433 $1/n^2(n+1)^2$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Correction ▼ [004433]

Exercice 4434 $1/(1^2+2^2+\dots+n^2)$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Correction ▼ [004434]

Exercice 4435 $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$

Pour quelles valeurs de $a,b\in\mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

Correction ▼ [004435]

Exercice 4436 $\arctan(1/(k^2+k+1))$

Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$. (On pourra calculer $\tan s_n$)

Correction ▼ [004436]

Exercice 4437 $\arctan(n+a)-\arctan n$

Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a)-\arctan n$ est convergente.
2. On pose $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty}(\arctan(k+a)-\arctan k)$. Trouver $\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

Correction ▼ [004437]

Exercice 4438 Pile en porte à faux

Peut-on empiler 100 pièces de 1F de sorte que la dernière soit complètement en porte à faux ? (c'est-à-dire que sa projection sur un plan horizontal ne rencontre pas la projection de la première pièce)

Correction ▼ [004438]

Exercice 4439 Recherche d'équivalents

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Correction ▼ [004439]

Exercice 4440 $\ln^2(k)$

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Correction ▼ [004440]

Exercice 4441 $k^{-2/3}$

Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Correction ▼ [004441]

Exercice 4442 $(-1)^k\sqrt{k}$

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$. (Regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale)

Correction ▼ [004442]

Exercice 4443 Constante d'Euler

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante. On pose $u_n = f(n)$ et $s_n = u_0 + \cdots + u_n$.
Montrer que la suite de terme général $s_n - \int_{t=0}^{n+1} f(t)\,dt$ est convergente. Donner une interprétation graphique de ce fait.
Application : On pose $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$. Justifier l'existence de γ et montrer que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

[004443]

Exercice 4444 Constante d'Euler (Centrale MP 2003)

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$. Les suites (S_n) et (T_n) sont-elles adjacentes ?

Correction ▼ [004444]

Exercice 4445 Constante d'Euler, Mines-Ponts MP 2005

Soit $u_{n,k}$ le reste de la division du n par k. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n,k}}{k}$?

Correction ▼ [004445]

Exercice 4446 Mines MP 2003

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

1. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.
2. Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.
3. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Correction ▼ [004446]

Exercice 4447 Centrale MP 2001

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2}$.

Correction ▼ [004447]

Exercice 4448 $1/n\ln^2(n)$

1. Prouver la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$.
2. On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=2}^{\infty} u_k$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geqslant 2$.
3. Montrer que si S_n est une valeur approchée de S à 10^{-3} près alors $n > 10^{434}$.
4. On suppose disposer d'une machine calculant un million de termes de la série par seconde avec 12 chiffres significatifs. Peut-on obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ? (Remarque : 1 an $\approx$ 32 millions de secondes)
5. Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Correction ▼ [004448]

Exercice 4449 $(x-1)\zeta(x) \to 1$

Pour $x > 1$ on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, trouver $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\zeta(x)$.

Correction ▼ [004449]

Exercice 4450 $u_n/(1+u_n)$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Correction ▼ [004450]

Exercice 4451 Série des restes

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.
   (a) Montrer que $nv_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$.
2. Application : Calculer lorsque c'est possible : $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Correction ▼ [004451]

Exercice 4452 X MP* 2001

Soit (u_n) une suite réelle positive, $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\alpha > 0$ un réel donné. On suppose $\frac{U_n}{nu_n} \to \alpha$ lorsque $n \to \infty$. Étudier la suite de terme général $\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=0}^{n} ku_k$.

Correction ▼ [004452]

Exercice 4453 $\sum nu_n$ converge

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,u_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Correction ▼ [004453]

Exercice 4454 (u_n) décroit

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. $\left(\text{considérer } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. Application : calculer pour $0 \leqslant r < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Correction ▼ [004454]

Exercice 4455 u_n/S_n

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, que dire de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$?
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi. On pourra considérer $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{u_k}{S_k}\right)$.

Correction ▼ [004455]

Exercice 4456 Polytechnique MP* 2000

On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Correction ▼ [004456]

Exercice 4457 $(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1})/n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$. Montrer que $\sum v_n$ a même nature que $\sum u_n$.

Correction ▼ [004457]

Exercice 4458 $\sum k u_k / n(n+1)$

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et éventuellement même somme.

Correction ▼ [004458]

Exercice 4459 $\sum k u_k / n^2$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Correction ▼ [004459]

Exercice 4460 Principe d'accumulation

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Applications : Retrouver la convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Étudier la convergence des séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Correction ▼ [004460]

Exercice 4461 $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. Ensi P 90

Soit (u_n) définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Correction ▼ [004461]

Exercice 4462 $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Montrer que $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
2. On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)
3. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

[004462]

Exercice 4463 $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
3. Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.
4. Montrer que $u_n < \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.
5. On pose $u_n = \frac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
6. En déduire que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

[004463]

Exercice 4464 $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles $(-a, -b \notin \mathbb{N})$.

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a-b+1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Correction ▼ [004464]

Exercice 4465

On se donne u_1 et a deux réels strictement positifs et l'on définit par récurrence la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$.
Étudiez la limite de la suite (u_n), et, quand $a \leqslant 1$, en donner un équivalent.

Correction ▼ [004465]

Exercice 4466 $1/k^\alpha(n-k)^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Correction ▼ [004466]

Exercice 4467 Produit de Cauchy de trois séries

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries absolument convergentes de sommes A, B, C.
On pose $u_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Montrer que $\sum u_n = ABC$.

[004467]

Exercice 4468 Produit de séries géométriques

Soient $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k$. Calculer par la même méthode $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$.

Correction ▼ [004468]

Exercice 4469 Produit de séries géométriques

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note T_n le nombre de manières de décomposer n francs avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 francs ($T_0 = 1$). Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

[004469]

Exercice 4470 $\sum u_k/2^{n-k}$

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{u_0}{2^n}$.

1. Montrer que $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum v_n$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004470]

Exercice 4471 $\sum a_n/n^p = 0$

Soit (a_n) une suite bornée telle que pour tout entier $p \geqslant 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$.

Correction ▼ [004471]

Exercice 4472 $\sum x_{kn} = 0$

Soit $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ une série absolument convergente telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn} = 0$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$.

Correction ▼ [004472]

Exercice 4473 Césaro

1. Soient $k, p \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant p$. Montrer que $\sum_{n=k}^{p} \frac{C_n^k - C_n^{k+1}}{2^n} = \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}$.
2. Soit (u_n) une série convergente. On pose $v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Montrer que la série (v_n) est convergente.

Correction ▼ [004473]

Exercice 4474 $nu_n \to 0$

Soit (u_n) une série convergente à termes positifs décroissants.

1. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \frac{1}{u_k} = \mathrm{o}(n^2)$.

Correction ▼ [004474]

Exercice 4475 u_n/R_n^p

Soit (a_n) une série positive convergente, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $p \in\,]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe $C_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leqslant C_p A^{1-p}$.
2. Trouver la meilleure constante C_p.

Correction ▼ [004475]

Exercice 4476 $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Correction ▼ [004476]

Exercice 4477 Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

[004477]

Exercice 4478 Stirling++

Montrer que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. [004478]

Exercice 4479 Développement factoriel

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers (q_i) telles que $q_0 \geqslant 2$.

1. Si $s = (q_i) \in \mathscr{S}$, montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \cdots q_k}$ converge. On note $\Phi(s)$ sa somme.
2. Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{S} \to]0,1]$ est bijective.
3. Soit $s = (q_i) \in \mathscr{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si s est stationnaire.

[004479]

Exercice 4480 Développement asymptotique

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.
2. Prouver : $\frac{\ln 2}{2} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant C \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \int_{t=1}^{3} \frac{\ln t}{t}\,dt$.
3. Prouver : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

[004480]

Exercice 4481

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n} \to \ell \in (x^2+1)$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004481]

Exercice 4482

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Césaro vers zéro.
Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$.

Correction ▼ [004482]

Exercice 4483 Centrale MP 2000

Soient deux suites de termes généraux u_n et v_n définies par la donnée de u_1 et v_1, tous deux réels, et les relations :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces suites sont définies et bornées.

Correction ▼ [004483]

Exercice 4484 Produits infinis, Polytechnique 2000

On considère une suite (a_n) de réels et on définit $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1. On suppose que pour tout n, $a_n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que, pour tout N, $1 + S_N \leqslant P_N \leqslant e^{S_N}$.
   (b) Comparer les convergences respectives des suites (S_N) et (P_N).
2. On suppose maintenant que pour tout n, $-1 \leqslant a_n \leqslant 0$.

(a) La relation précédente est-elle encore vérifiée ?

(b) Discuter de la convergence des suites (S_N) et (P_N).

3. On suppose que (a_n) est de signe quelconque et que pour tout n, $1+a_n>0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que (P_N) a une limite et que cette limite est nulle si et seulement si $\sum a_n^2$ diverge.
4. Complément. On suppose que la suite (a_n) est complexe, que pour tout n $|a_n|<1$ et que la série $\sum |a_n|$ est convergente.

   (a) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, puis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe $\Big($on pourra démontrer et utiliser l'inégalité $\left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)-1\right| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)-1\Big)$.

   (b) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ n'est pas nul.

Correction ▼ [004484]

Exercice 4485 Polytechnique MP 2002

Trouver les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall\, x\in[0,1],\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$.

Correction ▼ [004485]

Exercice 4486 ENS Cachan MP* 2005

Soit $P(n)=\max\{p \text{ premier},\ p\mid n\}$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{nP(n)}$ converge.

Correction ▼ [004486]

76 Familles sommables

Exercice 4487 Dénombrabilité

A étant un ensemble infini dénombrable, les ensembles suivants sont-ils dénombrables :

1. $\mathscr{P}(A)$?
2. $\{$parties finies de $A\}$?
3. $\{$suites périodiques à valeurs dans $A\}$?
4. $\{$suites ultimement périodiques à valeurs dans $A\}$?
5. $\{$relations d'ordre total sur $A\}$?

[004487]

Exercice 4488 Discontinuités d'une fonction monotone

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable (pour $[a,b]\subset\mathbb{R}$, considérer la famille $(f(x^+)-f(x^-))_{x\in[a,b]}$).
2. Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante ayant une infinité dénombrable de discontinuités.
3. $(**)$ Trouver une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *strictement* croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est égal à $\mathbb{Q}$.

Correction ▼ [004488]

Exercice 4489 Ensemble non vide ?

Soit $(r_n)_{n\geqslant 1}$ une énumération des rationnels. On note $I_n=\left]r_n-\frac{1}{n^2},r_n+\frac{1}{n^2}\right[$, $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ et $F=\mathbb{R}\setminus E$. Montrer que $F\neq\varnothing$ (ceci est choquant vu que les éléments de F sont, par définition, "loin" de chaque rationnel, pourtant c'est vrai) .

Correction ▼ [004489]

Exercice 4490 Étude de convergence

Étudier la finitude des sommes suivantes :

1. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha}$.
2. $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha+j^\alpha}$.
3. $\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.
4. $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p+b^q}$, $a>1, b>1$.

Correction ▼ [004490]

Exercice 4491 Série des restes

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Correction ▼ [004491]

Exercice 4492 Série des restes

Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

Correction ▼ [004492]

Exercice 4493 Non interversion des sommations

On pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ et $a_{n,n}=0$.

1. Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Correction ▼ [004493]

Exercice 4494 Identité remarquable

Montrer que pour $x\in(x^2+1)$, $|x|<1$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Correction ▼ [004494]

Exercice 4495 Calcul de somme

Soit $z\in(x^2+1)$ tel que $|z|<1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. [004495]

Exercice 4496 Centrale MP 2000

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t $S(t)$ a-t-elle un sens ?
2. Montrer que $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{1-t^k}$.
3. Soit $F_m(t) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{t^k(1-t)}{1-t^k}$. Montrer que $(F_m(t))$ converge uniformément vers $(1-t)S(t)$ sur $[0,1]$. En déduire la limite en 1 de $(1-t)S(t)$. On rappelle que $\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}$.
4. Calculer le développement en série entière de $S(t)$. Donner une interprétation arithmétique des coefficients de ce développement et préciser leur signe en fonction de n.

Correction ▼ [004496]

Exercice 4497 Centrale MP 2002

Soient $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

1. Étudier la convergence de la série et montrer qu'on peut intervertir b et c dans la formule.
2. Développer en série entière : $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{1-z^m}$.

Correction ▼ [004497]

Exercice 4498 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes : $A = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$, $B = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p|q} \frac{1}{p^2q^2}$ et $C = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$.

Correction ▼ [004498]

Exercice 4499 Série harmonique alternée

On réordonne les termes de la série harmonique alternée en prenant tour à tour p termes positifs puis q termes négatifs, $p,q \geqslant 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Correction ▼ [004499]

Exercice 4500 Familles de carrés sommable

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\int_{t=-1}^{1} P(t)\,dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0$.
   En déduire : $\int_{t=0}^{1} P^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$.
2. Soient $2n$ réels positifs $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_kb_\ell}{k+\ell} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}$.
3. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.
   Montrer que la suite double $\left(\frac{a_kb_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

[004500]

Exercice 4501 Associativité générale

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de I, non nécéssairement finies, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Montrer que $\sum_{i\in I_n} a_i \to \sum_{i\in I} a_i$ lorsque $n\to\infty$. En déduire que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de I alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n} a_i$. [004501]

Exercice 4502 Mines MP 2001

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine et la développer en série entière.

Correction ▼ [004502]

77 Suites et séries de fonctions

Exercice 4503 Étude de convergence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

1. Trouver la limite simple des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

Correction ▼ [004503]

Exercice 4504 Étude de convergence

On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n\sin(\pi x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. En déduire qu'il en est de même pour la suite (g_n). (On utilisera la concavité de sin sur $[0,\pi]$)

[004504]

Exercice 4505 Non interversion limite-intégrale

Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1. Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Vérifier que $\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

[004505]

Exercice 4506 Non interversion limite-intégrale

1. Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Correction ▼ [004506]

Exercice 4507 Étude de convergence

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \begin{cases} x \leqslant n & (1-x/n)^n \\ x > n & 0. \end{cases}$

1. Déterminer la limite simple, f, des fonctions f_n.
2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0,a]$.
4. Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Correction ▼ [004507]

Exercice 4508 Étude de convergence

Étudier la convergence simple, uniforme, de la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Correction ▼ [004508]

Exercice 4509 Étude de convergence

Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha,+\infty[$, pour $\alpha > 0$.

[004509]

Exercice 4510 $f(nx)$, $f(x/n)$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Donner un exemple de fonction f.
2. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

[004510]

Exercice 4511 Équation différentielle dépendant d'un paramètre

Soit y_n la solution de l'équation : $(*_n) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)y'' - \left(2+\frac{1}{n}\right)y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1. Calculer explicitement y_n.
2. Déterminer la limite simple, y, des fonctions y_n.
3. Vérifier que y est solution de l'équation limite de $(*_n)$ avec les mêmes conditions initiales.

Correction ▼ [004511]

Exercice 4512 $f \circ f \circ \ldots \circ f$

Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction continue vérifiant : $\forall\, x \neq 0, \quad |f(x)| < |x|$.
On pose $f_0(x) = x$, puis $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Étudier la convergence simple des f_n.

Correction ▼ [004512]

Exercice 4513 Étude de convergence

On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geqslant 0$.

1. Déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Démontrer que : $\forall\, t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. (Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geqslant 1$)

Correction ▼ [004513]

Exercice 4514 Approximation de la racine carrée par la méthode de Newton

On définit une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ par récurrence : $\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right). \end{cases}$

Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n $\left(\text{considérer } g_n(x) = \frac{f_n(x)-\sqrt{x}}{f_n(x)+\sqrt{x}}\right)$.

[004514]

Exercice 4515 Approximation polynomiale de la racine carrée

On considère la suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ définie par les relations : $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{t - f_n^2(t)}{2}$.
Étudier la convergence simple, uniforme, des fonctions f_n.

Correction ▼ [004515]

Exercice 4516 Suite ayant deux limites

Trouver une suite de polynômes (P_n) convergeant simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$.
Remarque : une telle suite a donc des limites distinctes dans $\mathbb{R}[x]$ pour les normes de la convergence uniforme sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$.

Correction ▼ [004516]

Exercice 4517 Fonction orthogonale aux polynômes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier k on a $\int_{t=a}^{b} f(t)t^k\,dt = 0$. Que peut-on dire de f ? [004517]

Exercice 4518 Approximation de f et f'

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que P_n converge uniformément vers f et P_n' converge uniformément vers f'.
2. Si f est $\mathscr{C}^\infty$, peut-on trouver une suite de polynômes (P_n) telle que pour tout k la suite $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$?

Correction ▼ [004518]

Exercice 4519 Limite de $f_n(x_n)$

Soient $f_n : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant vers une fonction continue f et (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers $x \in D$.

1. Si les fonctions f_n convergent uniformément, montrer que $f_n(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

[004519]

Exercice 4520 Compositon et convergence

Soit f_n convergeant uniformément vers f, et g une fonction continue. Démontrer que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformément.

[004520]

Exercice 4521 $f_n \circ g_n$

Soit $f_n : [a,b] \to [c,d]$ et $g_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions f et g. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Correction ▼ [004521]

Exercice 4522 Limite simple de polynômes de degrés bornés

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.

1. Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004522]

Exercice 4523 Polynômes à coefficients entiers, ENS Lyon MP* 2005

On considère $f : x \mapsto 2x(1-x)$ définie sur $[0,1]$.

1. Étude de la suite de fonction g_n, avec $g_n = f^n = f \circ \ldots \circ f$.
2. Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et h continue sur $[a,b]$. Montrer que h est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Correction ▼ [004523]

Exercice 4524 Théorèmes de Dini

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

2. On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

[004524]

Exercice 4525 Théorème d'Ascoli

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipchitizennes (avec le même k).

1. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a,b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de M_n.
2. Montrer que f_n converge uniformément vers f.

[004525]

Exercice 4526 Équicontinuité

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont *équi-continues* c'est à dire :

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in \left]x-\delta, x+\delta\right[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

[004526]

Exercice 4527 Limite simple de fonctions convexes

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction ▼ [004527]

Exercice 4528 Fonction définie par une série

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arccos(\cos nx)}{n!}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire et 2π-périodique.
2. Calculer $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction ▼ [004528]

Exercice 4529 Fonction définie par une série (Centrale MP 2003)

Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 n^2}$ sous réserve de convergence ($a \in \mathbb{R}$).

1. Domaine de définition de f ?
2. Limite de $af(a)$ quand $a \to 0$?
3. Limite de $f(a)$ quand $a \to +\infty$?

Correction ▼ [004529]

Exercice 4530 Fonction ζ de Riemann

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Prouver que $\zeta(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$ $\left(\text{majorer } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ par comparaison à une intégrale}\right)$.
3. Prouver que $\zeta(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^+$.

[004530]

Exercice 4531 Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$.
Montrer que $\gamma = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}$.

[004531]

Exercice 4532 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2. Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Correction ▼ [004532]

Exercice 4533 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $]1,+\infty[$.

[004533]

Exercice 4534 Fonction définie par une série

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1. Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.
2. Montrer que la quantité : $xg(x)-g(x+1)$ est constante sur D.
3. Tracer la courbe représentative de g sur $]0,+\infty[$.
4. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

Correction ▼ [004534]

Exercice 4535 Fonction définie par une série

1. Établir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sin x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie de la forme $\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$. Que pouvez-vous en déduire pour f ?

[004535]

Exercice 4536 Fonction définie par une série

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Y a-t-il convergence normale ?

Correction ▼ [004536]

Exercice 4537 Fonction définie par une série

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
3. Tracer la courbe de f.

Correction ▼ [004537]

Exercice 4538 Fonction définie par une série

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction ▼ [004538]

Exercice 4539 Conversion série-intégrale

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt$.

Correction ▼ [004539]

Exercice 4540 Fonction Γ

Soit $f_n(x) = \frac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\dots(1+x/n)}$.

1. Étudier la convergence simple des fonctions f_n.
2. On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(x-1)$ lorsque ces deux quantités existent.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$).

Correction ▼ [004540]

Exercice 4541 Ensi Chimie P' 93

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \frac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t\,dt$.

Correction ▼ [004541]

Exercice 4542 Convergence de $f^{(n)}$

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ? [004542]

Exercice 4543 Ensi PC 1999

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1. Étudier la convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \int_{x=0}^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

Correction ▼ [004543]

Exercice 4544 Développement de $\coth(x)$

1. Décomposer en éléments simples sur (x^2+1) la fractions rationnelle : $F_n(X) = \frac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.
2. En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.
3. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Correction ▼ [004544]

Exercice 4545 $\sum \sin(n)/n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$ on pose $u_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, f.
2. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Correction ▼ [004545]

Exercice 4546 Fonctions ζ et η

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et pour $x > 0$: $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ pour $x \to 1^+$.
2. Montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. On remarquera que $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Correction ▼ [004546]

Exercice 4547 Centrale MP 2000

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(y) = \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(y)x^n$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$ et $F(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)x^n$. Montrer que F, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent en tout point de D.

[004547]

Exercice 4548 Série lacunaire

Soit (p_n) une suite d'entiers naturels, strictement croissante et telle que $p_n/n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n}$. Montrer que $(1-x)f(x) \to 0$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004548]

Exercice 4549 Fonctions réciproques (Pugin, MP*-2001)

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to [c,d]$ continues, bijectives, strictement croissantes, convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to [c,d]$ elle aussi continue, bijective strictement croissante.

1. Montrer qu'il y a convergence uniforme (deuxième théorème de Dini, considérer une subdivision de $[a,b]$).
2. Montrer que les fonctions réciproques f_n^{-1} convergent simplement vers une fonction g et que $g = f^{-1}$.
3. Montrer que (f_n^{-1}) converge uniformément vers f^{-1}.

Correction ▼ [004549]

Exercice 4550 Mines MP 2001

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le compact K, à valeurs réelles et convergent uniformément sur K vers la fonction f. A-t-on $\sup f_n \to \sup f$ lorsque $n \to \infty$?

Correction ▼ [004550]

Exercice 4551 Mines MP 2001

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1. Étudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [004551]

Exercice 4552 Centrale MP 2001

Convergence et limite en 1^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

Correction ▼ [004552]

Exercice 4553 Centrale MP 2001

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$.

1. Pour quelles valeurs de t, S est-elle définie ? Est-elle continue ?
2. Montrer qu'au voisinage de 1^- on a $S(t) = -\frac{\ln(1-t)}{1-t} + O\left(\frac{1}{1-t}\right)$. On pourra développer $\ln(1-t)$ en série entière.

Correction ▼ [004553]

Exercice 4554 Centrale MP 2002

On pose $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ est définie et continue.
2. Montrer que ϕ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Correction ▼ [004554]

Exercice 4555 ENS Lyon-Cachan MP 2002

Soin $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h \neq 0$ et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Correction ▼ [004555]

Exercice 4556 Centrale MP 2002

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \frac{1}{n}\int_{t=0}^{n} f(x+t)f(t)\,dt$.

1. Montrer que la suite (F_n) converge vers une fonction F que l'on précisera.
2. Nature de la convergence ?
3. Prouver $\|F\|_\infty = |F(0)|$.

Correction ▼ [004556]

Exercice 4557 Approximation par des fractions rationnelles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, ayant même limite finie ℓ en $\pm\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles.

Correction ▼ [004557]

Exercice 4558 Fonction définie par une série

On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

2. Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Correction ▼ [004558]

Exercice 4559 Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Correction ▼ [004559]

Exercice 4560 Étude de $\sum t^{p-1} \sin(px)$ pour $x \in]0, \pi[$, TPE MP 2005

1. Calculer $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(px)$ puis $S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$.
2. Calculer $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt$ et $\int_{t=0}^{1} S(t)\,dt$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge et donner sa valeur.

Correction ▼ [004560]

Exercice 4561 Fraction rationnelle de meilleure approximation (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

On note R l'ensemble des fractions rationnelles continues sur $[0,1]$ et pour $m, n \in \mathbb{N}$:
$R_{m,n} = \{f \in R$ tel que $\exists\, P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leqslant m,\ \deg(Q) \leqslant n$ et $f = P/Q\}$.

1. R est-il un espace vectoriel ? Si oui en trouver une base. Même question pour $R_{m,n}$.
2. Soient m, n fixés. On note $d = \inf\{\|g - f\|,\ f \in R_{m,n}\}$ où g désigne une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\|h\| = \sup\{|h(x)|,\ x \in [0,1]\}$. Montrer qu'il existe $r_0 \in R_{m,n}$ tel que $\|g - r_0\| = d$.

Correction ▼ [004561]

Exercice 4562 Dérivation multiple, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que (f_n') converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f' = g$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[a,b]$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers g et il existe $x_1, \dots, x_p$ distincts tels que $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f^{(p)} = g$.

Correction ▼ [004562]

Exercice 4563 Exponentielle, Polytechnique MP* 2006

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exp(A) - \exp(B) = \int_{s=0}^{1} \exp(sA)(A - B)\exp((1-s)B)\,ds$.

Correction ▼ [004563]

78 Séries entières

78.1 Rayon de convergence

Exercice 4564 Vrai ou faux ?

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\frac{f(x)}{x^p} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

[004564]

Exercice 4565 Calculs de rayons

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \to \ell \neq 0$ lorsque $n \to \infty$
2. (a_n) est périodique non nulle.
3. $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
4. $a_n = \frac{n^n}{n!}$.
5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$,
   $0 < a < b$.
6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
9. $a_n = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{n!}$.
10. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,
    $a_0 = a_1 = 1$.
13. $a_n = C_{kn}^n$.
14. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
15. $a_n = \int_{t=0}^1 (1+t^2)^n \, dt$.
16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17. $a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Correction ▼ [004565]

Exercice 4566 Centrale P' 1996

Comment peut-on trouver le rayon de convergence d'une série entière dont la suite des coefficients admet une infinité de zéros ? [004566]

Exercice 4567 Mines MP 2003

Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right) x^k$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

Correction ▼ [004567]

Exercice 4568 Ensi MP 2003

Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ et étude pour $x = \pm R$.

Correction ▼ [004568]

Exercice 4569 Centrale MP 2003

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}$, $b_n = \sin(a_n)$.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

2. Déterminer la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x.

Correction ▼ [004569]

Exercice 4570 Transformation de rayons

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1. $\sum a_n^2 z^n$.
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
3. $\sum \frac{n!a_n}{n^n} z^n$.

Correction ▼ [004570]

Exercice 4571 Séries paire et impaire

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence R et R'. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Correction ▼ [004571]

Exercice 4572 Division par $z - \rho$

Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et $\rho > 0$.
On définit la série entière $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de sorte que $(z - \rho) b(z) = a(z)$ en cas de convergence de $b(z)$.

1. Prouver l'existence et l'unicité des coefficients b_n.
2. Quel est le rayon de convergence de $b(z)$?

Correction ▼ [004572]

Exercice 4573 Développer peut être dangereux

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
2. On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2.4^n} a_k x^k$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 1} a_k x^k$ est égal à 1 (en convenant que les a_k non définis valent zéro).

Correction ▼ [004573]

78.2 Développement, sommation

Exercice 4574 Développements en série entière

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x + x^2)$.
2. $(x - 1)\ln(x^2 - 5x + 6)$.
3. $x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
4. $\frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
5. $\frac{1}{1 + x - 2x^3}$.
6. $\frac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
7. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
8. $\arctan(x + 1)$.
9. $\arctan(x + \sqrt{3})$.

10. $\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,dt$.
11. $\left(\frac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$.
12. $\int_{t=x}^{2x} e^{-t^2}\,dt$.
13. $e^{-2x^2}\int_{t=0}^{x} e^{2t^2}\,dt$.
14. $\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.
15. $\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)$.

Correction ▼ [004574]

Exercice 4575 Ensi PC 1999

Développer en série entière : $\ln(\sqrt{1-2x\operatorname{ch}a+x^2})$.

Correction ▼ [004575]

Exercice 4576 $e^{x^2}/(1-x)$

Développer en série entière $\frac{e^x}{1-x}$ puis $\frac{e^{x^2}}{1-x}$.

Correction ▼ [004576]

Exercice 4577 Mines-Ponts MP 2004

Développer en série entière $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Correction ▼ [004577]

Exercice 4578 DSE d'une fraction rationnelle par récurrence linéaire

Développer $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x)=x$.

Correction ▼ [004578]

Exercice 4579 Produit de polynômes

Quel est le coefficient de x^n dans $\left(1+x+\cdots+x^n\right)\left(1+2x+\cdots+(n+1)x^n\right)\left(1+4x+\cdots+(n+1)^2x^n\right)$?

Correction ▼ [004579]

Exercice 4580 Développement en série entière de $\zeta(1+x)-1/x$

1. Vérifier que pour $x\in\,]0,+\infty[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+x}}-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)\right)$.
2. Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose $\gamma_p=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln^p(1)}{1}+\cdots+\frac{\ln^p(k)}{k}-\frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\right)$. Justifier l'existence de γ_p et montrer que $|\gamma_p|\leqslant(p/e)^p$.
3. Montrer alors que pour $x\in\,]0,1[$ on a : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

[004580]

Exercice 4581 Sommation de séries entières

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty}n^3x^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1}$, $x \geqslant 0$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \operatorname{ch}(na)$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n+1} x^n$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t=1}^{x} \ln^n t \, dt$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Correction ▼ [004581]

Exercice 4582 Suite récurrente linéaire

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Correction ▼ [004582]

Exercice 4583 Série matricielle, Centrale MP 2000

1. Montrer l'existence de $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ pour $z \in (x^2+1)$, $|z| < 1$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ converge si et seulement si les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.
3. La somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ est-elle inversible ?

Correction ▼ [004583]

Exercice 4584 Série des traces (Centrale MP 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.
2. On pose $t_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Correction ▼ [004584]

Exercice 4585 Centrale MP 2000

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Correction ▼ [004585]

Exercice 4586 $\sum P(n)x^n$, Ensi P 91

Rayon et somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p.

Correction ▼ [004586]

Exercice 4587 $\sum e^{in\theta}/2^n$, Ensi P 91

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n}$.

Correction ▼ [004587]

Exercice 4588 Ensae MP* 2000

Soit (u_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$. Trouver la limite de (u_n).

Correction ▼ [004588]

Exercice 4589 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n x)$

Soit $q \in]-1,1[$ et $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n x)$.

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f est développable en série entière au voisinage de 0. On admettra que si une fonction g est DSE alors e^g l'est.
2. A l'aide de la relation : $f(x) = (1-qx)f(qx)$, calculer les coefficients du développement de f et le rayon de convergence.

Correction ▼ [004589]

Exercice 4590 Fonction non DSE

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n+n^2 ix}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de 0.

Correction ▼ [004590]

Exercice 4591 Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{inx}$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004591]

Exercice 4592 Théorème de réalisation de Borel

Soit (a_n) une suite complexe donnée, on construit dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout entier n on ait $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant : $\forall\ x \in [-1,1],\ \varphi(x) = 1$ et $\forall\ x \notin [-2,2],\ \varphi(x) = 0$ (l'existence de φ fait l'objet de la question 2.). On pose $\varphi_n(x) = x^n\varphi(x)$, $M_n = \max(\|\varphi_n'\|_\infty, \dots, \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$ où (λ_n) est une suite de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$ et telle que $\sum |a_n| M_n/\lambda_n$ converge.

1. Montrer que f est bien définie, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.
2. Construction de φ : à l'aide de fonctions du type $x \mapsto \exp(-1/x)$ construire une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ nulle sur $[0,1] \cup [2,+\infty[$ et strictement positive sur $]1,2[$.

   Vérifier alors que $\varphi(x) = \int_{t=|x|}^{+\infty} \psi(t)\,dt \Big/ \int_{t=0}^{+\infty} \psi(t)\,dt$ convient.

Correction ▼ [004592]

78.3 Étude au bord

Exercice 4593 Étude sur le cercle de convergence

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.
2. Étudier la convergence de f pour $x = \pm R$.
3. Déterminer $\lim_{x\to R^-} f(x)$.

Correction ▼ [004593]

Exercice 4594 Coefficients équivalents ⇒ séries équivalentes

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$.

1. Montrer que $A(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$.
2. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \to 1^-$.

Correction ▼ [004594]

Exercice 4595 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers A,B,C, alors $C = AB$ (considérer les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$).

Correction ▼ [004595]

Exercice 4596 Produit de Cauchy

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). On suppose que la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$ et que $b_n/b_{n+1} \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$ avec $|\lambda| < R$. Montrer que $c_n/b_n \to A(\lambda)$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004596]

78.4 Équations différentielles

Exercice 4597 Équation différentielle

Montrer que l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de 0. Calculer $y(1)$ à 5.10^{-5} près.

Correction ▼ [004597]

Exercice 4598 DSE de tan

1. En utilisant la relation : $\tan' = 1 + \tan^2$, exprimer $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan, \dots, \tan(n-1)$. En déduire que : $\forall\, x \in [0, \pi/2[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
3. Soit f la somme de la série précédente. Montrer que $f' = 1 + f^2$ et en déduire que $f = \tan$.
4. Prouver que le rayon de convergence est exactement $\pi/2$.

Correction ▼ [004598]

Exercice 4599 DSE de $(\arcsin x)^2$

On pose $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.
2. Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.
3. Donner le développement en série entière de $\arcsin^2 x$.

Correction ▼ [004599]

Exercice 4600 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et montrer que f vérifie l'équation : $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.
2. Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ (utiliser le DL de f en 0 à l'ordre 1 pour fixer la constante) et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

Correction ▼ [004600]

Exercice 4601 Calcul de somme

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence.
2. Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
3. Calculer $f(x)$.

Correction ▼ [004601]

Exercice 4602 Fonction génératrice du nombre de partitions

On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.
2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = e^{e^x-1}$.

Correction ▼ [004602]

Exercice 4603 Suite récurrente

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence est non nul.
2. Calculer $f(x)$.
3. En déduire a_n en fonction de n.

Correction ▼ [004603]

Exercice 4604 Fonction ζ

Pour $|x| < 1$ on pose : $Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^n$.
Montrer que Z vérifie l'équation différentielle : $2xZ'(x) - 2Z^2(x) + Z(x) = 3x\zeta(2)$ (écrire $Z(x)$ comme somme d'une série double, intervertir les sommations, remplacer et ... simplifier).
En déduire la relation de récurrence : $\forall\, n \geqslant 2,\ (n+\frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Correction ▼ [004604]

Exercice 4605 DSE de tan

On note $\zeta_i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}$ et $Z_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_i(2n) x^n$. En s'inspirant de l'exercice 4604 montrer que Z_i vérifie l'équation différentielle : $2xZ_i'(x) - 2Z_i^2(x) - Z_i(x) = x\zeta_i(2)$.
Déterminer alors deux réels α et β tels que $T(x) = Z_i(x^2)/x$ soit égal à $\alpha \tan \beta x$ sur $]-1,1[$.

Correction ▼ [004605]

Exercice 4606 DSE de $\tan x$.

1. Pour $a,b \in \mathbb{R}$ avec $b \not\equiv 0 (\bmod \pi)$, vérifier l'identité suivante : $\frac{(1+ia)-e^{ib}(1-ia)}{1-e^{ib}} = 1 - \frac{a}{\tan(b/2)}$.
2. Pour $a,b \in (x^2+1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $a^n + b^n = \prod_{k=0}^{n-1}(a - be^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}})$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité suivante : $\frac{\left(1+\frac{ix}{2p}\right)^{2p} + \left(1-\frac{ix}{2p}\right)^{2p}}{2} = \prod_{k=0}^{p-1}\left(1 - \frac{x^2}{4p^2 \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4p}}\right)$.
4. Démontrer alors : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\ln(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$.
5. En déduire : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, vérifier l'identité suivante : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{2^n-1}{2^n}\zeta(n)$.
7. Démontrer enfin : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}$.

[004606]

78.5 Intégrales

Exercice 4607 $\int_{t=0}^{1} t^t \, dt$

1. A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\int_{t=0}^{1} t^t \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.
2. Calculer la valeur commune des deux membres à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004607]

Exercice 4608 $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\, dt$.

Correction ▼ [004608]

Exercice 4609 Centrale PSI 1997

Établir la convergence puis calculer la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$.

Correction ▼ [004609]

Exercice 4610 $\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$

Montrer que pour $x \in]-1,1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_{t=0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$. [004610]

Exercice 4611 Intégrale elliptique

Montrer que la longueur d'une ellipse de demi-axes a,b est : $L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2p} \frac{C_{4p}^{2p} C_{2p}^{p}}{4^{3p}(1-4p)}$. [004611]

Exercice 4612 Norme L^2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$. Montrer, pour $0 \leqslant r < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta$.
[004612]

78.6 Analycité

Exercice 4613 Série à valeurs réelles

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in \mathring{D}(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [004613]

Exercice 4614 Formules de Cauchy

Soit U un ouvert de (x^2+1) contenant 0 et $f : U \to (x^2+1)$ analytique. On note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0, R son rayon et d la distance de 0 à $\mathrm{fr}(U)$ ($d = +\infty$ si $U = (x^2+1)$).

1. Montrer, pour $0 < r < \min(R,d)$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\,d\theta$.
2. Montrer que l'application $r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta$ est analytique sur $[0,d[$ (minorer le rayon de convergence du DSE de f en $r_0e^{i\theta}$ et majorer en module les coefficients lorsque θ décrit $[0,2\pi]$ et r_0 est fixé dans $[0,d[$ à l'aide d'un recouvrement ouvert de $[0,2\pi]$). En déduire que l'égalité de la question 1. a lieu pour tout $r \in [0,d[$.
3. Pour $0 < r < d$ et $|z| < r$ on pose $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z} re^{i\theta}\,d\theta$. Montrer que g est la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à r et que g coïncide avec f sur $\mathring{D}(0,r)$.

   Applications :
4. $R \geqslant d$.
5. Si $U = (x^2+1)$ et f est bornée alors f est constante (théorème de Liouville).
6. Si $P \in (x^2+1)[X]$ ne s'annule pas alors P est constant (théorème de d'Alembert-Gauss).
7. Si (f_n) est une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur U vers une fonction f alors f est analytique sur U (théorème de Weierstrass, comparer avec le cas réel).
8. La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Correction ▼ [004614]

Exercice 4615 Formule des résidus

Soit $P \in (x^2+1)[X]$ ayant pour racines $z_1,\dots,z_k$ de multiplicités $m_1,\dots,m_k$ et $r \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{|z_1|,\dots,|z_k|\}$.
Montrer : $\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta}\,d\theta = \sum_{|z_j|<r} m_j$. [004615]

Exercice 4616 Croissance de f en fonction des coefficients

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés :
1 : Pour tout $a > 0$, la fonction $z \mapsto f(z)e^{-a|z|}$ est bornée sur (x^2+1).
2 : $\sqrt[n]{n!\,|a_n|} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
On utilisera les formules de Cauchy (cf. exercice 4614).

Correction ▼ [004616]

Exercice 4617 Centrale MP 2000

Soit (a_n) une suite réelle avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On suppose que f est injective et que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On considère $\Omega^+ = \{z \in (x^2+1) \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ et $D = \{z \in (x^2+1) \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in D$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(D \cap \Omega^+) \subset \Omega^+$.
3. Montrer que, pour tout $|r| < 1$, $a_n = \frac{2}{\pi r^n}\int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)\,d\theta$.
4. Montrer que $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin\theta|$. En déduire que $|a_n| \leqslant n$.

Correction ▼ [004617]

78.7 Divers

Exercice 4618 Anneau des séries entières

Soit A l'ensemble des suites (a_n) de complexes telles que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon non nul. On munit A de l'addition terme à terme et du produit de Cauchy noté $*$.

1. Vérifier que A est un anneau intègre. Quels sont les éléments de A inversibles ?
2. Soit $I_k = \{a = (a_n) \in A \text{ tel que } a_0 = \cdots = a_k = 0\}$. Montrer que les idéaux de A sont $\{0\}$, A et les I_k, $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ alors la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $2u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n+1-k}$.
4. Soit $a = (a_n) \in A$ avec $a_0 = 1$ et $|a_n| \leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une unique suite $b = (b_n) \in A$ telle que $b_0 = 1$ et $b * b = a$. Pour prouver que le rayon de convergence de b est non nul on établira par récurrence que $|b_n| \leqslant u_n$.
5. Pour $a \in A$ quelconque, étudier l'équation $b * b = a$ d'inconnue $b \in A$.

[004618]

Exercice 4619 Ulm MP* 2000

Soit $z_1, \ldots, z_p \in (x^2+1)$, $p_1, \ldots, p_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$. Pour $n > p$ on pose $z_n = e^{i\omega} \sum_{j=1}^{p} z_{n-j} p_j$. Étudier la suite (z_n).

Correction ▼ [004619]

Exercice 4620 X MP* 2001

Soit D le disque ouvert de (x^2+1) de centre 0 et rayon 1.

1. Soit $\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geqslant 1$ et $r \in]0,1[$. Montrer que
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$
2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\overline{D}$ dans (x^2+1) continues et dont la restriction à D est somme d'une série entière. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ définit une norme sur E et que pour cette norme E est complet.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est dense dans E.

Correction ▼ [004620]

Exercice 4621 Centrale MP 2002

1. Développer en série entière $f : z \mapsto z(1-z)^{-2}$. Montrer que f est injective sur $\mathring{D}(0,1)$.
2. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins 1 à coefficients réels. On suppose f injective sur $\mathring{D}(0,1)$ et on veut prouver : $\forall\, n \geqslant 1, |a_n| \leqslant n$.
   (a) Montrer pour $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et en déduire : $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geqslant 0$.
   (b) Pour $0 < r < 1$ calculer $\int_{t=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it})) \sin nt\, dt$. En déduire $|a_n| r^n \leqslant n|a_1| r$ et conclure.

Correction ▼ [004621]

79 Séries de Fourier

79.1 Développements

Exercice 4622 Développements

Calculer le développement des fonctions f 2π-périodiques telles que :

1. $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.
2. $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.
3. $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.
4. $f(x) = \max(0, \sin x)$.
5. $f(x) = |\sin x|^3$.

Correction ▼ [004622]

Exercice 4623 Chimie P' 1996

Établir la convergence puis calculer $\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, dt$.
En déduire les coefficients de Fourier de f : $f(t) = \ln|\tan(t/2)|$.

Correction ▼ [004623]

Exercice 4624 Chimie P 1996

Développer en série de Fourier f : $t \mapsto \frac{1}{1-\cos\alpha\cos t}$ avec $0 < \alpha < \pi$. Indication : on pourra utiliser une relation de récurrence entre les coefficients à partir de $(1-\cos\alpha\cos t)f(t) = 1$.

Correction ▼ [004624]

Exercice 4625 Mines MP 2002

Soit $a \in]-1, 1[$ et $g : x \mapsto \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

1. Prouver : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$.
2. Quel est le mode de convergence de la série ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continue par morceaux et 2π-périodique. Montrer que $h : x \mapsto \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\, dt$ est somme d'une série trigonométrique uniformément convergente. Que peut-on déduire pour h ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continues par morceaux et 2π-périodiques telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004625]

Exercice 4626 Usage d'une série entière

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les coefficients de Fourier soient : $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = 0$?
2. Application : calculer $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$.

Correction ▼ [004626]

Exercice 4627 $1/(\cos x + \operatorname{ch} a)$

Soit $a > 0$.

1. Développer en série entière : $f(x) = \frac{1}{x+e^a}$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Correction ▼ [004627]

Exercice 4628 Décomposition en $\sin^2$

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$. [004628]

Exercice 4629 DSF de $f*g$, Mines PSI 1998

Soient $f,g : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ continues 2π-périodiques. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que h est 2π-périodique, continue, et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de h en fonction de ceux de f et de g.
2. Pour g fixée, déterminer les valeurs et vecteurs propres de $f \mapsto h$.

Correction ▼ [004629]

Exercice 4630 DSF d'une série

On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer sa série de Fourier.

Correction ▼ [004630]

79.2 Calcul de séries

Exercice 4631 Calcul de séries

Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall\, x \in [-\pi,\pi[,\ f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes des séries : $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ et $S' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Correction ▼ [004631]

Exercice 4632 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2003)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0,2\pi]$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I(a) = \int_{u=0}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\sin(au)\,du$.
2. Exprimer $I(a)$ sous forme d'une série sans intégrale.
3. Calculer $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}\sin(au)\,du$.
4. Conclure.

Correction ▼ [004632]

Exercice 4633 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$ (Centrale MP 2000)

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0,2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.
2. Calculer $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.
3. Que vaut $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n\geqslant 1}\frac{a}{a^2+n^2}$?

Correction ▼ [004633]

Exercice 4634 Calcul de séries, Matexo

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin\frac{x}{2}$ si $0 \leqslant x < 2\pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Correction ▼ [004634]

Exercice 4635 $\sin(\pi a)/\pi a$

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = \cos(ax)$.
2. Soit $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$. Justifier l'existence et la dérivabilité de g et la calculer.

Correction ▼ [004635]

Exercice 4636 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$

1. Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $0 \leqslant x < 2\pi$.
2. Donner les développements en série de Fourier de $f(x+1)$ et $f(x-1)$.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Correction ▼ [004636]

79.3 Coefficients de Fourier

Exercice 4637 $f(x+\pi)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)$?
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = -f(x)$?

Correction ▼ [004637]

Exercice 4638 f est-elle π-périodique ?

Soit $f \in \mathscr{D}$. On note c_k les coefficients de Fourier exponentiels de f. Montrer que f est π-périodique si et seulement si c_k est nul pour tout k impair (noter que la série de Fourier de f peut ne pas converger vers f). [004638]

Exercice 4639 DSF de f'

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On note a_k, b_k les coefficients de Fourier de f. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. En déduire que $ka_k \to 0$ et $kb_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

Correction ▼ [004639]

Exercice 4640 DSF de f'

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On considère la fonction g, 2π-périodique coïncidant avec f sur $[0, 2\pi[$. Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de g.

1. Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Donner le développement en série de Fourier de g'.

Correction ▼ [004640]

Exercice 4641 DSF d'une primitive de f

Soit f continue 2π-périodique, $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$, a_n,b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de f et $C=\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(\pi-t)f(t)\,dt$. Montrer :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ F(x)=\frac{a_0x}{2}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

[004641]

Exercice 4642 Concavité, ENS

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue 2π-périodique paire dont la restriction à $[0,2\pi]$ est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient : $a_k\leqslant 0$ pour $k\geqslant 1$.

Correction ▼ [004642]

79.4 Relation de Parseval

Exercice 4643 ENS MP 2002

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0)=f(1)=0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire et 2-périodique.
2. En déduire l'existence de $c>0$ indépendant de f tel que $\|f\|_\infty\leqslant c\|f''\|_2$.

Correction ▼ [004643]

Exercice 4644 Inégalité de Wirtinger

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt=0$ et $f(0)=f(2\pi)$.
Montrer que $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt\leqslant\int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,dt$ et déterminer les cas d'égalité.

Correction ▼ [004644]

Exercice 4645 Inégalité isopérimétrique

1. Soient f,g deux applications 2π-périodiques réelles de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que : $2\int_0^{2\pi} fg'\leqslant\int_0^{2\pi} f'^2+\int_0^{2\pi} g'^2$.
2. Soit Γ un arc $\mathscr{C}^1$, fermé, simple, de longueur 2π. Montrer que l'aire du domaine limité par Γ est inférieure ou égale à π.

Correction ▼ [004645]

Exercice 4646 $|f''|\leqslant|f|$

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt=0$ et $|f''|\leqslant|f|$. [004646]

Exercice 4647 Calcul de $(f\mid g)$

Soient $f,g:\mathbb{R}\to(x^2+1)$ 2π-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de f et g. Montrer que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{c_n(f)}c_n(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,dt$.

[004647]

Exercice 4648 Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier

On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\lim_{a\to 0^+}\int_{t=a}^{\pi-a} f(t)\sin(pt)\,dt$ et en déduire que f n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).

[004648]

Exercice 4649 X MP* 2001

Soit $a>0$ et f continue sur $[0,a]$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\int_{t=0}^{a} f(t)\cos(xt)\,dt=0$. Montrer que f est nulle.

Correction ▼ [004649]

79.5 Convergence

Exercice 4650 Phénomène de Gibbs pour $\sin kx/k$

Soit $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$.

1. Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Correction ▼ [004650]

Exercice 4651 Convergence uniforme

Soit $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle $[\alpha,\beta]$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Correction ▼ [004651]

Exercice 4652 Convergence uniforme

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $na_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$.
Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité : $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$ sur $[0,\pi/2]$.

Correction ▼ [004652]

Exercice 4653 Fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0

1. Soit $f:\mathbb{R}\to(x^2+1)$ paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x\in[0,\pi]$, $f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$.
   Pour $\nu\in\mathbb{N}$, on pose $a_{0,\nu}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$ et $a_{n,\nu}=\int_0^{\pi}\cos(nt)\sin\left((2\nu+1)\frac{t}{2}\right)dt$.
   Pour $q\in\mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu}=\sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$. Montrer que si ν est fixé, $s_{n,\nu}\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que, pour tout q, pour tout ν, $s_{q,\nu}>0$, et prouver que $\max_{q\in\mathbb{N}}(s_{q,\nu})=s_{\nu,\nu}$.
3. Montrer qu'il existe $B>0$ tel que, pour tout $\nu\geqslant 1$, $s_{\nu,\nu}\geqslant B\ln\nu$.
4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}a_{n,2^{p^3-1}}$.
5. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $T_n=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}A_k$. Vérifier que $T_n=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}s_{n,2^{p^3-1}}$. Montrer qu'il existe $D>0$ tel que, pour tout $p\geqslant 1$, $T_{2^{p^3-1}}\geqslant Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

[004653]

Exercice 4654 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{inx}$, $R=$ fraction rationnelle

Soit R une fraction rationnelle à coefficients complexes, de degré strictement négatif, n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{Z}$. On pose $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{inx}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction ▼ [004654]

Exercice 4655 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{P(n)}$, $P =$ polynôme

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que $f(x) = (\pi - x)^2$ sur $]0,2\pi[$.
2. Soit P un polynôme de degré 2 sans racines dans $\mathbb{N}^*$. On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{P(n)}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Correction ▼ [004655]

Exercice 4656 Noyau de Féjer

Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n = \frac{f_0+\dots+f_n}{n+1}$.

1. Exprimer g_n à l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$.
2. Montrer que la suite (k_n) constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi,\pi[$. Ceci montre que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute f continue*.

Correction ▼ [004656]

79.6 Intégrale de Fourier

Exercice 4657 Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f(x) = O(1/|x|^a)$ et $f'(x) = O(1/|x|^a)$ lorsque $|x| \to \infty$, et on pose $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi)$.
Montrer que F est bien définie, $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

[004657]

Exercice 4658 Formule d'échange

Soient $f,g : \mathbb{R} \to (x^2+1)$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que f, f', g, g' sont intégrables. Montrer :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\,dt.$$

[004658]

79.7 Divers

Exercice 4659 $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,dt$

1. Développer en série de Fourier la fonction : $x \mapsto |\sin x|$.
2. Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,dt \to \frac{2}{\pi}\int_{t=a}^{b} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

Correction ▼ [004659]

Exercice 4660 Équation différentielle

Montrer que l'équation : $y^{(4)}+y''+y=|\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Correction ▼ [004660]

Exercice 4661 Équation différentielle

Soit $k\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Correction ▼ [004661]

Exercice 4662 Équirépartition modulo 1

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ 1-périodique, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $x\in\mathbb{R}$.
   Montrer que $\frac{f(x)+f(x+\alpha)+\dots+f(x+n\alpha)}{n+1}\to\int_{t=0}^{1}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai en supposant seulement f continue.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$.

Correction ▼ [004662]

Exercice 4663 Cachan MP* 2000

Soit un réel $\beta>1$ et $a_k=\iint_{[0,1]^2}e^{-|x-x'|^{\beta}}e^{2i\pi k(x-x')}\,dx\,dx'$. Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n}a_ka_\ell$, k et ℓ étant des entiers relatifs.

Correction ▼ [004663]

Exercice 4664 Algèbre de séries trigonométriques

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans (x^2+1) de la forme : $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{2i\pi nx}$ où $\sum|c_n|$ converge. On pose pour $f\in E$: $\|f\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|$.

1. Justifier la définition de $\|f\|$ et montrer que E est un espace vectoriel normé complet.
2. Montrer que E est une (x^2+1)-algèbre et que $\|fg\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$.
3. Soit $\varphi:E\to(x^2+1)$ un morphisme d'algèbres.
   (a) On suppose φ continu, montrer qu'il existe $z_0\in\mathbb{U}$ tel que $\forall\ f\in E,\ \varphi(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz_0^n$.
   (b) Vérifier que la formule précédente définit effectivement un morphisme continu de E dans (x^2+1).

Correction ▼ [004664]

Exercice 4665 Mines MP 2002

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=(-1)^n\int_{t=0}^{1}\cos(nt^2)\,dt$.

Correction ▼ [004665]

Exercice 4666 Ens Lyon MP* 2003

On note : $E\ =\{$fonctions continues 2π-périodiques $f:\mathbb{R}\to(x^2+1)\}$;
$E^1=\{f\in E$ de classe $\mathscr{C}^1\}$;
$E_n=\{f\in E$ tel que $\forall\ k\in[[-n,n]],\ \int_{t=0}^{2\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt=0\}$;
$E_n^1=E_n\cap E^1$.
On considère sur E la norme $\|\ \|_2$ $\left(\|f\|_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int|f|^2}\right)$.

1. Montrer que $D:E_0^1\to E_0, f\mapsto f'$ est une bijection.
2. D est-elle continue ?

3. Montrer que D^{-1} est continue.
4. Montrer que $D^{-1}(E_n) = E_n^1$ et calculer $|||D^{-1}_{|E_n}|||$.

Correction ▼ [004666]

Exercice 4667 Quatre racines, ENS Cachan MP* 2005

Soit f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodique, de moyenne nulle. Montrer que $g = f + f''$ s'annule au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$.

Correction ▼ [004667]

Dixième partie
Topologie

80 Suites convergentes

Exercice 4668 Limite de la partie entière d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $([u_n])$ est-elle convergente ?

[004668]

Exercice 4669 Limites doubles différentes

Comparer $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ et $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$. [004669]

Exercice 4670 Suites convergeant vers 0

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Même question avec $\begin{cases} \frac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (u_n) \text{ est bornée.} \end{cases}$

[004670]

Exercice 4671 $u_n v_n \to 1$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant : $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{cases}$ Que pouvez-vous dire de ces suites ?

[004671]

Exercice 4672 Série alternée

On pose $u_n = \frac{96\times(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ et $v_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Étudier les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) et montrer que la suite (v_n) est convergente.
2. Calculer $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ à 10^{-5} près.

Correction ▼ [004672]

Exercice 4673 Croissance comparée

Montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

[004673]

Exercice 4674 Limite de $n^{1/n}$

Démontrer, sans utiliser la fonction ln, que $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Chercher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. [004674]

Exercice 4675 Croissance logarithmique comparée

Soient (a_n), (b_n) deux suites strictement positives telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[004675]

Exercice 4676 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$.

Correction ▼ [004676]

Exercice 4677 Divergence de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0 (\operatorname{mod} \pi)$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes (montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction).

[004677]

Exercice 4678 Somme des $1/k^{1/2}$

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Chercher $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n)$, puis $\lim_{n\to\infty} u_n$.
2. Comparer $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, et $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En déduire que la suite $\left(u_n - 2\sqrt{n}\right)$ est convergente.

[004678]

Exercice 4679 Limite de $(1+1/n)^n$

1. On pose $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Calculer le nombre $e = \lim_{n\to\infty} u_n$ à 10^{-7} près.
2. On note $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$.
   (a) Développer v_n et montrer que $v_n \leqslant e$.
   (b) On fixe $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n suffisament grand, $v_n \geqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} - \varepsilon$.
   (c) Que pouvez-vous en déduire ?

[004679]

Exercice 4680 Étude de $C_{2n}^n/4^n$

On pose $u_n = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite (v_n) converge. Que pouvez-vous en déduire pour $\lim_{n\to\infty} u_n$?
4. On note $\alpha = \lim_{n\to\infty} v_n$. En étudiant la suite (nu_n^2), montrer que $\alpha > 0$.

Correction ▼ [004680]

Exercice 4681 Suite $a^n/\prod(1+a^k)$

Soit $a \in (x^2+1)^{\setminus}\mathbb{U}$. Étudier la suite de terme général : $u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$.

Correction ▼ [004681]

Exercice 4682 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \frac{u_1+\dots+u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$)
3. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

[004682]

Exercice 4683 Lemme de Césaro

1. Soit (b_n) une suite réelle strictement croissante tendant vers $+\infty$, et (a_n) une suite réelle telle que : $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
2. Application : Quelle est la limite de $\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}$ $(k \in \mathbb{N})$?

[004683]

Exercice 4684 Césaro généralisé

Soit (u_n) une suite réelle convergente, et $S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Étudier la suite (S_n).

Correction ▼ [004684]

Exercice 4685 Produit de Cauchy

Soient (a_n), (b_n) deux suites convergeant vers a, b. Montrer que $\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.

[004685]

Exercice 4686 $x_n - ax_{n-1} \to 0$

Soit (x_n) une suite réelle et $\alpha \in]0,1[$. On pose

$$\begin{cases} y_0 = & x_0 \\ y_n = & x_n - \alpha x_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que : $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0) \Leftrightarrow (y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$.

[004686]

Exercice 4687 $x_n + x_{2n}/2 \to 1$

Soit (x_n) une suite bornée telle que $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$. [004687]

Exercice 4688 Approximation d'un irrationnel

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites (p_n), (q_n) est bornée, alors l'autre l'est aussi, et $x \in \mathbb{Q}$.
2. En déduire que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

[004688]

Exercice 4689 Somme des chiffres de n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Encadrer $S(n+1)$ en fonction de $S(n)$. En déduire que la suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est bornée.
2. Chercher $\inf\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et $\sup\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. La suite $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ est-elle convergente ?

Correction ▼ [004689]

Exercice 4690 Équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$

On considère l'équation : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Prouver qu'il existe une unique racine positive, a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ (calculer $a_n^{n+1} - 1$).

[004690]

Exercice 4691 Suite n'ayant qu'une valeur d'adhérence

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle *valeur d'adhérence* toute limite d'une sous-suite convergente extraite de (u_n).

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\pi/3))$?
3. Montrer que si la suite (u_n) est bornée et diverge, elle a au moins deux valeurs d'adhérence.

[004691]

Exercice 4692 Limites sup et inf

Soit (x_n) une suite bornée de réels. On pose : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p \text{ tq } p \geqslant n\} \\ z_n = \inf\{x_p \text{ tq } p \geqslant n\}. \end{cases}$

1. Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.
2. Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

[004692]

Exercice 4693 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.

1. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \max(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = \min(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Correction ▼ [004693]

Exercice 4694 Convergence vers 0 et monotonie

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers 0 en décroissant.

[004694]

Exercice 4695 Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Montrer que $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. [004695]

Exercice 4696 Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Montrer que $\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \dots + \frac{f(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Correction ▼ [004696]

Exercice 4697 Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \dots + \sqrt{1}}}$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty}(u_n - \sqrt{n})$.

Correction ▼ [004697]

Exercice 4698 Ensae MP* 2000

Soit (a_n) une suite de réels supérieurs ou égaux à 1 telle que pour tous n, m, $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$. On pose $b_n = \frac{\ln a_n}{n}$. Montrer que (b_n) converge vers $\inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Correction ▼ [004698]

Exercice 4699 Polytechnique MP* 2000

Soit h croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $h(x+1) - h(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $e^{ih(n)}$ Montrer que V est exactement le cercle trigonométrique (i.e. $\{z \in (x^2+1)\text{'}\ |z| = 1\}$).

Correction ▼ [004699]

Exercice 4700 $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \to 0$ (X MP* 2000)

Soit u_n une suite réelle bornée. On suppose que $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Correction ▼ [004700]

Exercice 4701 Point fixe (Ensae MP* 2003)

Soit une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si la suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Correction ▼ [004701]

Exercice 4702 Suite récurente

Soit $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer qu'il exitste $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = [a^{2^n}]$ pour tout n où [ ] désigne la partie entière.

Correction ▼ [004702]

81 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 4703 Étude de suites

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

2. $0 < u_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
3. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.
5. $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6. $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}}$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
8. $u_{n+1} = \sqrt{4-3u_n}$.
9. $u_{n+1} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.
10. $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.
11. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^{\alpha}$.
12. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Correction ▼ [004703]

Exercice 4704 Convergence quadratique

Soit $k \in (x^2+1)$ fixé. Étudier la convergence de la suite (a_n) définie par : $a_0 \in (x^2+1)$, $a_{n+1} = ka_n^2$.

Correction ▼ [004704]

Exercice 4705 $u_{n+1}(1-u_n) > 1/4$

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

[004705]

Exercice 4706 Radicaux itérés

Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [004706]

Exercice 4707 Radicaux itérés

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0+\cdots+u_n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Correction ▼ [004707]

Exercice 4708 Radicaux itérés

On pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.

1. Montrer que ces suites sont convergentes.
2. On note $\lambda = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que $\lambda - u_n \leqslant \frac{n}{2^n\sqrt{n!}}$.

Indication ▼ [004708]

Exercice 4709 Suites homographiques

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n}. \end{cases}$

On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?

2. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.
   Étudier la suite $(v_n) = \left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ et en déduire $\lim u_n$.

[004709]

Exercice 4710 Système d'ordre 1

Soient $0 < x_0 < y_0$ et (x_n), (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}. \end{cases}$
Montrer qu'elles sont convergentes et calculer leurs limites.

Correction ▼ [004710]

Exercice 4711 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < x_0 < y_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3} \\ y_{n+1} = \frac{2y_n + x_n}{3}. \end{cases}$

Correction ▼ [004711]

Exercice 4712 Système d'ordre 1

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par : $0 < y_0 < x_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}. \end{cases}$

Correction ▼ [004712]

Exercice 4713 Système d'ordre 1

Soient $0 < a < b$ et $(x_n), (y_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}. \end{cases}$

1. Montrer que ces suites convergent vers la même limite.
2. On pose $a = b \cos \varphi$. Exprimer cette limite en fonction de b et φ.

Correction ▼ [004713]

Exercice 4714 Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique

1. Soient $x, y, z \geqslant 0$. Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$ (mettre $x + y + z$ en facteur).
2. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{3}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Correction ▼ [004714]

Exercice 4715 Centrale MP 2000

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ et la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ Étudier la suite (u_n), puis la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [004715]

Exercice 4716 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Correction ▼ [004716]

82 Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 4717 Partie à un seul point d'accumulation

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ ayant un seul point d'accumulation, a.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. On numérote les éléments de A d'une manière quelconque : $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
   Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Correction ▼ [004717]

Exercice 4718 $(\sin(n))$ est dense

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $A = \{ma + n \text{ tq } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Application : Montrer que tout réel de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)$. [004718]

Exercice 4719 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

Montrer que l'ensemble $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \text{ tq } m, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [004719]

Exercice 4720 Unités quadratiques

Soit $A = \{n + p\sqrt{2} \text{ tq } n, p \in \mathbb{N},\ n + p\sqrt{2} > 0,\ n^2 - 2p^2 = 1\}$. Montrer que A est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{+*}$.

Correction ▼ [004720]

Exercice 4721 Olympiades 1991

Soit $a > 1$. Montrer qu'il existe une suite réelle bornée, (x_n), telle que : $\forall\, i \neq j,\ |x_i - x_j| \geqslant \frac{1}{|i-j|^a}$.

Correction ▼ [004721]

Exercice 4722 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. [004722]

Exercice 4723 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, $u_0 \in [0,1]$ et (u_n) la suite des itérées de f en u_0.
On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.

Correction ▼ [004723]

Exercice 4724 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite $(\exp(iu_n))$ converge et la suite $(|u_{n+1} - u_n|)$ est majorée par $\alpha < \pi$.
Montrer que (u_n) converge.

[004724]

Exercice 4725 $\exp(iu_n)$

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Démontrer que la suite $(\exp(iu_n))$ est dense dans $\mathbb{U}$. [004725]

Exercice 4726 $\exp(iu_n)$

Soit (x_n) une suite réelle bornée et $u>0, v>0$. On suppose que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$ et que les suites (e^{iux_n}) et (e^{ivx_n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge.

[004726]

Exercice 4727 $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que : $\forall\, n,p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est convergente.

Correction ▼ [004727]

Exercice 4728 Fonctions périodiques (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, périodiques de périodes 1 et $\sqrt{2}$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continues telles que :
   pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X+(1,0)) = f(X+(0,1)) = f(AX)$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Correction ▼ [004728]

83 Topologie dans les espaces métriques

Exercice 4729 Ouverts disjoints

Soient U,V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ sont disjoints.
Donner un contre-exemple lorsque U et V ne sont pas ouverts.

Correction ▼ [004729]

Exercice 4730 A ouvert disjoint de B

Soient A,B deux parties d'un espace vectoriel normé disjointes. Si A est ouvert, montrer que A et $\overline{B}$ sont disjoints.

[004730]

Exercice 4731 $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Correction ▼ [004731]

Exercice 4732 Frontière d'un ouvert

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé. Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Correction ▼ [004732]

Exercice 4733 La distance est 1-lipchitzienne

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \text{ tq } a \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, x,y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

[004733]

Exercice 4734 Diamètre de la frontière

Soit A une partie non vide et bornée d'un evn E. On note $\delta(A) = \sup\{d(x,y) \text{ tq } x,y \in A\}$ (*diamètre de* A). Montrer que $\delta(A) = \delta(\mathrm{Fr}(A))$.

Correction ▼ [004734]

Exercice 4735 Ensemble dérivé

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Un point $x \in E$ est dit *point d'accumulation de* A si toute boule de centre x contient une infinité de points de A. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A (*ensemble dérivé de* A). Montrer que A' est fermé, et comparer A' et $\overline{A}$.

[004735]

Exercice 4736 Caractérisation des fonctions continues

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$.
Montrer que f est continue si et seulement si : $\forall\, A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
si et seulement si : $\forall\, B \subset F,\ f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^{\circ}$.

Correction ▼ [004736]

---

84 Topologie dans les espaces vectoriels normés

84.1 Géométrie

Exercice 4737 Unicité du centre et du rayon d'une boule

Soit E un evn non nul et $\vec{a}, \vec{a}' \in E$, $r, r' > 0$ tels que $B_f(\vec{a}, r) = B_f(\vec{a}', r')$. Montrer que $\vec{a} = \vec{a}'$ et $r = r'$. [004737]

Exercice 4738 $x+y+z=0$

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs d'un evn E tels que $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \vec{0}$.
Montrer que : $\|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{x}\| \geqslant \frac{3}{2}(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|)$. [004738]

Exercice 4739 Une boule est convexe

Soit E un evn, et $\vec{a} \in E$, $r > 0$. On note $\overline{B} = \overline{B}(\vec{a}, r)$ et $\mathring{B} = \mathring{B}(\vec{a}, r)$.

1. Montrer que $\overline{B}$ et $\mathring{B}$ sont convexes.
2. Si la norme est euclidienne, montrer que si $\vec{u}, \vec{v} \in \overline{B}$ avec $\vec{u} \neq \vec{v}$, alors $]\vec{u}, \vec{v}[\subset \mathring{B}$.
   ($]\vec{u}, \vec{v}[= \{(1-t)\vec{u} + t\vec{v} \text{ tq } t \in]0,1[\}$)
3. En déduire que si la norme est euclidienne, toute partie A telle que $\mathring{B} \subset A \subset \overline{B}$ est convexe.
4. Donner un contre-exemple avec une norme non euclidienne.

[004739]

Exercice 4740 Distance à un ensemble

Soit E un evn et $A \subset E$ une partie non vide. Pour $\vec{x} \in E$ on pose : $d(\vec{x}, A) = \inf\{\|\vec{x}-\vec{a}\| \text{ tq } \vec{a} \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\left| d(\vec{x}, A) - d(\vec{y}, A) \right| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$. (Enlever la valeur absolue et démontrer séparément chaque inégalité)
2. Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto d(\vec{x}, A)$ est continue.

[004740]

Exercice 4741 Distance à un ensemble (ENS Cachan MP 2002)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x-y\| \text{ tq } y \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.

2. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B. Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.
3. On note $\rho(A,B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, valant éventuellement $+\infty$.
   Montrer que l'on a $\rho(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d_B(x),\ \sup_{x\in B} d_A(x)\right)$.

Correction ▼ [004741]

Exercice 4742 Distance entre un fermé et un compact

Soient A, B deux parties compactes non vides de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a - b\| = \min\{\|x - y\| \text{ tq } x \in A,\ y \in B\}$.
Montrer que ceci est encore vrai si on suppose A compact et B fermé. [004742]

Exercice 4743 Diamètre

Soit E un evn de dimension finie et $A \subset E$ borné, fermé, non vide. Montrer qu'il existe $\vec{a}, \vec{b} \in A$ tels que $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \max(\|\vec{x} - \vec{y}\| \text{ tq } \vec{x}, \vec{y} \in A)$. (Considérer l'ensemble $A \times A$ dans l'evn $E \times E$) [004743]

Exercice 4744 Diamètres concourants (Ens Ulm MP* 2003)

1. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide. Soit $O \in \mathring{K}$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue 2π-périodique telle qu'en coordonnées polaires de centre O, K est défini par $\rho \leqslant f(\theta)$.
2. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\cos(x)\,dx = \int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx = 0$. Montrer que g s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
3. Soit G le centre de gravité de K. Montrer que G est le milieu d'au moins trois "diamètres" de K (trois segments joignant deux points de la frontière).

Correction ▼ [004744]

Exercice 4745 $x/\max(1,\|x\|)$, Centrale MP 2005

Soit f définie par $f(x) = \frac{x}{\max(1,\|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Correction ▼ [004745]

84.2 Suites

Exercice 4746 u_n colin à $v_n \Rightarrow \lim u_n$ colin à $\lim v_n$

Soit E un evn de dimension finie et $(\vec{u}_n)$, $(\vec{v}_n)$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \vec{u}_n \text{ est colinéaire à } \vec{v}_n, \qquad \vec{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{u}, \qquad \vec{v}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{v}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (raisonner par l'absurde et compléter $(\vec{u}, \vec{v})$ en une base de E). [004746]

Exercice 4747 Suites de Cauchy

Soient (u_n), (v_n) deux suites d'un evn E telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (u_n) est de Cauchy. Montrer que (v_n) est de Cauchy. [004747]

Exercice 4748 Suite de Cauchy non convergente

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme : $\|\sum a_k X^k\| = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$. On note $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas. [004748]

Exercice 4749 Mines PC 1998

Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C. Que peut-on dire de C ? [004749]

Exercice 4750 Suite de matrices inversibles

Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1: \ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ 2: \ \text{pour tout } n, A_n \text{ est inversible} \\ 3: \ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.
2. Peut-on retirer la propriété 3 ?

[004750]

Exercice 4751 Suite de matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers A. [004751]

Exercice 4752 DSE de $I-A$

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I + A + A^2 + \dots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I-A$ est inversible, et $B = (I-A)^{-1}$.
Remarque : La réciproque est fausse, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I-A$ est inversible. Chercher un contre-exemple. [004752]

Exercice 4753 Ensam PSI 1998

Soit $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ telle que la suite (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection. [004753]

Exercice 4754 Suites de fonctions

Soient $E = \mathscr{C}([a,b] \to \mathbb{R})$, (f_n) une suite de fonctions de E et $f \in E$. Comparer les énoncés :

$$1: \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 2: \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 3: \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

[004754]

Exercice 4755

On note E l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) telles que la série $\sum x_n^2$ converge. On le munit du produit scalaire $(x \mid y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Soit (y^s) une suite bornée d'éléments de E. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergent faiblement, c'est-à-dire qu'il existe z telle que pour tout x de E on ait $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$.

Correction ▼ [004755]

Exercice 4756 ENS Lyon MP 2002

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou (x^2+1) de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ la suite $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $(|||u^n|||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i(x)$.

Correction ▼ [004756]

84.3 Normes

Exercice 4757 Norme bizarre

Montrer que $(x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$; dessiner la boule unité. [004757]

Exercice 4758 Normes de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|,\dots,|a_n|\},$$
$$\|P\|_* = \max\{|P(t)| \text{ tq } 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. (On considèrera $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1+t+t^2+\dots+t^n$) [004758]

Exercice 4759 Norme de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ on pose $\|P\| = \sup(|P(t) - P'(t)| \text{ tq } t \in [0,1])$.
Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E. [004759]

Exercice 4760 Normes de polynômes

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$: $N_a(P) = |P(a)| + \int_{t=0}^{1} |P'(t)|\,dt$. Montrer que...

1. N_a est une norme.
2. N_0 et N_1 sont équivalentes.
3. Si $a,b \in [0,1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit $P_n = (X/2)^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite (P_n) est convergente et quelle est sa limite.
5. Si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$ alors aucune des normes N_a, N_b n'est plus fine que l'autre.

Correction ▼ [004760]

Exercice 4761 Normes sur les polynômes

Soit (λ_n) une suite de réels strictement positifs. On lui associe la norme sur $\mathbb{R}[x]$: $N(\sum_i a_i x^i) = \sum_i \lambda_i |a_i|$.
Soient (λ_n) et (λ'_n) deux suites et N, N' les normes associées. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si les suites $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}\right)$ et $\left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)$ sont bornées. [004761]

Exercice 4762 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$
$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f''(x)|,$$
$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1 ni à N.
3. Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y'' + y = g$).

Correction ▼ [004762]

Exercice 4763 Norme de Frobenius

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$.
Montrer que c'est une norme et que : $\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

Correction ▼ [004763]

Exercice 4764 Semi-norme

Soit p une semi-norme sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^))$ (ie. il manque juste l'axiome $p(A)=0 \Rightarrow A=0$). On suppose de plus que $\forall\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n((x^2+1)^)))^2,\ p(AB) \leqslant p(A)p(B)$. Montrer que $p=0$ ou p est en fait une norme.

Correction ▼ [004764]

Exercice 4765 Normes produit

Soient E,F deux evn et $G = E \times F$. On pose pour $u = (\vec{x},\vec{y}) \in G$:

$$\|u\|_1 = \|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|\vec{x}\|_E^2 + \|\vec{y}\|_F^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(\|\vec{x}\|_E, \|\vec{y}\|_F).$$

1. Montrer que ce sont des normes sur G et qu'elles sont deux à deux équivalentes (sans hypothèse de dimension finie).
2. On prend $E=F$. Montrer que pour chacune de ces normes, l'application $G \to E, (\vec{x},\vec{y}) \mapsto \vec{x}+\vec{y}$ est continue.

[004765]

Exercice 4766 Normes sur les suites

Soit E l'ensemble des suites $u=(u_n)$ réelles bornées. On pose $\begin{cases} \|u\| = \sup(|u_n| \text{ tq } n \in \mathbb{N}) \\ N(u) = \sup(|u_n| + |u_{2n}| \text{ tq } n \in \mathbb{N}). \end{cases}$
Montrer que ce sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes. [004766]

Exercice 4767 Norme sur les suites

Soit E l'ensemble des suites réelles $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$ telles que la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ est bornée. Pour $u \in E$, on pose $\|u\| = \sup(\sqrt[n]{|u_n|} \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et que $\|\ .\ \|$ *n'est pas* une norme sur E. [004767]

Exercice 4768 Fonctions lipschitziennes

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \text{ tq } x \neq y\right),$$
$$N(f) = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \text{ tq } x \neq 0\right).$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que $\|\ .\ \|$ et N sont des normes sur E.
3. Sont-elles équivalentes ?

[004768]

Exercice 4769 Fonctions $\mathscr{C}^1$

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $f \in E$, on pose : $N_1(f) = \sup(|f| + |f'|)$, $N_2(f) = \sup|f| + \sup|f'|$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E. [004769]

Exercice 4770 Norme sur les fonctions continues

$E = C([0,1],\mathbb{R})$. Soit $g \in E$. Pour tout $f \in E$ on pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)g(x)|\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2. Si pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\| \|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la proposition précédente.

[004770]

Exercice 4771 Comparaison de normes (ENS MP 2002)

1. Soit E un espace préhilbertien réel et $u_1,\dots,u_n$ des éléments de E. Calculer $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2$ où σ parcourt l'ensemble des fonctions de $[[1,n]]$ dans $\{-1,1\}$.
2. On se place dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la norme infinie n'est équivalente à aucune norme euclidienne.
3. Même question avec la norme $\| \|_p$, $p \in [1,+\infty[\setminus \{2\}$.

Correction ▼ [004771]

Exercice 4772 Jauge

Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-evn et $K \subset E$ une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que $0 \in \mathring{K}$.
Pour $x \in E$, on pose $n(x) = \inf\{|\lambda| \text{ tq } x \in \lambda K\}$. Montrer que n est une norme équivalente à $\| \|$. [004772]

Exercice 4773 Polytechnique MP* 2006

Soit E un espace vectoriel réel. On considère une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$(i) \qquad \forall\, \lambda, x,\ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)\ ;$$
$$(ii) \qquad \forall\, x,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

1. Montrer que N est une norme si et seulement $B = \{x \text{ tq. } N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.
2. Montrer que si N vérifie aussi

$$(iii) \qquad \forall\, x, y,\ N(x+y)^2 \leqslant 2N(x)^2 + 2N(y)^2$$

alors c'est une norme.

Correction ▼ [004773]

84.4 Topologie

Exercice 4774 Parties de $\mathbb{R}^n$

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + xy + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{z \in (x^2+1)$

tq $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1\}$.

[004774]

Exercice 4775 Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A+B=\{\vec{a}+\vec{b} \text{ tq } \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in B\}$. Montrer que ...

1. Si A ou B est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécéssairement fermé. (Prendre $A=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy=1\}$ et $B=\{(x,0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$)
3. Si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.

[004775]

Exercice 4776 Voisinage fermé d'un fermé

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $r>0$. On pose $F'=\bigcup_{\vec{x} \in F} \overline{B}(\vec{x}, r)$. Montrer que F' est fermé. [004776]

Exercice 4777 Ev engendré par un ouvert

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert non vide d'un ev normé E. Montrer que $\operatorname{vect}(\mathscr{O})=E$. [004777]

Exercice 4778 Adhérence et intérieur d'un sev

Soit E un evn et F un sev de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.
2. Si E est de dimension finie, montrer que $F=\overline{F}$.
3. Dans le cas général, montrer que $\mathring{F}=\varnothing$ ou $F=E$.

[004778]

Exercice 4779 Cône convexe engendré par un ensemble fini, ENS ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $a_1, \ldots, a_n \in E$. On pose $C=\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \lambda_i \geqslant 0\right\}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $c \in C$ tel que $\|x-c\|=\inf\{\|x-a\|, a \in C\}$.
2. En déduire que C est fermé.

Correction ▼ [004779]

Exercice 4780 Partie convexe dense

Soit E un evn de dimension finie et $C \subset E$ convexe et dense. Montrer que $C=E$.

Correction ▼ [004780]

Exercice 4781 L'ensemble des projecteurs est fermé

Soit E un evn de dimension finie et $\mathscr{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathscr{L}(E)$.
[004781]

Exercice 4782 Adhérence et intérieur dans les fonctions continues

1. Soit $E=\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit P l'ensemble des fonctions de E positives ou nulles. Chercher $\overline{P}$ et $\mathring{P}$.
2. Mêmes questions avec la norme : $\|f\|=\int_{t=0}^1 |f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [004782]

Exercice 4783 Mines MP 2000

On pose $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Correction ▼ [004783]

Exercice 4784 Points isolés (Ens Ulm MP* 2003)

Les solutions de l'équation $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ sont-elles isolées ?

Correction ▼ [004784]

Exercice 4785 Adhérence et intérieur d'un convexe

Soit A une partie convexe d'un evn E.

1. Démontrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont aussi convexes (pour $\mathring{A}$: faire un dessin).
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est convexe (c.a.d. $d(tx+(1-t)y,A) \leqslant td(x,A)+(1-t)d(y,A)$).

[004785]

Exercice 4786 Théorème des fermés emboités

Soit E un evn de dimension finie, et $(B_n = B(\vec{a}_n, r_n))$ une suite de boules fermées, décroissante pour l'inclusion, tq $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Montrer que la suite $(\vec{a}_n)$ admet une sous-suite convergeant vers $\vec{a} \in E$.
2. Montrer que $\vec{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{a}$.
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\vec{a}\}$.

[004786]

Exercice 4787 X MP* 2001

On considère l'espace $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$ muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $GL_n((x^2+1)^)$ est ouvert dense de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$.
2. Soit $D_n((x^2+1)^)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer que $D_n((x^2+1)^)$ est dense dans $\mathscr{M}_n((x^2+1)^)$.
3. Quel est l'intérieur de $D_n((x^2+1)^)$?

Correction ▼ [004787]

Exercice 4788 Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Soit $N \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)$. Montrer que N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à l'ensemble $\{P^{-1}NP,\ P \in GL_n((x^2+1)^)\}$.

Correction ▼ [004788]

Exercice 4789 Polynômes scindés (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathbb{R}^n$. On note $P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n$.
Soit $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \text{ tq } P_\sigma \text{ est à racines réelles, distinctes}\}$.

1. Ω est-il ouvert ? fermé ?
2. Notons $f : \sigma \mapsto P_\sigma$. Déterminer $f(\overline{\Omega})$.

Correction ▼ [004789]

84.5 Fonctions continues

Exercice 4790 $(f(x)-f(y))/(x-y)$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\begin{cases}(x,y) & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x\neq y\\ (x,x) & f'(x)\end{cases}$

Montrer que g est continue. (Attention : pour une fonction définie par cas, se placer au voisinage d'un point (x_0,y_0) et déterminer si un seul ou plusieurs cas sont à considérer dans ce voisinage) [004790]

Exercice 4791 $\sup(f(x,y))$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue. On pose $g(x)=\sup(f(x,y) \text{ tq } y\in[0,1])$. Montrer que g est continue.

Correction ▼ [004791]

Exercice 4792 Fonction tendant vers $+\infty$ à l'infini

Soit E un evn de dimension finie et $f:E\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(\vec{x})\xrightarrow[\|\vec{x}\|\to\infty]{}+\infty$, c'est à dire :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R} \text{ tq } \forall \vec{x}\in E,\ \|\vec{x}\|\geqslant B\Rightarrow f(\vec{x})\geqslant A.$$

1. On prend $A=f(\vec{0})$ et B le nombre correspondant.
   Montrer que $\inf\{f(\vec{x}) \text{ tq } \vec{x}\in E\}=\inf\{f(\vec{x}) \text{ tq } \|\vec{x}\|\leqslant B\}$.
2. En déduire que f admet un minimum.
3. Exemple : soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée.
   Montrer qu'il existe $P\in E$ tq $\|f-P\|_\infty=\sup\{|f(t)-P(t)| \text{ tq } t\in[a,b]\}$ soit minimal (P est appelé : *un polynôme de meilleure approximation de f sur $[a,b]$*).

[004792]

Exercice 4793 Fonctions homogènes

On note $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$. Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$. On dit que f est *positivement homogène de degré α* si :

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\forall\,t>0,\ f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y).$$

1. Donner des exemples de telles fonctions pour $\alpha=1,0,-2,\frac{1}{2}$.
2. Soit f continue, positivement homogène de degré α. Montrer que si $\alpha\geqslant 0$, f est bornée sur D et que si $\alpha>0$, f admet une limite finie en $(0,0)$. Examiner les cas $\alpha=0$, $\alpha<0$.

[004793]

Exercice 4794 Fonction partiellement continue dans toutes les directions

Trouver une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ discontinue en $(0,0)$ mais telle que pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $f(\alpha t,\beta t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$.
[004794]

Exercice 4795 Continuité du polynôme caractéristique

Soit $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F=\mathbb{R}_n[X]$, et $\varphi:E\to F, A\mapsto P_A$ (polynôme caractéristique). Montrer que φ est continue.
[004795]

Exercice 4796 Ouverts et non ouverts

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $P\in E$, on pose : $\begin{cases}N_1(P)=\sup(|P(t)| \text{ tq } 0\leqslant t\leqslant 1)\\ N_2(P)=\sup(|P(t)| \text{ tq } 1\leqslant t\leqslant 2)\\ \varphi(P)=P(0).\end{cases}$

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Montrer que φ est continue pour N_1.
3. Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t) = (1-t/2)^n$)
4. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathscr{O} = \{P \in E \text{ tq } P(0) \neq 0\}$. Montrer que $\mathscr{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

[004796]

Exercice 4797 Thm du point fixe

Soit E un evn de dimension finie et $f : E \to E$ une fonction k-lipchitzienne avec $k < 1$. On choisit $\vec{u}_0 \in E$ arbitrairement, et on considère la suite $(\vec{u}_n)$ telle que pour tout n : $\vec{u}_{n+1} = f(\vec{u}_n)$.

1. Montrer que $\|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n\| \leqslant k^n \|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\|$.
2. En déduire que la suite $(\vec{u}_n)$ est de Cauchy.
3. Soit $\vec{\ell} = \lim(\vec{u}_n)$. Montrer que $\vec{\ell}$ est l'unique solution dans E de l'équation $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

[004797]

Exercice 4798 Points fixes, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Montrer que les points fixes de f, continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, forment un ensemble fermé non vide.
2. Montrer que tout fermé de $[0,1]$ non vide est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Correction ▼ [004798]

Exercice 4799 Racines de polynômes X MP* 2004

Soit $E = (x^2+1)^{d[X]}$ normé par $\|P\| = \sum |a_i|$, $P \in E$ de degré d à racines simples et P_n une suite de polynômes de E convergeant vers P.
Soit $z \in (x^2+1)$ tel que $P(z) = 0$ et $\delta > 0$.

1. Montrer que pour n assez grand, P_n a au moins un zéro dans $\overline{B(z,\delta)}$.
2. Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0,\delta_0]$ P_n a exactement une racine dans $\overline{B(z,\delta)}$ si n est assez grand.
3. Que peut-on dire si les zéros de P ne sont plus supposés simples ?

Correction ▼ [004799]

Exercice 4800 Une application polynomiale est fermée, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit f une fonction polynomiale sur (x^2+1). Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé.

Correction ▼ [004800]

Exercice 4801 Principe du maximum, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit $P \in (x^2+1)^{[}X]$ et U un ouvert de (x^2+1) borné. Montrer que $\sup(|P(x)|,\ x \in U) = \sup(|P(x)|,\ x \in \mathrm{Fr}(U))$.

Correction ▼ [004801]

Exercice 4802 Fonction presque additive, Centrale MP 2001

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f une application continue de E dans F telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall\, x,y \in E,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M.$$

1. Dans le cas $M = 0$ montrer que f est linéaire. Ce résultat subsiste-t-il si E et F sont des (x^2+1)-ev ?
2. On suppose $M > 0$. Soit pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur E.
3. On note $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Montrer que g est une application linéaire continue et que c'est l'unique application linéaire telle que $f - g$ soit bornée.

Correction ▼ [004802]

Exercice 4803 f uc $\Rightarrow f$(borné) est borné

Soit $A \subset E$ une partie non vide bornée et $f : A \to F$ uniformément continue. Montrer que f est bornée dans les cas suivants :

1. A est convexe.
2. A est connexe par arcs.
3. A est quelconque et E est de dimension finie.

[004803]

84.6 Applications linéaires continues

Exercice 4804 Applications linéaires continues

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $|||u||| = \sup(\|u(\vec{x})\| \text{ tq } \|\vec{x}\| = 1)$.

1. Montrer que $|||u|||$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer que $|||\ .\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ (appelée : *norme linéaire associée à* $\|\ .\ \|$).
3. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|u(\vec{x})\| \leqslant |||u||| \times \|\vec{x}\|$.
4. En déduire que : $\forall\, u, v \in \mathscr{L}(E),\ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.

[004804]

Exercice 4805 Centrale MP 2006

E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $p \in |||$ et $f \in E$ on pose : $N_p(f) = \sup\{|t^p e^{-|t|} f(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que N_p est une norme sur E.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P_c : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$. Étudier la continuité de P_c sur (E, N_p).
3. Montrer que, pour p et q distincts dans $|||$, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Correction ▼ [004805]

Exercice 4806 Applications linéaires continues

Soient E, F deux evn de dimensions finies et $\varphi : E \to F$ linéaire. Montrer que φ est continue.
En déduire que tout sev de E est fermé. [004806]

Exercice 4807 Continuité du polynôme de Lagrange

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. À $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on fait correspondre le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.

1. Montrer que l'application $(y_1, \dots, y_n) \mapsto P$ est continue.
2. Montrer que l'application réciproque est aussi continue.

[004807]

Exercice 4808 Ensi PSI 1998

Soit $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in |||\}$.
Soit $L : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto \ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.

[004808]

Exercice 4809 Itération d'un endomorphisme

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On choisit $\vec{x}_0 \in E$, et on considère la suite $(\vec{x}_n)$ définie par la relation de récurrence : $\vec{x}_{n+1} = \frac{u(\vec{x}_n)}{\|u(\vec{x}_n)\|}$.
On suppose que la suite $(\vec{x}_n)$ converge. Montrer que la limite est un vecteur propre de u.
Exemples : **1)** $E = \mathbb{R}^3$, $\text{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **2)** $E = \mathbb{R}^3$, $\text{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. [004809]

Exercice 4810 Puissances de u

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u\| \leqslant 1$. Montrer que la suite (u^n) contient une sous-suite simplement convergente.

Correction ▼ [004810]

Exercice 4811 $\text{id} - u$ est bicontinu

Soit E un (x^2+1)-evn et $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $\text{id}_E - u$ est bicontinu. Montrer que pour tout entier n, $\text{id}_E - u^n$ est bicontinu et comparer son inverse à $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\text{id}_E - e^{2ik\pi/n} u\right)^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [004811]

Exercice 4812 Norme linéaire sur $\mathbb{R}$ = norme linéaire sur (x^2+1)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{L}((x^2+1)^n)$ les endomorphismes canoniquement associés à A. Montrer que si on munit $\mathbb{R}^n$ et $(x^2+1)^n$ des normes euclidiennes usuelles, alors $\|f\| = \|g\|$.

Correction ▼ [004812]

Exercice 4813 Applications linéaires sur les polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ muni de la norme : $\left\| \sum_i a_i x^i \right\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que $\varphi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?
2. Est-ce que $\psi : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé)
3. Reprendre les questions précédentes avec la norme : $\|P\| = \sup\{e^{-|t|}|P(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Correction ▼ [004813]

Exercice 4814 $uv - vu = \text{id}$

Soit E un espace vectoriel normé et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \text{id}_E$.

1. Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in |||^*$.
2. Montrer que u ou v est discontinu.

Correction ▼ [004814]

Exercice 4815 La dérivation peut-elle être continue ?

On note $E = \mathscr{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E de dérivation : $D(f) = f'$.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \mapsto e^{\alpha x}$).

2. Soit F le sous-ev de E constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ est continu.

Correction ▼ [004815]

Exercice 4816 Mines MP 2002

On munit $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ de la norme $\|P\|_k = \sum_{i=0}^{k} |P(i)|$. Calculer $|||\varphi|||$ avec $\varphi : E_2 \to E_3, P \mapsto X^2P'$.

Correction ▼ [004816]

Exercice 4817 Normes sur les suites bornées

Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)$ bornées et F le sev des suites telles que la série de terme général $|u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_n |u_n|$ et pour $u \in F$: $\|u\|_1 = \sum\limits_n |u_n|$.

Soit $a \in E$ et $f : E \to E, u \mapsto au = (a_nu_n)$.

1. Montrer que f est une application linéaire continue de E dans E et calculer sa norme.
2. Montrer que F est stable par f et calculer la norme de $f_{|F}$ quand on prend la norme $\|\ \|_1$ sur F.

[004817]

Exercice 4818 Thm de l'hyperplan fermé

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et $f \in E^*$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker} f$ est fermé (pour la réciproque : supposer $\mathrm{Ker} f$ fermé, montrer que $\{x \text{ tq } f(x) > 0\}$ est ouvert, puis étudier $\{x \text{ tq } -1 < f(x) < 1\}$).
2. On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = \|f\| d(x, \mathrm{Ker} f)$.

Correction ▼ [004818]

Exercice 4819 Théorème de Hahn-Banach (Polytechnique MP* 2003)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un hyperplan de E. Soit $\varepsilon \in E$ tel que $\mathbb{R}\varepsilon$ soit supplémentaire de F. Soit f une forme linéaire sur F.

1. Montrer que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant \alpha \leqslant |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
3. On définit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi_{|F} = f$ et $\varphi(\varepsilon) = \alpha$. Montrer que $|||\varphi||| = |||f|||$.
4. On considère $E = \{u = (u_n)_{n\in|||} \in \mathbb{R}^{|||} \text{ tq } \sum_{n\in|||} |u_n| < +\infty\}$ avec la norme définie par : $\|u\| = \sum_{n\in|||} |u_n|$. Montrer que E est complet pour cette norme.
5. Donner une famille dénombrable de sev de E de dimensions finies dont la réunion est dense dans E.
6. Soit F un sev de E de dimension finie et f une forme linéaire sur F. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi_{|F} = f$ et $|||\varphi||| = |||f|||$.

Correction ▼ [004819]

Exercice 4820 Rayon spectral

Soit E un evn de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $x_n = \|u^n\|$.

1. Montrer que $\rho = \inf\{\sqrt[n]{x_n},\ n \in |||\}$ est indépendant de la norme choisie sur E.
2. En utilisant l'inégalité : $x_{p+q} \leqslant x_px_q$, montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers ρ.

[004820]

Exercice 4821 Rayon spectral (Centrale MP 2001)

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. On considère un endomorphisme f de E et on note $\rho(f) = \sup\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$ (rayon spectral de f). Soit ν une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\rho(f) \leqslant \lim_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$. On pourra pour commencer supposer que ν est la norme subordonnée à une norme sur E.
2. Montrer que si f est diagonalisable l'inégalité précédente est une égalité.
3. Étudier le cas général.

Correction ▼ [004821]

Exercice 4822 Polytechnique MP* 2000

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Prouver que u est surjective si et seulement si elle transforme tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ en ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Correction ▼ [004822]

84.7 Connexité

Exercice 4823 Connexité d'un evn

Soit E un evn et $A \subset E$. On suppose que A est à la fois ouvert et fermé.

1. Exemples de telles parties ?
2. On définit la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par $\begin{cases} \vec{x} & 1 \text{ si } \vec{x} \in A, \\ \vec{x} & 0 \text{ si } \vec{x} \notin A \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue.
   (b) On prend $\vec{a} \in A$ et $\vec{b} \notin A$. Montrer que $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t\vec{a}+(1-t)\vec{b})$ est continue.
   (c) Conclure.

[004823]

Exercice 4824 $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$ => $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$

Soit E un evn et A une partie de E ni vide, ni égale à E. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$. [004824]

Exercice 4825 $A \cup B$ fermé $\Rightarrow A \cup B = E$.

Soit E un evn de dimension supérieure ou égale à 2 et A, B deux parties de E telles que A est ouvert non vide, B est fini et $A \cup B$ est fermé. Montrer que $A \cup B = E$.

Correction ▼ [004825]

Exercice 4826 Complémentaire d'un hyperplan (Ens Ulm MP* 2005)

Soit E un evn réel et H un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H *n'est pas* fermé.

Correction ▼ [004826]

85 Compacité

Exercice 4827 Graphe fermé

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On note $Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F \text{ tq } y = f(x)\}$.

1. Montrer que si f est continue, alors $Gr(f)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.
3. Donner un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

[004827]

Exercice 4828 Application presque contractante

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x,y \in A,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y)$.

1. Montrer que f admet un point fixe unique, a.
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers a.

Correction ▼ [004828]

Exercice 4829 Application presque contractante (Mines MP 2003)

Soit C un compact convexe d'un evn E. Soit $f : C \to C$, 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe. On pourra utiliser la fonction $f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ avec $a \in C$.

Correction ▼ [004829]

Exercice 4830 Fonction bicontinue sur un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to F$ une fonction continue et injective (F = evn).

1. Montrer que $f^{-1} : f(A) \to A$ est aussi continue.
2. Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

[004830]

Exercice 4831 Isométries d'un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E et $f : A \to A$ telle que : $\forall\, x,y \in A,\ d(f(x),f(y)) \geqslant d(x,y)$.

1. Soit $a \in A$ et (a_n) la suite définie par : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (a_n).
2. Soient $a,b \in A$. Montrer que $d(f(a),f(b)) = d(a,b)$.
3. Montrer que $f(A) = A$.

[004831]

Exercice 4832 Partie dense dans un compact

Soit A une partie compacte d'un evn E. Montrer qu'il existe une suite (a_k) d'éléments de A qui est dense dans A. [004832]

Exercice 4833 Intersection emboitée

Soit E un espace vectoriel normé, (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de E et $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe n tel que $K_n \subset U$.
3. Montrer que $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \delta(K_n)$ (δ est le diamètre).

Correction ▼ [004833]

Exercice 4834 Image d'une intersection

Soient E,F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts de E. Montrer que $f(\bigcap_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$.

[004834]

Exercice 4835 Recouvrement ouvert

Soit A une partie compacte d'un evn E et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute partie de A de diamètre inférieur ou égal à r soit incluse dans l'un des O_i.

Correction ▼ [004835]

Exercice 4836 Ensemble compact de suites

Soit $E = \mathscr{B}(|||,\mathbb{R}) = \{\text{suites } u = (u_n) \text{ bornées}\}$. On munit E de la norme : $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$. Montrer que $A = \{u \in E \text{ tq } \forall\, n \in |||,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1\}$ est compact.

Correction ▼ [004836]

Exercice 4837 Boule unité non compacte

Soit $E = \mathscr{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|.\|_2$. Pour $n \in |||$, on pose $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $n, p \in |||$.
2. En déduire que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

[004837]

Exercice 4838 Plus petite boule contenant une partie

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie bornée contenant au moins deux points.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimum contenant A.
2. Montrer que cette boule n'est pas nécessairement unique (on prendra $\|.\| = \|.\|_\infty$).
3. Montrer que si $\|.\|$ est une norme euclidienne, alors la boule précédente est unique.

[004838]

Exercice 4839 Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel normé, K un compact convexe de E, f une application de K dans K, 1-lipchitzienne. Montrer que f a un point fixe.

Correction ▼ [004839]

Exercice 4840 Thm. de Riesz, Stival 2003

Soit E un evn de dimension infinie.

1. Soit F un sev de dimension finie et $a \in E \setminus F$.
   (a) Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a,F)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\|c\| = 1 = d(c,F)$.
2. Montrer que la boule unité de E n'est pas compacte.

[004840]

---

86 Connexité

Exercice 4841 Frontière connexe

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ fermé. Montrer que si $\mathrm{Fr}(A)$ est connexe, alors A est connexe.

Correction ▼ [004841]

Exercice 4842 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes

Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $(x^2 + 1)$ et $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective. [004842]

Exercice 4843 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit E un evn de dimension finie et (u_n) une suite bornée d'éléments de E telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est connexe.

Correction ▼ [004843]

Exercice 4844 Complémentaire d'une partie étoilée

Soit Ω une partie bornée étoilée d'un evn réel de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que le complémentaire de Ω est connexe.

[004844]

Exercice 4845 Complémentaire d'un sev

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et F un sev propre de E. Montrer que $E \setminus F$ est connexe si et seulement si $\operatorname{codim}(F) \geqslant 2$. Que peut-on dire dans un (x^2+1)-ev ? [004845]

87 Espaces complets

Exercice 4846 Norme pour les fonctions lipschitziennes

Soit $E = \{\text{fonctions lipchitziennes } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{x \neq y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$.

Montrer que E est complet.

[004846]

Exercice 4847 Image d'une intersection de fermés

Soit E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé quelconque, $f : E \to F$ une application continue et (E_n) une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre tend vers 0.
Montrer que $f(\bigcap\limits_n E_n) = \bigcap_n f(E_n)$. [004847]

Exercice 4848 Intersection de boules

Soit E un evn complet et $(B_n(a_n, r_n))$ une suite décroissante de boules fermées dont le rayon ne tend pas vers 0. Montrer que $\bigcap_n B_n$ est une boule fermée.

Correction ▼ [004848]

Exercice 4849 Intersection vide

Soit $E = \mathscr{B}(|||, \mathbb{R}) = \{\text{suites } u = (u_n) \text{ bornées}\}$. On munit E de la norme : $\|u\| = \sup\{|u_n|,\ n \in |||\}$.

1. Montrer que E est complet.
2. Soit $F_k = \{u \in E \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } u_0 = \cdots = u_k = 0\}$. Vérifier que les F_k forment une suite de fermés bornés emboîtés dont l'intersection est vide.

[004849]

Exercice 4850 Théorème de Baire

Soit E un espace vectoriel normé complet et (F_n) une suite de fermés de E d'intérieurs vides. On pose $F = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction ▼ [004850]

Exercice 4851 $f \circ f$ est contractante

Soit E un espace vectoriel normé complet et $f : E \to E$ telle que $f \circ f$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction ▼ [004851]

Exercice 4852 Centrale MP 2001

Montrer qu'un plan euclidien n'est pas réunion de cercles disjoints non réduits à un point.

Indication ▼ Correction ▼ [004852]

88 Fonctions vectorielles

Exercice 4853 Centre de gravité d'une courbe paramétrée

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto M_t$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ de longueur non nulle. Le centre de gravité de la courbe est le point G tel que $\int_{t=a}^{b} \vec{GM_t} \|\vec{M}'(t)\| \, dt = \vec{0}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de G.
2. Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle. (On admet que G est indépendant du paramétrage)
3. Montrer que G appartient à l'enveloppe convexe de la courbe.
4. Montrer que si la courbe admet un axe de symétrie, Δ, alors $G \in \Delta$. (Si σ est la symétrie associée, considérer la courbe décrite par $N_t = \sigma(M_t)$)
5. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie affine. Montrer que si G est le centre de gravité de $\mathscr{C}$, alors $\Phi(G)$ est le centre de gravité de $\Phi(\mathscr{C})$.

Correction ▼ [004853]

Exercice 4854 Dérivée d'une base orthonormée

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $t \in I$, $\mathscr{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (base orthonormée mobile).

1. Soit M_t la matrice dans $\mathscr{B}_t$ des vecteurs dérivés $\vec{e}_1{}'(t), \vec{e}_2{}'(t), \vec{e}_3{}'(t)$. Montrer que M_t est antisymétrique.
2. En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}(t)$ tel que $\vec{e}_i{}'(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$, $i = 1,2,3$.
3. Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que $\vec{\Omega}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\vec{e}_i{}''$ en fonction de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ et $\vec{e}_i$.

Correction ▼ [004854]

Exercice 4855 f' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0} \text{ et la famille } (\vec{f}(t), \vec{f}'(t)) \text{ est liée.}$$

On pose $\vec{g}(t) = \frac{\vec{f}(t)}{\|\vec{f}(t)\|}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\vec{g}'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $\vec{g}(t)$.
2. En déduire que $\vec{f}(t)$ garde une direction constante.
3. Chercher un contre-exemple lorsqu'on retire la propriété : $\forall\, t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0}$.

[004855]

Exercice 4856 f'' est colinéaire à f

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $\vec{f}''(t)$ est colinéaire à $\vec{f}(t)$. (*mouvement à accélération centrale*) On note $\vec{\sigma}(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{f}'(t)$.

1. Montrer que $\vec{\sigma}(t)$ est un vecteur constant.
2. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $(\vec{f}(t_0), \vec{f}'(t_0))$ est libre, montrer que $\vec{f}(I)$ est inclus dans un plan.

[004856]

Exercice 4857 f et g colinéaires

Soient $f,g : I \subset \mathbb{R} \to E$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$.

1. On suppose : $\forall\, t \in I,\ f(t)$ et $g(t)$ sont colinéaires. Est-ce que $f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires ?
2. On suppose : $\forall\, t \in I,\ f'(t)$ et $g'(t)$ sont colinéaires. Existe-t-il $\vec{c} \in E$ tel que $f - \vec{c}$ et g soient colinéaires ?

Correction ▼ [004857]

Exercice 4858 $\mathbb{R}^2 \setminus$ une droite n'est pas connexe

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue, D une droite de $\mathbb{R}^2$ et P^+, P^- les demi-plans délimités par D. Montrer que s'il existe $a,b \in I$ tels que $f(a) \in P^+$ et $f(b) \in P^-$, alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) \in D$. Généraliser en dimension n. [004858]

Onzième partie
Géométrie

89 Sous-espaces affines

Exercice 4859 Ensi Physique P 94

Soient I,J,K trois points du plan. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés :
a) I, J, K sont alignés.
b) Il existe M tel que $\det(\vec{MI},\vec{MJ}) + \det(\vec{MJ},\vec{MK}) + \det(\vec{MK},\vec{MI}) = 0$.
c) Pour tout point M, on a $\det(\vec{MI},\vec{MJ}) + \det(\vec{MJ},\vec{MK}) + \det(\vec{MK},\vec{MI}) = 0$.

Correction ▼ [004859]

Exercice 4860 Faisceau de plans

On considère deux plans non parallèles de $\mathscr{E}_3$ ayant pour équation dans un repère $\mathscr{R} = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\begin{cases} P: & ax+by+cz+d = 0 \\ P': & a'x+b'y+c'z+d' = 0. \end{cases}$$

Soit $D = P \cap P'$. Montrer qu'un plan Q contient D si et seulement s'il a pour équation dans $\mathscr{R}$:

$$\alpha(ax+by+cz+d) + \beta(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

Correction ▼ [004860]

Exercice 4861 Équation d'un plan

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $A : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D : \begin{cases} x-3y+2z = 1 \\ 2x+y-3z = -1. \end{cases}$

Donner l'équation cartésienne du plan passant par A et D.

Correction ▼ [004861]

Exercice 4862 Droites coplanaires

Dans $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne : $D : \begin{cases} x-2z = 1 \\ y-z = 2 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y+2z = a. \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de a, D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Donner alors l'équation du plan contenant D et D'.

Correction ▼ [004862]

Exercice 4863 Droites non coplanaires

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et D, D', D'' trois droites parallèles à un même plan $\mathscr{P}$, mais deux à deux non coplanaires.

1. Montrer que par tout point A de D, il passe une unique droite Δ_A rencontrant D' et D''.
2. Montrer que les droites Δ_A sont toutes parallèles à un même plan $\mathscr{Q}$.

Correction ▼ [004863]

Exercice 4864 Droites concourantes

Dans $\mathscr{E}_2$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois droites : $\begin{cases} D: & \text{ax + by = c} \\ D': & \text{a'x + b'y = c'} \\ D'': & \text{a''x + b''y = c''.} \end{cases}$

Montrer que D, D', D'' sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$ [004864]

Exercice 4865 Droites concourantes

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et $M \in (ABC)$. On note I, J les projections de M sur (AB) et (CD) parallèlement à (AD), et K, L les projections de M sur (AD) et (BC) parallèlement à (AB).
Montrer que les droites (IK), (JL), (BD) sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004865]

Exercice 4866 Équation d'une droite variable

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de $\mathscr{E}_2$, et $A : \binom{1}{0}$, $B : \binom{0}{1}$, $C : \binom{0}{2}$.
Pour $m \in \mathbb{R}$, on construit les droites $D : y = mx$ et $D' : y = -mx$, puis $M \in D \cap (AB)$, et $M' \in D' \cap (AC)$ (si possible).
Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe (= indépendant de m).

Correction ▼ [004866]

Exercice 4867 Dimensions

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathscr{E}$. On note $\mathscr{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Déterminer $\dim(\mathscr{H})$.

Correction ▼ [004867]

Exercice 4868 Dimensions

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, deux sous-espaces affines disjoints de dimensions f, g d'un espace affine $\mathscr{E}$ avec $f \leqslant g$.
Montrer que $\mathscr{F} \mathbin{//} \mathscr{G}$ si et seulement s'il existe un sous-espace affine $\mathscr{H}$ de dimension $g+1$ contenant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. [004868]

Exercice 4869 Centrale PSI 1997

Soit la famille de droites :

$$(D_\lambda) \quad \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z. \end{cases}$$

1. En écrivant leurs équations sous la forme $\begin{cases} z = a \\ ux + vy + h = 0 \end{cases}$ montrer qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 horizontales coupant toutes les droites D_λ.
2. Trouver les équations des plans passant par $M(\lambda, \lambda^2, 0)$ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2.
3. Retrouver l'ensemble (D_λ).

Correction ▼ [004869]

90 Applications affines

Exercice 4870 $f^p = \mathrm{id} => f$ a un point fixe

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine telle qu'il existe $p \in |||^*$ tel que $f^p = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
[004870]

Exercice 4871 1 non valeur propre ⇒ un pt fixe unique

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. [004871]

Exercice 4872 Expressions analytiques

On fixe un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes :

1. Symétrie de base le plan d'équation $x + 2y + z = 1$ et de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
2. Symétrie de base la droite d'équations $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + z + 2 = 0, \end{cases}$ de direction le plan vectoriel d'équation $3x + 3y - 2z = 0$.

Correction ▼ [004872]

Exercice 4873 Expression analytique

On fixe un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace affine de dimension 3. Reconaître l' application ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8. \end{cases}$$

(chercher les points fixes de f et étudier $\overrightarrow{MM'}$)

Correction ▼ [004873]

Exercice 4874 Permutation circulaire de 4 points

Dans un espace affine $\mathscr{E}$, on considère quatre points A, B, C, D. Étudier l'existence d'une application affine f telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = A$.

Correction ▼ [004874]

Exercice 4875 $f^3 = \mathrm{id}$

Soit $\mathscr{P}$ un plan, et $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une application affine telle que $f^3 = \mathrm{id}$, avec $f \neq \mathrm{id}$.

1. Montrer que si $A \neq f(A)$, alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés.

2. En déduire que f est le produit de deux symétries.

[004875]

Exercice 4876 Produit d'affinités

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$, et f,g deux affinités de base $\mathscr{D}$, de directions $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta}'$ et de rapports λ, μ.
Étudier la nature de $f \circ g$.

Correction ▼ [004876]

Exercice 4877 Barycentre de projections

Soient π, π' deux projections dans un espace affine $\mathscr{E}$ ayant même direction $\vec{\mathscr{F}}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note π_λ l'application : $M \longmapsto \mathrm{Bar}(\pi(M) : \lambda, \pi'(M) : 1-\lambda)$.
Montrer que π_λ est encore une projection de direction $\vec{\mathscr{F}}$. [004877]

Exercice 4878 Symétrie-translation

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient s une symétrie de base $\mathscr{B}$ de direction $\vec{\mathscr{F}}$, et t une translation de vecteur $\vec{u}$.
   Montrer que $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \vec{\mathscr{B}}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s,t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.
3. Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que le produit d'une symétrie par une translation quelconques est une symétrie-translation.
5. AN : décomposer l'application f d'expression analytique dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Correction ▼ [004878]

Exercice 4879 Transitivité des homothéties-translations

Dans un espace affine $\mathscr{E}$ on donne quatre points P, Q, P', Q' avec $P \neq Q$. Existe-t-il une homothétie-translation f telle que $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$?

Correction ▼ [004879]

Exercice 4880 Usage d'applications affines

On considère dans l'espace deux plans parallèles distincts $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $A, B, C \in \mathscr{P}$, $O \notin \mathscr{P}$, et on construit les points suivants :
– A', B', C' : les intersections avec $\mathscr{P}'$ des droites (OA), (OB), (OC).
– α, β, γ : les milieux des segments $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$.
Montrer que les droites $(A'\alpha)$, $(B'\beta)$, $(C'\gamma)$ sont parallèles ou concourantes.

Correction ▼ [004880]

Exercice 4881 Usage d'applications affines

Soient $A_1, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$.
Étudier l'existence de points $B_1, \dots, B_n$ tels que $A_i = \mathrm{mil}(B_i, B_{i+1})$ $(A_n = \mathrm{mil}(B_n, B_1))$. [004881]

Exercice 4882 Projection stéréographique

Dans l'espace, on considère un point O et un plan $\mathscr{P}$ ne passant pas par O. On définit l'application $f : M \longmapsto M'$ où M' est le point intersection de $\mathscr{P}$ et (OM). (Projection stéréographique sur $\mathscr{P}$ de pôle O)

1. Est-ce que f est affine ?
2. Etudier l'image par f d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe.

[004882]

Exercice 4883 Caractérisation des produits de symétries

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ affine.
Montrer que f est un produit de symétries si et seulement si $\det(\vec{f}) = \pm 1$. [004883]

91 Barycentres

Exercice 4884 Équation barycentrique d'une droite

Soit (A,B,C) une base affine de $\mathscr{E}_2$, et M,M',M'' trois points de coordonnées barycentriques (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$.

Montrer que M,M',M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$. [004884]

Exercice 4885 Points dans l'espace

Dans l'espace, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en O, $O \notin (ABC)$ et A,B,C non alignés. Soient G,G' les isobarycentres des triangles ABC, $A'B'C'$. CNS pour que O,G,G' soient alignés ?

Correction ▼ [004885]

Exercice 4886 Polygone des milieux

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$ où A'_i est le milieu de A_i et A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.
(Écrire un sommet de P_k comme barycentre de $A_1,\dots,A_n$)

Correction ▼ [004886]

Exercice 4887 Isobarycentre de tous les points sauf un

Soit $P = A_1A_2\dots A_n$ un polygone à n sommets : on lui associe le polygone $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$ où A'_i est l'isobarycentre de tous les sommets sauf A_i.

On définit alors une suite de polygones par récurrence : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$

Montrer que chaque sommet de P_k converge vers le centre de gravité de P_0 lorsque k tend vers l'infini.

Correction ▼ [004887]

Exercice 4888 Suite récurente

Soient A_0,A_1,A_2 trois points donnés. On considère la suite (A_k) de points vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall\, k \geqslant 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Étudier la convergence de cette suite.

Correction ▼ [004888]

92 Propriétés des triangles

Exercice 4889 Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C.

1. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. Dans ce cas, montrer que $P' = \text{mil}(P, C)$, $Q' = \text{mil}(Q, A)$, et $R' = \text{mil}(R, B)$ sont aussi alignés.

[004889]

Exercice 4890 Théorème de Céva

Soit ABC un triangle et trois points $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C. Démontrer que les droites (AQ), (BR), (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Exercice 4891 Droites parallèles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les parallèles à (AB), (BC), (CA) passant respectivement par C', A', B' soient concourantes.
Montrer qu'il en est de même pour les parallèles à $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ passant par C, A, B.

[004891]

Exercice 4892 Points aux tiers des côtés

Soit ABC un triangle, $A_1 = \text{Bar}(B:2, C:1)$, $B_1 = \text{Bar}(C:2, A:1)$ et $C_1 = \text{Bar}(A:2, B:1)$.
On note A_2, B_2, C_2 les points d'intersection des droites (AA_1), (BB_1), et (CC_1).

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B, B_2]$.
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$.

Correction ▼ [004892]

Exercice 4893 Symétriques d'un point par rapport aux milieux des cotés

Soit un triangle ABC, A', B', C', les milieux des côtés, et M un point du plan (ABC) de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

1. Chercher les coordonnées barycentriques de P, Q, R symétriques de M par rapport aux points A', B', C'.
2. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes en un point N.
3. Montrer que N est le milieu de $[A, P]$, $[B, Q]$, $[C, R]$.
4. Reconnaître l'application $M \mapsto N$.

Correction ▼ [004893]

Exercice 4894 Parallélogrammes

Dans le plan, on considère :
– trois points non alignés A, B, C.
– trois points alignés P, Q, R avec $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.
On construit les points I, J, K de sorte que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ soient des parallélogrammes.
Montrer que I, J, K sont alignés.
Correction ▼ [004894]

Exercice 4895 Projections en cascade

Soient A,B,C trois points non alignés et $M_1 \in (AB)$. On construit les points M_2,M_3,M_4 de la manière suivante :
– M_2 est le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AC).
– M_3 est le projeté de M_2 sur (AC) parallèlement à (AB).
– M_4 est le projeté de M_3 sur (AB) parallèlement à (BC).
On recommence ensuite les mêmes constructions à partir de M_4, ce qui donne les points M_5,M_6,M_7.
Montrer que $M_7 = M_1$.

Correction ▼ [004895]

Exercice 4896 Caractérisation du barycentre par les surfaces

Soit ABC un triangle, et $M \in (ABC)$. On note α,β,γ les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

1. On suppose que M est dans l'enveloppe convexe de $\{A,B,C\}$.
   Montrer que : $(\alpha = \beta = \gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. Quels sont tous les points du plan (ABC) tels que $\alpha = \beta = \gamma$?

Correction ▼ [004896]

Exercice 4897 Coord. barycentriques du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overline{\vec{AB},\vec{AC}})$, $\beta \equiv (\overline{\vec{BC},\vec{BA}})$, $\gamma \equiv (\overline{\vec{CA},\vec{CB}})$.

1. Montrer que pour tout point M du cercle (ABC), on a :
$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$
2. En déduire les coordonnées barycentriques du centre du cercle (ABC).

[004897]

Exercice 4898 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Soit A' le pied de la bissectrice intérieure issue de A. Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de I, centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [004898]

Exercice 4899 Orthocentre

Soit ABC un triangle. On note : $\alpha \equiv (\overline{\vec{AB},\vec{AC}})$, $\beta \equiv (\overline{\vec{BC},\vec{BA}})$, $\gamma \equiv (\overline{\vec{CA},\vec{CB}})$.

1. Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Calculer $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.
2. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H.

Correction ▼ [004899]

93 Coniques

Exercice 4900 Équations du second degré

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé :

1. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0$.
2. $5x^2 + 7y^2 + 2xy\sqrt{3} - (10+2\sqrt{3})x - (14+2\sqrt{3})y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$.
3. $x^2 + xy + y^2 = 1$.

4. $x^2 + 2y^2 + 4xy\sqrt{3} + x + y\sqrt{3} + 1 = 0$.
5. $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$).

Correction ▼ [004900]

Exercice 4901 Courbe paramétrée

Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments.

Correction ▼ [004901]

Exercice 4902 Points alignés avec le foyer

Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F, directrice D, excentricité e. On considère deux points de $\mathscr{C}$, $M \neq M'$ alignés avec F. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Correction ▼ [004902]

93.1 Parabole

Exercice 4903 Orthoptique d'une parabole

Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. Soit $M \in P$, et M' le point de P tel que les tangentes en M et M' sont orthogonales.

1. Montrer que ces tangentes se coupent au milieu de $[H, H']$.
2. Montrer que M, F, M' sont alignés.
   En déduire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné, toutes les paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Correction ▼ [004903]

Exercice 4904 Cercle circonscrit

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Soit Δ le diamètre parallèle à (AB).
Pour $M \in \mathscr{C}$, on note P, Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ. Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ.

Correction ▼ [004904]

Exercice 4905 Projection sur le diamètre d'un cercle

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $A \in \mathscr{C}$. Pour $M \in \mathscr{C}$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA), et I, le point d'intersection de (OM) et (AN). Quel est le lieu de I ?

Correction ▼ [004905]

Exercice 4906 $MF + MH = 2a$

Soit F un point, D une droite ne passant pas par F, et $a > \frac{1}{2}d(F, D)$.
Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M, D) = 2a$.

Correction ▼ [004906]

Exercice 4907 Paraboles passant par un point

Soient D une droite et $F \in D$.
Montrer que pour tout point $M \notin D$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe D.
Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales. [004907]

Exercice 4908 Longueur minimale d'une corde normale, Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de paramètre p et $A \in \mathscr{P}$. Soit B le point où la normale à $\mathscr{P}$ en A recoupe $\mathscr{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.

Correction ▼ [004908]

Exercice 4909 Cordes perpendiculaires, Centrale P' 1996

On considère une parabole dans le plan euclidien.

1. Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points A et B de la parabole à l'aide d'un déterminant d'ordre 3.
2. A,B,C étant trois points sur la parabole, exprimer le fait que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
3. On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M.
4. Quel est le lieu de M quand A varie ?

Correction ▼ [004909]

Exercice 4910 Normales concourantes, Centrale P' 1996

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{P}$.

1. Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathscr{P}$ distincts de M_0 tels que la normale à $\mathscr{P}$ en M passe par M_0.
2. Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.

Correction ▼ [004910]

Exercice 4911 Croisillons sur une parabole, Centrale MP 2000

Pour $p > 0$ on donne la courbe Γ d'équation $y^2 = 2px$. Soit un carré $ABCD$ tel que $B,D \in \Gamma$ et A,C appartiennent à l'axe de symétrie de Γ.

1. Quelle relation lie les abscisses de A et C ?
2. On construit une suite (M_n) de points de Ox, M_n d'abscisse x_n, telle que $x_{n+1} > x_n$ et M_nM_{n+1} est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à Γ. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to \infty$.

Correction ▼ [004911]

93.2 Ellipse

Exercice 4912 Orthoptique d'une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F,F', de centre O, de dimensions a et b.
Soient $M,M' \in \mathscr{E}$ tels que les tangentes à $\mathscr{E}$ sont perpendiculaires en un point T.
Montrer que $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$. Quel est le lieu de T quand M et M' varient ?

Correction ▼ [004912]

Exercice 4913 Tangentes à une ellipse

Soient $\mathscr{E} : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathscr{E}' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. CNS sur u,v,w pour que la droite d'équation $ux+vy+w = 0$ soit tangente à $\mathscr{E}'$?
2. Soient (MP), (MQ) deux tangentes à $\mathscr{E}'$ avec $M,P,Q \in \mathscr{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente à $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [004913]

Exercice 4914 Points mobiles avec $PQ =$ constante

Soient P un point mobile sur Ox, et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathscr{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P : 1-\alpha, Q : \alpha)$.
2. Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_\alpha$ en un point M est perpendiculaire à (RM).

Correction ▼ [004914]

Exercice 4915 FMT est rectangle en F

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyer F, directrice D. Soit $M \in \mathscr{E}$ hors de l'axe focal, et T le point d'intersection de la tangente en M et de la directrice D. Montrer que FMT est rectangle en F.

Correction ▼ [004915]

Exercice 4916 $1/OM^2 + 1/OP^2$

Soit $\mathscr{E}$ un ellipse de centre O et de dimensions a, b. Soient $M, P \in \mathscr{E}$ tels que OMP soit rectangle en O.

1. Montrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
2. En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O.

[004916]

Exercice 4917 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de sommets A, A', et $M \in \mathscr{E}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathscr{E}$. [004917]

93.3 Hyperbole

Exercice 4918 Projection non orthogonale

Soient F un point, D une droite ne passant pas par F, et $\vec{\Delta}$ une direction ni égale ni perpendiculaire à $\vec{D}$. Pour $M \in \mathscr{P}$, on note H le projeté de M sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?

Correction ▼ [004918]

Exercice 4919 Triangle rectangle sur une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère de dimension a. On se place dans un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j})$ construit sur les asymptotes de $\mathscr{H}$.

1. Déterminer l'équation de $\mathscr{H}$ dans ce repère.
2. Soit ABC un triangle rectangle en A dont les trois sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que la tangente en A est orthogonale à (BC).
3. Soit ABC un triangle quelconque dont les sommets sont sur $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre y est aussi.

Correction ▼ [004919]

Exercice 4920 Cercle sur une tangente

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de sommets A, A', et $M \in \mathscr{H}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathscr{H}$. [004920]

Exercice 4921 Triangle équilatéral

Soient A, F deux points distincts, D leur médiatrice, $\mathscr{H}$ l'hyperbole de foyer F, directrice D, excentricité 2, et $\mathscr{C}$ un cercle passant par A et F, de centre I.

1. Pour $M \in \mathscr{C}$, montrer que $M \in \mathscr{H} \Leftrightarrow 3\overline{(\vec{IM}, D)} \equiv \overline{(\vec{IF}, D)}$ $[2\pi]$.
2. En déduire que si $I \notin (AF)$, $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{H}$ aux sommets d'un triangle équilatéral.

Correction ▼ [004921]

Exercice 4922 $\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM}, \vec{AO})}$

Soient O, A deux points distincts du plan. Trouver les points M tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv 2\overline{(\vec{AM}, \vec{AO})}$.

Correction ▼ [004922]

Exercice 4923 Lieu géométrique

Soient A, A' deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[A, A']$. Pour $P \in \mathscr{C}$, on construit : P' le symétrique de P par rapport à (AA'), et M le point d'intersection de (AP) et (A', P'). Quel est le lieu de M ?

Correction ▼ [004923]

Exercice 4924 Triangle sur une hyperbole, Ensi P 91

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère et ABC un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathscr{H}$. Montrer que l'orthocentre, H, du triangle appartient aussi à $\mathscr{H}$. Comparer H et le point Q où le cercle circonscrit à ABC recoupe $\mathscr{H}$.

Correction ▼ [004924]

94 Quadriques

Exercice 4925 Étude d'équations

Déterminer les natures des surfaces d'équation :

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.
2. $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.
3. $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0$.
4. $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0$.
5. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$.
6. $xy + xz + yz + 1 = 0$.
7. $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$.
8. $xy + yz = 1$.
9. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.
   On fera le minimum de calculs nécéssaires pour pouvoir conclure.

Correction ▼ [004925]

Exercice 4926 Repère non orthonormé

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ dans un repère non orthonormé. Montrer que c'est quand même une quadrique. [004926]

Exercice 4927 Centre de symétrie

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique d'équation $f(x,y,z)=0$. On note q la forme quadratique associée à f.

1. Montrer que, pour tout point A et tout vecteur $\vec{h}$, on a : $f(A+\vec{h}) = f(A) + (\vec{\nabla} f(A) \mid \vec{h}) + q(\vec{h})$.
2. On suppose que $\mathscr{S}$ n'est pas incluse dans un plan. Montrer qu'un point Ω est centre de symétrie de $\mathscr{S}$ si et seulement si $\vec{\nabla} f(\Omega) = \vec{0}$.
3. En déduire que si 0 n'est pas valeur propre de la matrice de q, alors $\mathscr{S}$ admet un centre unique.

[004927]

Exercice 4928 Cône s'appuyant sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équations : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ et $\Omega=(x_0,y_0,z_0)$ avec $z_0 \neq 0$. On note $\mathscr{C}$ le cône de sommet Ω engendré par $\mathscr{E}$.

1. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. Quels sont les points Ω tels que $\mathscr{C} \cap Oyz$ soit un cercle ?

Correction ▼ [004928]

Exercice 4929 Sections circulaires

1. On considère la forme quadratique $q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ avec $a \in [b,c]$.
   (a) Montrer qu'il existe $y,z \in \mathbb{R}$ tels que $y^2+z^2=1$ et $by^2+cz^2=a$.
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme : $M=\begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.
2. Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde de centre O. Montrer qu'il existe un plan P qui coupe $\mathscr{E}$ selon un cercle de centre O. Montrer que les sections de $\mathscr{E}$ par des plans parallèles à P sont des cercles.
3. Peut-on généraliser à une quadrique quelconque ?

Correction ▼ [004929]

Exercice 4930 Rotation d'une droite

1. Soit D la droite d'équations $\begin{cases} y=1 \\ x=\lambda z \end{cases}$ où λ est un réel non nul fixé. Déterminer une équation cartésienne et la nature de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de D autour de Oz.
2. En déduire que tout hyperboloïde de révolution à une nappe est réunion d'une famille de droites (*surface réglée*).
3. Généraliser à un hyperboloïde à une nappe quelconque.

Correction ▼ [004930]

Exercice 4931 Droites sur un paraboloïde hyperbolique

Soit $\mathscr{P}$ le paraboloïde d'équation $z=xy$. Montrer que par tout point $M \in \mathscr{P}$, il passe deux droites et deux seulement incluses dans $\mathscr{P}$. [004931]

Exercice 4932 Hyperbole en rotation

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x^2-y^2-4x+2=0 \\ x+z=1. \end{cases}$

1. Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\mathscr{C}$.
2. Chercher une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de Oz et reconnaître $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [004932]

Exercice 4933 Volume d'un ellipsoïde

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{3z^2}{4}+xz=1$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Correction ▼ [004933]

Exercice 4934

Équation d'un cône
Déterminer les réels λ tels que la surface d'équation : $x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)=\lambda$ soit un cône. Préciser alors le sommet et la nature du cône.

Correction ▼ [004934]

Exercice 4935 Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et P un plan d'équation $ux+vy+wz=1$. Montrer que P est tangent à E si et seulement si $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$. [004935]

Exercice 4936 Normale à un ellipsoïde

Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, M un point de $\mathscr{E}$, et P,Q,R les intersections de la normale en M à $\mathscr{E}$ avec les plans Oyz, Oxz, Oxy. Montrer que $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ sont dans un rapport constant (indépendant de M).

Correction ▼ [004936]

Exercice 4937 Points équidistants de deux droites

Soient D,D' deux droites non coplanaires et $\mathscr{S}$ l'ensemble des points équidistants de D et D'. Montrer que $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux) [004937]

Exercice 4938 $MF=eMH$

On considère un point F, un plan P ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,P)$ est une quadrique de révolution. Préciser les différents cas possibles. [004938]

Exercice 4939 $MF=ed(M,D)$

Dans l'espace, on considère un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel $e>0$. Montrer que l'ensemble, $\mathscr{S}$, des points M tels que $MF=ed(M,D)$ est une quadrique. Préciser les différents cas possibles.

Correction ▼ [004939]

Exercice 4940 $d(M,P)^2+d(M,D)^2=$ cste

On considère un plan P et une droite D sécants. Déterminer le lieu des points M tels que $d(M,P)^2+d(M,D)^2=a$ (constante fixée).

Correction ▼ [004940]

Exercice 4941 Points équidistants d'un plan et d'une droite

Dans l'espace, soit P le plan d'équation $z=0$ et D la droite d'équations : $\begin{cases} y=0 \\ x\cos\theta - z\sin\theta = 0. \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2})$

Quel est le lieu des points M tels que $d(M,P) = d(M,D)$?

Correction ▼ [004941]

Exercice 4942 Sphères équidistantes d'une sphère et d'un plan

Dans l'espace, on considère un plan P et une sphère S. Quel est le lieu des centres des sphères tangentes à S et à P ?

Correction ▼ [004942]

Exercice 4943 Appellations incontrolées

La liste des quadriques semble comporter des oublis : paraboloïde parabolique, cône hyperbolique,...Dresser la liste de toutes les surfaces oubliées et constater qu'elles sont connues sous d'autres appellations. [004943]

---

95 Torseurs

Formulaire déf : $f(M) = f(O) + \vec{MO} \wedge \vec{S}$, $\vec{S}$ = somme, $f(O)$ = moment en O. ppté : $\Big(f(B) - f(A)\Big) \cdot \vec{AB} = 0$. (champ équiprojectif) invariant scalaire : $i = f(O) \cdot \vec{S}$. comoment de deux torseurs : $c = \frac{1}{2}\big(f(O) \cdot \vec{S}' + f'(O) \cdot \vec{S}\big)$. couple = torseur constant. glisseur = torseur s'annulant en un point avec $\vec{S} \neq \vec{0}$. CNS : $\vec{S} \neq \vec{0}$, $i = 0$. axe central : $D = \{M \text{ tq } f(M) \text{ est colinéaire à } \vec{S}\} = H + \mathbb{R}\vec{S}$ avec $\vec{HO} = \frac{f(O) \wedge \vec{S}}{\|\vec{S}\|^2}$. module : $\|f(M)\|^2 = \|f(H)\|^2 + \|\vec{MH} \wedge \vec{S}\|^2$. lignes de champ d'un torseur = hélices d'axe D. glisseur associé à A,B : $f(M) = \vec{MA} \wedge \vec{AB}$. couple = somme de deux glisseurs de vecteurs opposés.

Somme de glisseurs : concourants $\to$ 0 ou un glisseur, coplanaires $\to$ 0 ou un couple ou un glisseur, parallèles $\to$ idem.

Exercice 4944 Moment parallèle à un plan

Soient $\mathscr{T}$ un torseur et $\mathscr{P}$ un plan. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\mathscr{T}(M) \in \vec{\mathscr{P}}$.

Correction ▼ [004944]

Exercice 4945 Torseurs de sommes orthogonales

Soient $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ deux torseurs de sommes non nulles, orthogonales. Montrer que le comoment de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ est nul si et seulement si les axes centraux sont concourants. [004945]

Exercice 4946 Somme de glisseurs

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les glisseurs :

$\mathscr{G}_1$ d'axe $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j}$.

$\mathscr{G}_2$ d'axe $\begin{cases} y = -mx \\ z = -1 \end{cases}$ et de vecteur $\vec{v} = \vec{i} - m\vec{j}$.

Déterminer l'axe central de $\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2$. [004946]

Exercice 4947 Glisseurs associés à un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace. Pour $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ distincts, on note $\mathscr{G}_{XY}$ le glisseur d'axe la droite (XY) et de vecteur $\vec{XY}$.

Montrer que $(\mathscr{G}_{AB}, \mathscr{G}_{AC}, \mathscr{G}_{AD}, \mathscr{G}_{BC}, \mathscr{G}_{BD}, \mathscr{G}_{CD})$ est une base de l'espace des torseurs.

Correction ▼ [004947]

Exercice 4948 Produit vectoriel de torseurs

Soient $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ deux torseurs de sommes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$. On définit le champ $\mathscr{T}$ par :

$$\mathscr{T}(M) = \vec{R}_1 \wedge \mathscr{T}_2(M) + \mathscr{T}_1(M) \wedge \vec{R}_2.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est un torseur de somme $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2$ (produit vectoriel de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$).
2. Si $\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 \neq \vec{0}$, montrer que l'axe central de $\mathscr{T}$ est la perpendiculaire commune des axes centraux de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$.

[004948]

96 Géométrie euclidienne en dimension 2

Exercice 4949 Fonction numérique de Leibniz

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
Quels sont les points M du plan (ABC) tels que $MA^2 + a^2 = 2(MB^2 + MC^2)$?

Correction ▼ [004949]

Exercice 4950 Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x,y,z) dans le repère affine (ABC).
Montrer que : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0 \Leftrightarrow xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0$.

Correction ▼ [004950]

Exercice 4951 Cercle stable par une application affine

Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O. [004951]

Exercice 4952 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [004952]

Exercice 4953 Bissectrice de deux droites

Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.
On note $\mathscr{H} = \{M \text{ tq } d(M,D) = d(M,D')\}$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D,D'))
2. Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathscr{H}$
3. Soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathscr{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathscr{H}$.

[004953]

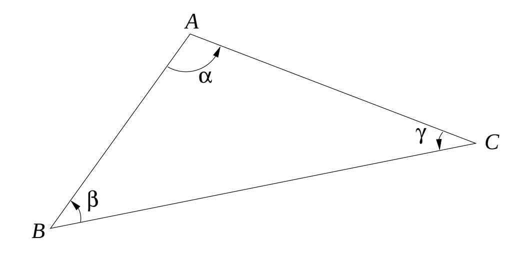
Exercice 4954 Trois figures isométriques

Trois figures F_1, F_2, F_3 se déduisent l'une de l'autre par rotations. Montrer qu'il existe une figure F dont F_1, F_2, F_3 se déduisent par symétries axiales.

Correction ▼ [004954]

Exercice 4955 Produit de 3 rotations

Soit ABC un triangle d'angles α, β, γ.
On note ρ, ρ', ρ'' les rotations autour de A, B, C d'angles α, β, γ, orientés suivant le dessin :



Qu'est-ce que $\rho \circ \rho' \circ \rho''$?

Correction ▼ [004955]

Exercice 4956 Sous-groupes finis de déplacements

1. Soit G un sous-groupe fini de déplacements du plan.
   (a) Montrer que G est constitué uniquement de rotations.
   (b) Soient $f, g \in G$. Montrer que f et g ont même centre (étudier $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$).
   (c) Prouver enfin que G est cyclique.
2. Soit G un sous groupe fini d'ordre p d'isométries du plan, non toutes positives.
   (a) Montrer que G contient autant d'isométries positives que négatives.
   (b) Montrer que G est un groupe diédral (groupe d'isotropie d'un polygone régulier).

[004956]

Exercice 4957 Centrale MP 2000

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O. Soit A le point de coordonnées $(a,0)$. Pour tout point M, on définit $M' = f(M)$ de la manière suivante : A, M, M' sont alignés et (MO) est orthogonale à $(M'O)$. Expliciter f en fonction des coordonnées (x,y) de M. Donner son domaine de définition. Montrer que f réalise une bijection entre le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$ et le quart de plan d'équations $x < 0, y > 0$.

Correction ▼ [004957]

---

97 Géométrie euclidienne en dimension 3

Exercice 4958 Équation au produit vectoriel

Soient A, B, C trois points distincts de l'espace.
Déterminer le lieu des points M tels que $\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} = 2\vec{MC} \wedge \vec{MA}$.

Correction ▼ [004958]

Exercice 4959 $||\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}|| = ||\vec{MD} + \vec{ME}||$

Soient A, B, C, D, E cinq points de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que $||\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}|| = ||\vec{MD} + \vec{ME}||$.

Correction ▼ [004959]

Exercice 4960 Ensi Chimie P 93

Trouver les coordonnées des projetés du point $C(3,4,-2)$ sur les droites définies par les équations :
$D_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+3}{-4}$.
$D_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Correction ▼ [004960]

Exercice 4961 Projections sur 4 plans

Dans un *rond* on donne les plans $\begin{cases} P & x+y=1 \\ Q & y+z=1 \\ R & x+z=1 \\ S & x+3y+z=0 \end{cases}$ et le point $A:(1,1,\lambda)$.

Donner une CNS sur λ pour que les projections de A sur les quatre plans soient coplanaires.

Correction ▼ [004961]

Exercice 4962 Calculs de points et plans

Dans un *rond* on donne les points $A:(1,2,3)$, $B:(2,3,1)$, $C:(3,1,2)$, $D:(1,0,-1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.
2. Chercher les équations cartésiennes des plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
3. Chercher le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

Correction ▼ [004962]

Exercice 4963 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D:\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ et $D':\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Chercher la perpendiculaire commune, Δ, à D et D' (On donnera les points $H\in D\cap\Delta$ et $K\in D'\cap\Delta$).

Correction ▼ [004963]

Exercice 4964 Perpendiculaire commune à deux droites

Dans un *rond* on donne les droites $D:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ et $D':\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

Calculer $d(D,D')$.

Correction ▼ [004964]

Exercice 4965 Tétraèdre dont les faces ont même aire

Soit $ABCD$ un tétraèdre dont les quatre faces ont même aire. Montrer que les côtés non coplanaires ont deux à deux mêmes longueurs.

Correction ▼ [004965]

Exercice 4966 Distance entre les côtés d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a. Chercher la distance entre deux côtés non coplanaires.

Correction ▼ [004966]

Exercice 4967 Distance d'un point à une droite

Dans un *rond* on donne la droite $D:\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ et $M(x,y,z)$. Calculer $d(M,D)$.

Correction ▼ [004967]

Exercice 4968 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne le plan $P: x+2y+3z=4$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.

Correction ▼ [004968]

Exercice 4969 Projection orthogonale

Dans un *rond* on donne les points $A:(1,0,-1)$, $B:(-1,1,1)$, $C:(2,-1,1)$, $D:(1,2,-2)$, $E:(-2,-2,0)$. Déterminer, par un point et un vecteur directeur, la projection de (DE) sur le plan (ABC).

Correction ▼ [004969]

Exercice 4970 Symétrique d'un plan

Dans un *rond* on donne les plans $P: x+y+z=1$ et $Q: 2x-y+z=1$. Chercher une équation cartésienne du plan Q' symétrique de Q par rapport à P.

Correction ▼ [004970]

Exercice 4971 Repères orthonormés

Soient $(O,\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})$ et $(O,\vec{OA'},\vec{OB'},\vec{OC'})$ deux repères orthonormés directs de l'espace.
Montrer que $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ sont coplanaires. [004971]

Exercice 4972 Angle d'un plan et d'une droite

Soient P un plan, D une droite tels que $\overline{(P,D)} \equiv \theta (\mathrm{mod}\, \pi)$.
Montrer que pour toute droite $\Delta \subset P$, on a $\cos(D,\Delta) \geqslant \cos\theta$. Quand y a-t-il égalité ? [004972]

Exercice 4973 Angle entre deux faces d'un dodécaèdre

Quel est l'angle entre deux faces d'un dodécaèdre régulier ? (on donne : $4\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$)

Correction ▼ [004973]

Exercice 4974 Ensi P 90

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2. \end{cases}$

Correction ▼ [004974]

Exercice 4975 Sphère définie par ses intersections

Soit S une partie de l'espace contenant au moins deux points et telle que pour tout plan P, $P\cap S$ est un cercle, un singleton ou vide. Montrer que S est une sphère.

Correction ▼ [004975]

Exercice 4976 CNS pour que deux vissages commutent

Soient f,g deux vissages d'angles $\neq \pi$. Trouver une CNS pour que $f\circ g = g\circ f$. (On étudiera $f\circ g\circ f^{-1}$)

Correction ▼ [004976]

Exercice 4977 Composée de 3 demi-tours

Soient D_1,D_2,D_3, trois droites, et $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ les $\frac{1}{2}$-tours correspondants.
Démontrer que $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour si et seulement si D_1,D_2,D_3 ont une perpendiculaire commune ou sont parallèles.

Correction ▼ [004977]

Exercice 4978 Composée de demi-tours par rapport aux arêtes d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et d_{AB},d_{AC},d_{AD} les $\frac{1}{2}$-tours autour des droites $(AB),(AC),(AD)$. Simplifier $f=d_{AB}\circ d_{AC}\circ d_{AD}$.

Correction ▼ [004978]

Exercice 4979 Isométries transformant un triangle en un triangle donné

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?
Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Correction ▼ [004979]

Exercice 4980 Groupes d'isotropie

Déterminer *toutes* les isométries

1. d'un tétraèdre régulier.
2. d'un cube.
3. de deux droites non coplanaires.

Correction ▼ [004980]

Exercice 4981 Composée de projections

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de l'espace non toutes parallèles. Pour $M_1 \in D_1$ on construit : M_2, projeté de M_1 sur D_2, M_3, projeté de M_2 sur D_3, M_4, projeté de M_3 sur D_1.
Montrer qu'il existe un unique point $M_1 \in D_1$ tel que $M_4 = M_1$.

Correction ▼ [004981]

98 Courbes paramétrées

Exercice 4982 Rebroussements

Étudier les points stationnaires des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = \sin t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x = (1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t$.
3. $x = (1+\cos t)\sin 2t, \quad y = \cos 2t$.
4. $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$.
5. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - t^2 - t + 1$.

[004982]

Exercice 4983 Branches infinies

Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = t^5 - t^3 + \frac{t}{4}, \quad y = \frac{3t}{3t^2+1}$.
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\sin t|, \quad y = \sin 2t$.
3. $x = \sqrt{\frac{t^2-2}{t^4-1}}, \quad y = tx$. L'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est-elle finie ?
4. $x = \frac{t^3-t}{2t-1}, \quad y = tx$.
5. $x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \quad y = \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2}$.
6. $x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \quad y = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
7. $x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = tx$.
8. $x = \frac{te^t}{t+1}, \quad y = \frac{e^t}{t+1}$.

9. $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$.
10. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - t^2 - t + 1$.
11. $x = \frac{t}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2}{t-1}$.

[004983]

Exercice 4984 Inflexions

Déterminer les points d'inflexion des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = \sin t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicorne)
2. $x = \sin \frac{t}{2}, \quad y = \tan t$.
3. $x = \frac{e^t}{t}, \quad y = te^t$.
4. $x = \sin t \cos 2t, \quad y = \cos t \sin 2t$.

Correction ▼ [004984]

Exercice 4985 Matexo

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques : $x(t) = \frac{t^2+1}{t^3-1}, y(t) = \frac{2t}{t^3-1}$.

1. Montrer que les points de paramètres t, u, v (distincts) sont alignés si et seulement si $tuv = t + u + v + 1$.
2. Prouver que $\mathscr{C}$ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Correction ▼ [004985]

Exercice 4986 Construction

Construire la courbe d'équations paramétriques : $x = \frac{t}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$.
Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce [004986]

Exercice 4987 Construction

Dessiner la courbe d'équation cartésienne : $x^3 + y^3 = 3xy$ (folium de Descartes) On prendra $t = \frac{y}{x}$ comme paramètre. [004987]

Exercice 4988 Construction

Construire les courbes d'équation polaire :

1. $\rho = \frac{\cos(\theta/2)}{1+\sin\theta}$.
2. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. (Strophoïde, calculer l'aire limitée par la boucle)
3. $\rho = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$. Vérifier que la courbe traverse ses asymptotes au point double.
4. $\rho = \frac{1}{\cos\theta + \sin 2\theta}$.
5. $\rho = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$.
6. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$.
7. $\rho = \cos\frac{\theta}{3}$.
8. $\rho = 1 + \sin 3\theta$.
9. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.
10. $\rho = \ln\theta$.

[004988]

Exercice 4989 Strophoïde

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon 1, $A \in \Gamma$, et D le diamètre de Γ perpendiculaire à (OA).

Pour $M \in \Gamma \setminus \{A\}$, on construit le point N intersection de D et (AM), puis le point P tel que $\vec{AP} = \vec{MN}$.

[004989]

Exercice 4990 Cochléoïde

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$ (cochléoïde)
2. Une droite passant par O coupe $\mathscr{C}$ en un certain nombre de points. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points sont concourantes.

Correction ▼ [004990]

Exercice 4991 Chimie P 91

Soient O et A deux points distincts dans un plan $\mathscr{P}$. Déterminer le lieu des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{AM})} \equiv 3\overline{(\vec{OA}, \vec{OM})} (\operatorname{mod} \pi)$.

Correction ▼ [004991]

Exercice 4992 Ensi Chimie P' 93

Déterminer les points doubles de la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{\theta}{\theta^2-1}$.

Correction ▼ [004992]

99 Courbes en polaires

Exercice 4993 Courbes en polaires

Construire les courbes en polaires suivantes :

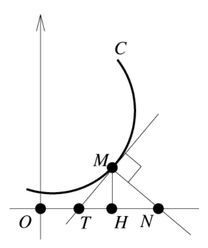
1. $\rho = \dfrac{\cos\theta/2}{1+\sin\theta}$
2. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos}\theta$
3. $\rho = \dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$
4. $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin 2\theta}$
5. $\rho = \cos\theta + \dfrac{1}{\cos}\theta$
6. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$
7. $\rho = \cos\dfrac{\theta}{3}$
8. $\rho = 1 + \sin 3\theta$
9. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$
10. $\rho = \ln\theta$
11. $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$

Correction ▼ [004993]

100 Courbes définies par une condition

Exercice 4994 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points H, T et N selon le dessin :



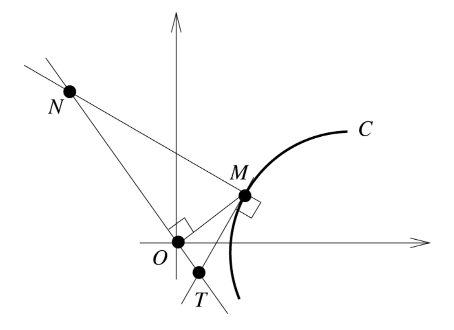
Déterminer les courbes d'équation $y = f(x)$ vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{HT} =$ cste.
2. $\overline{HN} =$ cste.
3. $MN =$ cste.
4. $MT =$ cste.
5. $AN = MN$ où A est le point de coordonnées $(0, a)$.

Correction ▼ [004994]

Exercice 4995 Sous-tangente, sous-normale

Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. A un point M un point de $\mathscr{C}$, on associe les points T et N selon le dessin :



Déterminer les courbes vérifiant la condition suivante :

1. $\overline{OT} =$ cste.
2. $\overline{ON} =$ cste.

Correction ▼ [004995]

Exercice 4996 Milieu fixe

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que le milieu de $[T, N]$ reste fixe.
$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

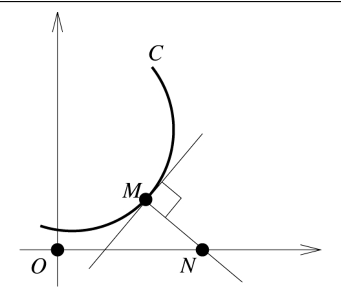
Correction ▼ [004996]

Exercice 4997 Distance TN constante

Soit D une droite du plan et $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. Pour $M \in \mathscr{C}$ on note T et N les points d'intersection de D avec la tangente et la normale à $\mathscr{C}$ en M. Déterminer $\mathscr{C}$ telle que la distance TN reste constante.
$\left(\text{On paramètrera } \mathscr{C} \text{ par } t = \frac{y'}{x'}\right)$

Correction ▼ [004997]

Exercice 4998 Ensi Chimie P' 93



Trouver les courbes $\mathscr{C}$ telles que $MN = ON$.

Correction ▼ [004998]

Exercice 4999 Ensi Physique P 94

Trouver les arcs biréguliers du plan dont le cercle osculateur est en tout point tangent à une droite fixe.

Correction ▼ [004999]

Exercice 5000 L'homothétique du cercle osculateur reste tangent à Ox

Déterminer les courbes planes telles que l'image du cercle osculateur en un point M par l'homothétie de centre M et de rapport 2 reste tangente à Ox.
On prendra φ comme paramètre et on cherchera une équation différentielle sur le rayon de courbure R.

Correction ▼ [005000]

Exercice 5001 Ensi P 91

On se place dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Donner l'ensemble des trajectoires orthogonales de la famille des cercles de rayon constant a $(a > 0)$ centrés sur Ox.

Correction ▼ [005001]

Exercice 5002 Équations intrinsèques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On étudie les courbes planes paramétrées par une abscisse curviligne, s, telles que la courbure au point M_s soit $c = f(s)$.

1. Montrer que si l'on impose la position de M_0 et la tangente en ce point, le problème admet une solution unique.
2. Dans le cas général, démontrer que les courbes solutions se déduisent d'une courbe particulière en appliquant un déplacement du plan arbitraire.
3. Étudier les équations : $c = \text{cste}$, $c = \frac{1}{s}$ (spirale logarithmique).

[005002]

Exercice 5003 Équations intrinsèques

Chercher les courbes planes vérifiant l'équation intrinsèque :

1. $R = s$.
2. $Rs = 1$.
3. $R^2 = 2as$, $a > 0$ donné.
4. $R = 1 + s^2$.
5. $R^2 + s^2 = a^2$.

Correction ▼ [005003]

Exercice 5004 *I reste sur un cercle*

Trouver les courbes planes $\mathscr{C}$ telles que le centre de courbure reste sur un cercle $\mathscr{C}(O,r)$ fixe. (On prendra φ comme paramètre)

Correction ▼ [005004]

Exercice 5005 *$M - s/2M'$ reste sur Ox*

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane et s une abscisse curviligne sur $\mathscr{C}$. A chaque point $M \in \mathscr{C}$ d'abscisse curviligne s, on associe le point $N = M - \frac{s}{2}\vec{T}$. Trouver $\mathscr{C}$ telle que N reste sur Ox.

Correction ▼ [005005]

Exercice 5006 *$MC = kMN$*

Trouver les courbes Γ du plan ayant la propriété suivante : Soit $M \in \Gamma$, C le centre de courbure de Γ en M et N le projeté de O sur la normale à Γ en M. Alors $\vec{MC} = k\vec{MN}$ où k est un réel fixé.
Étudier les cas particuliers : $k = 1$, $k = \frac{2}{3}$, $k = 2$, $k = \frac{1}{3}$ et $k = -1$.

Correction ▼ [005006]

101 Branches infinies

Exercice 5007 Branches infinies

Déterminer les branches infinies pour les courbes paramétrées suivantes :

1. $x = 4t^5 - 4t^3 + t,\ y = \dfrac{t}{3t^4+1}$
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\sin t|,\ y = \sin 2t$
3. $x = \sqrt{\dfrac{t^2-2}{t^4-1}},\ y = tx$
4. $x = \dfrac{t^3-t}{2t-1},\ y = tx$
5. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1},\ y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2}$
6. $x = \sin\dfrac{t}{2},\ y = \tan t$
7. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1},\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$
8. $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = tx$
9. $x = \dfrac{te^t}{t+1},\ y = \dfrac{e^t}{t+1}$
10. $x = 2t^3 + 3t^2,\ y = 3t^2 + 6t$
11. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 - t^2 - t + 1$
12. $x = \dfrac{t}{t^2-1},\ y = \dfrac{t^2}{t-1}$

Correction ▼ [005007]

102 Points de rebroussement

Exercice 5008 Rebroussements

1. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
2. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
3. $x = \sin t$, $y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}$
4. $x = (1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = \sin^2 t \cos t$
5. $x = (1 + \cos t)\sin 2t$, $y = \cos 2t$

Correction ▼ [005008]

103 Enveloppes

Exercice 5009 Esem 91

Soit $\mathscr{C}$ le cercle : $x^2 + y^2 = 1$. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'angle polaire θ et D_θ la droite passant par M d'angle polaire 2θ. Trouver l'enveloppe des droites D_θ.

Correction ▼ [005009]

Exercice 5010 Ensi Physique 93

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et S un point du plan différent de O. Donner l'enveloppe des normales en M à (SM) lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005010]

Exercice 5011 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Chercher l'enveloppe des cordes $[A,B]$ de $\mathscr{P}$ de hauteur $h > 0$ donnée.

Correction ▼ [005011]

Exercice 5012 Cordes sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Pour $A, B \in \mathscr{P}$ distincts, on note C le point d'intersection des tangentes en A et B. Trouver l'enveloppe des droites (AB) lorsque l'aire du triangle ABC reste constante.

Correction ▼ [005012]

Exercice 5013 Cordes sur une parabole

Soient M, M' deux points d'une parabole $\mathscr{P}$ tels que (MM') passe par le foyer F. Quels sont :

1. L'enveloppe des droites (MM') ?
2. Le lieu des milieux des segments $[M,M']$?
3. L'enveloppe des médiatrices de $[M,M']$?

Correction ▼ [005013]

Exercice 5014 Rayons réfléchis sur une parabole

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

1. Un rayon incident arrive suivant une parallèle à Ox et se réfléchit à “l'intérieur” de $\mathscr{P}$ avec le même angle. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.
2. Même question, mais le rayon incident est parallèle à Oy.

Correction ▼ [005014]

Exercice 5015 Cercle osculateur à une parabole

Soit $\mathscr{P}$ une parabole, $M \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ le cercle osculateur à $\mathscr{P}$ en M. Montrer que, sauf cas particulier, $\mathscr{C}$ recoupe $\mathscr{P}$ en un deuxième point P. Déterminer l'enveloppe des droites (MP).

Correction ▼ [005015]

Exercice 5016 Cordes d'une hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyer F. Trouver l'enveloppe des cordes $[P,Q]$ de $\mathscr{H}$ vues depuis F sous un angle droit.

Correction ▼ [005016]

Exercice 5017 Cardioïde

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chercher l'enveloppe des droites $D_\theta = (A_\theta\, A_{2\theta})$.

Correction ▼ [005017]

Exercice 5018 Cycloïde

Chercher l'enveloppe d'un diamètre Δ d'un cercle $\mathscr{C}$ roulant sans glisser sur une droite D. Comparer le point caractéristique à la projection orthogonale du point de contact I sur Δ.

Correction ▼ [005018]

Exercice 5019 Hypocycloïde

Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par O centré sur Ox. Pour $M \in \mathscr{C}$, on note D_M la droite symétrique de (OM) par rapport à l'horizontale passant par M. Déterminer l'enveloppe des droites D_M et la construire.

Correction ▼ [005019]

Exercice 5020 Cordes de $\rho = a/\cos(3\theta)$

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{a}{\cos 3\theta}$, $a > 0$. Chercher l'enveloppe des cordes vues de O sous un angle droit.

Correction ▼ [005020]

Exercice 5021 Perpendiculaire à OM sur une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O, de paramètres a et b. Pour $M \in \mathscr{E}$, soit D la perpendiculaire en M à (OM).

1. Donner les équations paramétriques de l'enveloppe des droites D.
2. Tracer les enveloppes sur ordinateur pour différentes valeurs de a/b.
3. Étudier les points stationnaires de l'enveloppe quand il y en a.

Correction ▼ [005021]

Exercice 5022 $AM \perp D$

Soit D une droite du plan et A un point non élément de D. Soit M un point variable sur D. Trouver l'enveloppe de la normale en M à (AM).

Correction ▼ [005022]

Exercice 5023 Concavité

Soient u, v, w de classe $\mathscr{C}^2$, D_t la droite d'équation : $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$, et Γ l'enveloppe des droites D_t.

On note : $\delta = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$, et on suppose pour tout t : $\delta\Delta w(t) \neq 0$.

Montrer que Γ tourne sa concavité vers O si et seulement si pour tout t : $\delta \Delta w(t) > 0$. [005023]

104 Rectification, courbure

Exercice 5024 Calcul de longueur

Déterminer la longueur d'un arc $\widehat{M_0 M_t}$ ou $\widehat{M_0 M_\theta}$ pour les courbes :

1. $x = t - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t$
2. $\rho = \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005024]

Exercice 5025 Calcul de longueur

Soit la courbe paramétrée par : $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AO}$ où A est le point de rebroussement.

Correction ▼ [005025]

Exercice 5026 Calcul de longueur

Calculer la longueur totale des courbes suivantes :

1. $x = (1 + \cos^2 t) \sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t$.
2. $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Correction ▼ [005026]

Exercice 5027 TPE MP 2003

Nature, construction et longueur de la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Correction ▼ [005027]

Exercice 5028 Comparaison de longueurs (ENS MP 2002)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue concave, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, L_1 la courbe paramétrée $x \mapsto (x, f(x))$ et L_2 un chemin continu $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant les extrémités de L_1 et situé au-dessus de L_1. Montrer que la longueur de L_2 est supérieure ou égale à celle de L_1.

Correction ▼ [005028]

Exercice 5029 Centre de courbure

Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

1. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$.
3. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$. (Cycloïde, indiquer une relation géométrique simple entre la courbe décrite par M et celle décrite par I)
4. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. (Astroïde) Construire le courbe $\mathscr{C}$ et sa développée, puis prouver par le calcul qu'elles sont semblables.
5. Hyperbole d'équation $xy = 1$.
6. Ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. $\rho = e^\theta$. (Spirale logarithmique)
8. $\rho = 1 + \cos\theta$. (Cardioïde)

Correction ▼ [005029]

Exercice 5030 Points sur une hyperbole (Ensi P 91)

Soit la courbe Γ définie par : $xy = a^2$, $(a > 0)$. Pour chaque point M on définit le point Ω par : $2\vec{\Omega M} = \vec{MN}$, où N est le point où Γ recoupe sa normale en M. Montrer que Ω est le centre de courbure de Γ en M.

Correction ▼ [005030]

Exercice 5031 Cercle circonscrit à trois points

Soit $\mathscr{C}$ une courbe plane paramétrée par une abscisse curviligne s. Soit s_0 fixé.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de M_s pour $s \to s_0$ dans le repère de Frenet en M_{s_0}.
2. On suppose $c(s_0) \neq 0$. Montrer que pour h assez petit, les points M_{s_0-h}, M_{s_0}, M_{s_0+h} ne sont pas alignés.
3. Soit Γ_h le cercle circonscrit à ces trois points, et R_h son rayon. Chercher $\lim_{h\to 0} R_h$.

[005031]

Exercice 5032 Propriétés de la cycloïde

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ pour $t \in]0, 2\pi[$ (arche de cycloïde). On note S le point de paramètre π, et D la tangente à $\mathscr{C}$ en S.

Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{S\}$, I le point d'intersection de la normale à $\mathscr{C}$ en M et de Ox, et J le point d'intersection de la tangente en M avec D.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que I et J ont même abscisse.
3. On prend S comme origine des abscisses curvilignes. Trouver une relation entre s et $\vec{MJ}$.

[005032]

Exercice 5033 Normales à une cardioïde

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ (cardioïde).

1. Dessiner $\mathscr{C}$.
2. Une droite D passant par O coupe $\mathscr{C}$ en deux points M_1 et M_2. Soient Δ_1, Δ_2 les normales à $\mathscr{C}$ en ces points et P le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2. Quelle est la courbe décrite par P lorsque D tourne autour de O ?

Correction ▼ [005033]

Exercice 5034 Calcul de courbure par TFI

Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation : $2x^2 + y^2 = 1$ aux points intersection de $\mathscr{C}$ et des axes Ox et Oy.

Correction ▼ [005034]

Exercice 5035 Calcul de courbure par TFI

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^4 + y^4 + x^3 + y^3 = 2$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, calculer la courbure de $\mathscr{C}$ en $A = (-1, 1)$.

Correction ▼ [005035]

Exercice 5036 Calcul de courbure (Chimie P' 90)

Déterminer l'ensemble des centres de courbure en O aux courbes intégrales de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - 2y = 1$ telles que $y(0) = 0$.

Correction ▼ [005036]

Exercice 5037 Courbe parallèle à une parabole

Soit $\mathscr{C} : t \mapsto M_t$ une courbe plane paramétrée sans point stationnaire. Les courbes parallèles à $\mathscr{C}$ sont les courbes de la forme : $t \mapsto M_t + \lambda\vec{N}$, ou $\vec{N}$ est le vecteur normal en M_t et λ est constant.

1. Montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence entre arcs sans points stationnaires.
2. Construire les parallèles à la parabole d'équation $y = x^2$ pour $\lambda = \pm 2$.

[005037]

Exercice 5038 Points équidistants sur la tangente

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée, $(M,\vec{t},\vec{n})$ le repère de Frenet en un point M de $\mathscr{C}$. Soit $a > 0$ fixé et $P_1 = M + a\vec{t}$, $P_2 = M - a\vec{t}$. On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes décrites par P_1 et P_2 quand M décrit $\mathscr{C}$ et c_1, c_2 les courbures correspondantes. Soit C le centre de courbure à $\mathscr{C}$ en M.
Montrer que $c_1 + c_2 = \frac{2}{CP_1}$ et que les trois normales sont concourantes.

Correction ▼ [005038]

Exercice 5039 Paraboles de cercle osculateur donné

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ et Δ une droite variable passant par O.

1. Chercher l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ d'axe parallèle à Δ, passant par O, dont $\mathscr{C}$ est le cercle osculateur en O.
2. Quelle est l'enveloppe des paraboles précédentes ?

Correction ▼ [005039]

Exercice 5040 Développante

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques : $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. Chercher les équations paramétriques des développantes de $\mathscr{C}$.
3. Tracer la développante qui rencontre $\mathscr{C}$ à l'origine.

Correction ▼ [005040]

Exercice 5041 Développante

Déterminer la développante de la chainette $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ qui rencontre $\mathscr{C}$ pour $x = 0$. (Tractrice) Dessiner les deux courbes.

Correction ▼ [005041]

105 Courbes dans l'espace

Exercice 5042 Ensi P 90

On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par : $x(t) = \frac{t^4}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$, $z(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.
A quelle condition M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points de $\mathscr{C}$ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 sont-ils coplanaires ?

Correction ▼ [005042]

Exercice 5043 Courbure de M cste $\Rightarrow$ courbure de I cste

Soit $\mathscr{C}$ une courbe de l'espace, et Γ la courbe décrite par le centre de courbure, I, en un point M de $\mathscr{C}$. On suppose que la courbure de $\mathscr{C}$ est constante et sa torsion non nulle.

1. Montrer que la courbure de Γ est aussi constante.

2. Chercher la torsion de Γ en I en fonction de la courbure et la torsion de $\mathscr{C}$ en M.

Correction ▼ [005043]

Exercice 5044 Éléments de courbure de T

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne, et P le point tel que $\vec{OP} = \frac{d\vec{M}}{ds}$. Chercher les éléments de courbure de la trajectoire de P.

Correction ▼ [005044]

Exercice 5045 Enveloppe de normales

Soit $s \mapsto M_s$ une courbe de l'espace de classe $\mathscr{C}^3$ paramétrée par une abscisse curviligne. Pour tout s on choisit une normale à la courbe en M_s : Δ_s. A quelle condition les droites Δ_s admettent-elles une enveloppe ?

Correction ▼ [005045]

Exercice 5046 Équations intrinsèques en dimension 3

Trouver les courbes de l'espace vérifiant les équations intrinsèques : $c = \tau = \frac{1}{s\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005046]

106 Surfaces paramétrées

Exercice 5047 Chimie P 91

Équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oz où Γ est la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = a\cos^3 u \\ y = a\sin^3 u \\ z = a\cos 2u. \end{cases}$ $\quad (a > 0)$

Correction ▼ [005047]

Exercice 5048 Ensi Physique 93

Soit la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = 0 \\ x + z & = 1. \end{cases}$$

Déterminer la surface engendrée par la rotation de (Γ) autour de Oz.

Correction ▼ [005048]

Exercice 5049 Le plan tangent coupe Oz en un point fixe

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = f(\rho,\theta) \end{cases}$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Donner l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point $M(\rho,\theta)$.
2. Déterminer f de sorte que, le long d'une ligne $\theta =$ cste, le plan tangent coupe Oz en un point fixe.
3. Exemple : $f(\rho,\theta) = \theta$. Dessiner la surface $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005049]

Exercice 5050 Pseudo-sphère

Dessiner la surface $\mathscr{S}$ d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = a\cos u/\operatorname{ch} v \\ y = a\sin u/\operatorname{ch} v \\ z = a(v - \operatorname{th} v) \end{cases}$ où a est un réel strictement positif (pseudo-sphère).

Correction ▼ [005050]

Exercice 5051 Les normales coupent $Oz \Leftrightarrow$ révolution

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $z = f(x,y)$. Montrer que $\mathscr{S}$ est de révolution si et seulement si en tout point M, la normale à $\mathscr{S}$ en M est parallèle ou sécante à Oz.

Correction ▼ [005051]

Exercice 5052

Que dire d'une surface $\mathscr{S}$ telle que toutes les normales sont concourantes ? (cf ex.5051) [005052]

Exercice 5053 Contour apparent

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Reconnaître $\mathscr{S}$.
2. Soit D la droite d'équations : $2x + y = 0$, $z = 0$. Déterminer les points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M est parallèle à D. (Contour apparent de $\mathscr{S}$ dans la direction de D)

Correction ▼ [005053]

Exercice 5054 Cylindre circonscrit

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = u/(u^2+v^2) \\ y = v/(u^2+v^2) \\ z = 1/(u^2+v^2). \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathscr{S}$ où le plan tangent est parallèle à la droite D d'équations : $x = y = z$.
3. Déterminer l'équation cartésienne du cylindre de génératrices parallèles à D s'appuyant sur $\mathscr{C}$. (Cylindre circonscrit à $\mathscr{S}$)

Correction ▼ [005054]

Exercice 5055 Équation de cône

Soit $\mathscr{C}$ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan d'équation $x + y = 1$, et $S = (1,1,1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône de sommet S s'appuyant sur $\mathscr{C}$.

Correction ▼ [005055]

Exercice 5056 Cône = cylindre ?

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne : $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} = \frac{1}{(x-z)^2}$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est à la fois un cylindre et un cône.
2. Comment est-ce possible ?

[005056]

Exercice 5057 Position d'une surface de révolution par rapport au plan tangent

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation cartésienne $z = f(\rho)$ où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que la position de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent est donnée par le signe de $f'(\rho)f''(\rho)$. Interpréter géométriquement ce fait. [005057]

Exercice 5058 Intersection de deux cylindres

Soient $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2+y^2+xy = 1$ et $y^2+z^2+yz = 1$, et $\mathscr{C} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$.

1. Donner en tout point de $\mathscr{C}$ le vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
3. Quelle est la projection de $\mathscr{C}$ sur Oxz ?

Correction ▼ [005058]

Exercice 5059 Conoïde

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A = (a,0,0)$ et de rayon r $(0 < r < a)$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à Oz. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

Correction ▼ [005059]

Exercice 5060 Surface cerclée

Soit $A = (0,1,0)$ et $\mathscr{S}$ la surface constituée des cercles verticaux de diamètre $[A,B]$ où B est un point variable sur Ox. Chercher une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Correction ▼ [005060]

Exercice 5061 Chimie P' 91

On considère la droite Δ d'équations : $x = a$, $z = 0$. P est un point décrivant Δ et $\mathscr{C}_P$ le cercle tangent à Oz en O et passant par P. Faire un schéma et paramétrer la surface engendrée par les cercles $\mathscr{C}_P$ quand P décrit Δ.

Correction ▼ [005061]

Exercice 5062 Ensi Chimie P' 93

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ y(t) = a\sin(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ z(t) = a\,\mathrm{th}(mt). \end{cases}$

1. Montrer que (Γ) est tracée sur une surface (Σ) simple. Montrer que (Σ) est de révolution autour de Oz et donner son équation.
2. Montrer que (Γ) coupe les méridiennes de (Σ) suivant un angle constant (loxodromie).
3. Réciproquement, déterminer toutes les loxodromies de (Σ).
4. Dessiner la projection de (Γ) sur xOy.

Correction ▼ [005062]

Indication pour l'exercice 2918 ▲

Si $\{x_1,\dots,x_p\}$ est une telle partie avec $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, considérer l'ensemble $\{x_1-1,\dots,x_p-p\}$.

Indication pour l'exercice 2985 ▲

Utiliser la formule de Bézout.

Indication pour l'exercice 2988 ▲

Montrer que l'ensemble des x tq $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.

Indication pour l'exercice 3151 ▲

1.
2. $\dot{6}^2 = -\dot{1}$.

Indication pour l'exercice 3253 ▲

Si $X^p - a = PQ$ avec $P,Q \in K[X]$ unitaires non constants, factoriser P dans (x^2+1) et considérer $P(0)$.

Indication pour l'exercice 3380 ▲

M antisymétrique signifie ${}^tM = -M$.

1. Si Y est un vecteur alors ${}^tYY = \|Y\|^2$ est un réel positif ou nul.
2. $I-M$ et $(I+M)^{-1}$ commutent.

Indication pour l'exercice 3424 ▲

Écrire les polynômes sous la forme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calculer $\int_2^4 P(x)\,dx$ d'une part et $\alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4)$ d'autre part. L'identification conduit à un système linéaire à quatre équations, d'inconnues α,β,γ.

Indication pour l'exercice 4045 ▲

Identifier les dl de $\cos x$ et $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en $x=0$.

Indication pour l'exercice 4708 ▲

1.
2. $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Indication pour l'exercice 4811 ▲

Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1-X^n}$.

Indication pour l'exercice 4852 ▲

Considérer les disques fermés associée à un recouvrement « circulaire » du plan et mettre en évidence une suite de disques emboités dont les rayons tendent vers zéro.

Indication pour l'exercice 4952 ▲

La distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c=0$ est donnée par la formule $d(M_0, D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Correction de l'exercice 2900 ▲

$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 2901 ▲

1.
2. 0 si $p<n$, $(-1)^n$ si $p=n$.
3.

Correction de l'exercice 2902 ▲

$(-1)^p C_{n-1}^p$.

Correction de l'exercice 2903 ▲

$n2^{n-1}$, $n4^{n-1}$, $3n4^{n-1}$.

Correction de l'exercice 2904 ▲

$\frac{n(n^2-1)}{6}$, $\frac{n(n^2-1)(3n^2-12)}{360}$.

Correction de l'exercice 2905 ▲

1. $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.
2.
3.

Correction de l'exercice 2907 ▲

$p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 2912 ▲

1. $(6!)^2$
2. $4!\times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6\times 12^6$, $4^4\times 12^8$, $2^2\times 4^2\times 6^4\times 12^4$.

Correction de l'exercice 2913 ▲

1. $(2n)!$.
2. $2(n!)^2$.
3. $2^{n+1}\times n!$.
4. $4\times n!$.

Correction de l'exercice 2914 ▲

1. n^{n^2}.
2. $n^{n(n+1)/2}$.
3. $n\times n^{(n-1)^2}$.

4. $n \times n^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 2915 ▲

1.
2.
3. (a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^p$.
   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!}$.

Correction de l'exercice 2916 ▲

1.
2. Récurrence. Égalité pour $n \leqslant 2$ ou les A_i 3 à 3 disjoints.

Correction de l'exercice 2917 ▲

3^n.

Correction de l'exercice 2918 ▲

1. Comme $\{x_1 - 1, \dots, x_p - p\}$ est une partie quelconque de $\{0, \dots, n-p\}$, on a $N = C_{n-p+1}^p$.
2. (a)
   (b) 32951280099.

Correction de l'exercice 2919 ▲

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k R_k$ avec $R_0 = 1$.
2. 1,1,2,5,15,52,203.

Correction de l'exercice 2923 ▲

1. 1,2,5.
2. $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.

Correction de l'exercice 2924 ▲

1. $|u+v| + |u-v| \geqslant 2|u|$ et $|u+v| + |u-v| \geqslant 2|v|$. Il y a égalité ssi $u = \pm v$.
2. $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| + |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|$,
   $|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \leqslant |z_1 - z_2 + z_3 - z_4| + |z_1 - z_2 - z_3 + z_4| \leqslant |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3|$.

Correction de l'exercice 2925 ▲

1.
2. si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
   si $|a| = |b|$: une droite ou $\varnothing$.

Correction de l'exercice 2926 ▲

1.

2. $\mathbb{U}\setminus\{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Correction de l'exercice 2927 ▲

$\overline{u}=-u$.

Correction de l'exercice 2929 ▲

Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ carré.

Correction de l'exercice 2930 ▲

1. $z\in\mathbb{R}$ ou $z\in-\frac{1}{2}+i\mathbb{R}$.
2. $z\in-1+i\mathbb{R}$ ou $z\in i\mathbb{R}$ ou $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
3. $z\in i\mathbb{R}$ ou $|z-i|=\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2931 ▲

$(0,a,a+b,a+b+c=1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\Rightarrow\{a,b,c\}=\{1,i,-i\}$.

Correction de l'exercice 2933 ▲

$z=x+iy\Rightarrow$ cercles $(\pm i,\sqrt{2})$ (laborieux).

Correction de l'exercice 2934 ▲

$z'=\frac{(b-a)\bar{z}+a\bar{b}-\bar{a}b}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Correction de l'exercice 2935 ▲

$d=$ orthocentre de abc.

Correction de l'exercice 2937 ▲

$\omega=\frac{a(c\bar{c}-b\bar{b})+b(a\bar{a}-c\bar{c})+c(b\bar{b}-a\bar{a})}{a(\bar{c}-\bar{b})+b(\bar{a}-\bar{c})+c(\bar{b}-\bar{a})}$.

Correction de l'exercice 2938 ▲

1. $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ tq $u=\alpha v$.
   $x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{|v|^2}\Leftrightarrow u=\frac{1}{\bar{v}}$.
2.
3. Il manque seulement les deux pôles.

Correction de l'exercice 2939 ▲

1. $z=-i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$.
2. $6\mid n\Rightarrow z=j$ ou j^2. Sinon, pas de solution.
3. $z=\exp\frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k=0,1,3,4$.
4. $z=-1$ ou $z=\exp\frac{2ik\pi}{n}$, $1\leqslant k<n$.
5. $x=\tan\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)$.
6.

7. $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 2940 ▲

1. Développer. $S = 2n$.
2. $\frac{1-(1+\omega)^n}{1-\omega-\omega^2} = \frac{1+(2\cos(\pi/n))^n}{1-\omega-\omega^2}$.

Correction de l'exercice 2941 ▲

1. $\sum = n$ si $p \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$, 0 sinon.
2. $a_k = \sum_{x \in \mathbb{U}_n} \frac{P(x)}{nx^k}$

Correction de l'exercice 2942 ▲

n impair $\Rightarrow |Z|^2 = n$,
n pair $\Rightarrow |Z|^2 = n(1 + (-1)^{n/2})$.

Correction de l'exercice 2943 ▲

1. $u + v = -1$, $u^2 = u + 2v = -2 - u$.
2. $\Sigma = \mathrm{Im}(u) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Correction de l'exercice 2944 ▲

$x = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Correction de l'exercice 2945 ▲

Cercle circonscrit $\Rightarrow$ ssi $|z| = 1$.

Correction de l'exercice 2946 ▲

$z_1 = -z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -z_4 = 1 - i$.

Correction de l'exercice 2947 ▲

$z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.

Correction de l'exercice 2948 ▲

$m = 2i$.

Correction de l'exercice 2949 ▲

1.
2. $\alpha = 0$ ou $\beta = t\alpha^2$, $t \geqslant \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 2950 ▲

1.
2. Élever au carré : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m-\mu|^2 + |m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2} + 2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Correction de l'exercice 2951 ▲

1. $\frac{2^n+2\cos(n\pi/3)}{3}$.
2. $2^n\cos(n\pi/3)$.
3. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\cos\frac{n\theta}{2}$.
4. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\sin\frac{(n+2)\theta}{2}$.
5. $\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2952 ▲

1. $\frac{n\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{n\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ si $\theta\not\equiv 0(\operatorname{mod}2\pi)$.
2. $\frac{3\sin(n\theta/2)\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{4\sin(\theta/2)}-\frac{\sin(3n\theta/2)\sin\left(3(n+1)\theta/2\right)}{4\sin(3\theta/2)}$.

Correction de l'exercice 2953 ▲

$x\equiv -y\equiv \pm\frac{2\pi}{3}(\operatorname{mod}2\pi)$.

Correction de l'exercice 2954 ▲

1. $=3/2$.
2. $32\cos^6(\theta)=\cos6\theta+6\cos4\theta+15\cos2\theta+10\Rightarrow\Sigma=\frac{15}{8}$.
3. $\Sigma_p=\frac{pC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$.

Correction de l'exercice 2955 ▲

$x\equiv 0(\operatorname{mod}\frac{\pi}{n})$, $x\not\equiv\frac{\pi}{2}(\operatorname{mod}\pi)$.

Correction de l'exercice 2956 ▲

$\frac{1}{2}\left((x+e^{i\alpha})^n+(x+e^{-i\alpha})^n\right)=0\Leftrightarrow x=\operatorname{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\sin\alpha-\cos\alpha$.

Correction de l'exercice 2957 ▲

$S=\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}+\cdots+\frac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}$.

$\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}}+\frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}}=\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}$.

$\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}+\frac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}}=\frac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}}\ \ldots$

$\Rightarrow S=\frac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}=\frac{\sin\left((2^n-1)\theta\right)}{\sin(2^n\theta)}$.

Correction de l'exercice 2958 ▲

$\tan(nx)=\frac{C_n^1\tan x-C_n^3\tan^3x+\cdots}{C_n^0-C_n^2\tan^2x+\cdots}$.

Correction de l'exercice 2959 ▲

$z=e^{i\theta}\Rightarrow a=\tan\frac{\theta}{2}$ pour $\theta\not\equiv\pi(\operatorname{mod}2\pi)$.

Correction de l'exercice 2960 ▲

1. Commutative, associative, 0 = élt neutre, tout élt $\neq 1$ est régulier, seul 0 est symétrisable.
2. Tout élt est symétrisable et $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$.

Correction de l'exercice 2961 ▲

$\exists\, b \in E$ tq $a*b*a = a$. Alors $b*a$ est neutre à droite et $a*b$ est neutre à gauche.

Correction de l'exercice 2962 ▲

1. Associative, commutative, $\{e\}$ = élement neutre, A est symétrisable $\iff A = \{a\}$ avec a symétrisable.
2. Oui.

Correction de l'exercice 2963 ▲

1. Non commutative, associative, $(1,0)$ = élt neutre,
   (a,b) est régulier $\iff a \neq 0$.
   (a,b) est inversible $\iff a = \pm 1$.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 2966 ▲

1. Non, a n'est pas régulier.
2. Oui, $G \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Non, il n'y a pas d'élément neutre.

Correction de l'exercice 2981 ▲

1. $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Q}$.
2. $x \mapsto 0$.
3. $x \mapsto 1$.

Correction de l'exercice 2996 ▲

1.
2. Soit $x \in G$: $\exists\, u,v \in \mathbb{Z}$ tq $ua+vb = 1 \Rightarrow x = (x^{ua})(x^{vb})$.

Correction de l'exercice 3003 ▲

Soir $\{e_1,\dots,e_p\}$ une partie génératrice de cardinal minimal. Alors les 2^p éléments $e_1^{\alpha_1}\dots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i \in \{0,1\}$ sont distincts (sinon un des e_i appartient au groupe engendré par les autres) donc $n \geqslant 2^p$.

Correction de l'exercice 3004 ▲

Si $a \in G$ est d'ordre infini alors il engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui a une infinité de sous-groupes ; c'est exclu. Donc tous les sous-groupes monogènes de G sont finis, et G est la réunion de ces sous-groupes.

Correction de l'exercice 3007 ▲

1.
2. A est intègre car $\{0\}$ est premier et si $a \in A \setminus \{0\}$ alors $a \times a \in (a^2)$ qui est premier donc a^2 divise a d'où a est inversible.

Correction de l'exercice 3010 ▲

1.
2. 1.
3. $x+y=(x+y)^2=x^2+y^2+xy+yx=x+y+xy+yx \Rightarrow xy+yx=0$.
   Pour $y=1$: $x+x=0 \Rightarrow 1=-1$.
   Pour y quelconque : $xy=-yx=yx$.
4. Antisymétrie : si $x=ay$, alors $xy=ay^2=ay=x$.
   Donc $(x \leqslant y)$ et $(y \leqslant x) \Rightarrow xy=x=y$.

Correction de l'exercice 3012 ▲

Si $(1-ab)c=1=c(1-ab)$ alors $abc=c-1=cab$ donc $babca=bca-ba=bcaba$ soit $ba(1+bca)=bca=(1+bca)ba$ donc $1+bca$ est inverse de $1-ba$.

Correction de l'exercice 3013 ▲

1.
2.
3. Remarque : la réciproque fausse : $A=\mathbb{Z}[X]$, $I=(X)$, $J=(X+4)$.
4. $114\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3022 ▲

$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$.
f est multiplicative sur la base canonique $\Rightarrow a_ia_j=0$ pour $i \neq j$.
$f(1,\dots,1)=1 \Rightarrow$ un des a_i vaut 1, et les autres 0.
conclusion : f = fct coordonnée.

Correction de l'exercice 3023 ▲

1.
2. idem 3022 : les projections + la valeur de stationnement.
3.

Correction de l'exercice 3024 ▲

1. $\pm 1, \pm i$.
2. On a : $1+i=0\times 2+(1+i)=1\times 2+(i-1)$.
3.

Correction de l'exercice 3026 ▲

$K=\{0,1,a,b\}$ et $\{1,a,b\}$ est un groupe multiplicatif $\Rightarrow b=a^2$, $a^3=1$.

$+$	0	1	a	a^2
0	0	1	a	a^2
1	1	0	a^2	a
a	a	a^2	0	1
a^2	a^2	a	1	0

$\times$	1	a	a^2
1	1	a	a^2
a	a	a^2	1
a^2	a^2	1	a

Correction de l'exercice 3042 ▲

Soit A non vide et minorée, et $B = \{\text{minorants de } A\}$.
B n'est pas vide et est majorée par A donc $\beta = \sup(B)$ existe.
Soit $a \in A$: $\forall\, b \in B,\ b \leqslant a$ donc $\beta \leqslant a$.
Par conséquent, β minore A, donc $\beta = \max(B)$.

Correction de l'exercice 3043 ▲

1.
2.
3.
4. Si (a,b) majore A, alors $(a,b) \gg (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $(a,b) \gg (0,\sqrt{2})$.
   Réciproque : si $x^2+y^2 \leqslant 1$, alors $(x+y)^2+(x-y)^2 \leqslant 2$, donc $y \pm x \leqslant \sqrt{2}$, et $(x,y) \ll (0,\sqrt{2})$.
   Finalement, $\sup(A) = (0,\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 3057 ▲

1. $a = 33$, $b = -200$.
2.

Correction de l'exercice 3060 ▲

1. Récurrence sur n.
2. Si $a > n$, alors $a = b+1$ avec $b \geqslant n$, donc $f(b) \geqslant n$, donc $f(f(b)) \geqslant f(a)$. Contradiction.
3.

Correction de l'exercice 3065 ▲

1. $a = bq+r \Rightarrow \sum = \underbrace{q+q+\cdots+q}_{b-r} + \underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{r} = bq+r = a.$
2.

Correction de l'exercice 3066 ▲

Supposons d'abord $\left|r-\sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$. Cela implique $|r| \leqslant \sqrt{a}+1$.
Majorons $|r^2-a|$:

$$|r^2-a| = |r-\sqrt{a}| \times |r+\sqrt{a}| \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(|r|+\sqrt{a}\right) \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a}+1\right)$$

Minorons $|r^2-a|$, en posant $r = \frac{p}{q}$, $a = \frac{m}{n}$.

$$|r^2-a| = \left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{np^2-mq^2}{nq^2}\right| \geqslant \frac{1}{nq^2}$$

La dernière inégalité provient que le numérateur np^2-mq^2 n'est pas nul (sinon $\sqrt{a}$ serait rationnel).

On déduit de ces deux majorations :

$$\frac{1}{nq^2} \leqslant |r^2 - a| \leqslant |r - \sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a} + 1\right)$$

Et donc :

$$|r - \sqrt{a}| \geqslant \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)} \frac{1}{q^2}.$$

Cette inégalité est aussi clairement vérifier si $\left|r - \sqrt{a}\right| > \frac{1}{q^2}$.
La constante $C = \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)}$ convient.

Correction de l'exercice 3067 ▲

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow b + 4xy - 4\sqrt{bxy} = (x + y - a)^2$.
$\Rightarrow$: $bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}\left(1 - \frac{2r}{b}\right) = x + y - a \Rightarrow r = \frac{b}{2}$ et $x + y = a \Rightarrow (x - y)^2 = a^2 - b$.
$\Leftarrow$: $a^2 - b = u^2$. On prend $x = \frac{a+u}{2}$ et $y = \frac{a-u}{2} \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$.

Correction de l'exercice 3068 ▲

1. $u_n = \frac{1}{3}((a+2b) + 2(a-b)(-\frac{1}{2})^n)$.
2.
3. $v_n = \lambda \times \mu^{(-\frac{1}{2})^n}$.
4.

Correction de l'exercice 3069 ▲

1. $u_n = \frac{n^2}{4} - n + \frac{3}{8}(1 - (-1)^n)$.
2. $u_n = \frac{n-1}{3} + aj^n + bj^{2n}$.

Correction de l'exercice 3070 ▲

$2u_n = u_0 + v_0 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0), \quad 2v_n = u_0 + v_0 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0)$.

Correction de l'exercice 3071 ▲

1. $u_n^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^{k-p} u_{n+p}$.
2.

Correction de l'exercice 3072 ▲

1.
2. $6T_n = \left(3 + \sqrt{6}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n + \left(3 - \sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n$.

Correction de l'exercice 3076 ▲

1. $(a\ b) \circ (c\ d)$.
2.

Correction de l'exercice 3077 ▲

1. $(1\ 2)\circ(i\ j)$.
2.

Correction de l'exercice 3078 ▲

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n+c+f}$.

Correction de l'exercice 3082 ▲

Compter les inversions ou récurrence : $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 3084 ▲

Les puissances de σ.

Correction de l'exercice 3085 ▲

Conjugaison : $\tau=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x\circ(6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$,
ou $\tau=(1\ 6)\circ(2\ 7)\circ(3\ 8)\circ(4\ 9)\circ(5\ 10)\circ(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x\circ(6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$.
$\Rightarrow$ 50 éléments.

Correction de l'exercice 3087 ▲

30.

Correction de l'exercice 3089 ▲

$$C_{26}^3\times\frac{2C_{23}^3\times 2C_{20}^3}{2!}\times 4!C_{17}^5\times\frac{5!C_{12}^6\times 5!C_6^6}{2!}=10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000.$$

Correction de l'exercice 3095 ▲

$7^4\equiv 1(\bmod 10)$, $7^2\equiv 1(\bmod 4)$ et $7^{7^{7^7}}$ est impair donc $7^{7^{7^{7^7}}}\equiv 7\equiv 3(\bmod 4)$ et $7^{7^{7^{7^{7^7}}}}\equiv 7^3\equiv 3(\bmod 10)$.

Correction de l'exercice 3096 ▲

1.
2. $x=1,y=1$ ou $x=2,y=3$.

Correction de l'exercice 3098 ▲

reste$=2$.

Correction de l'exercice 3102 ▲

$n^2+3n+5\equiv(n-59)^2-88(\bmod 121)$.
Si 121 divise n^2+3n+5, alors $11\mid n-59\Rightarrow$ contradiction.

Correction de l'exercice 3105 ▲

$x\equiv y(\bmod 4)$.

Correction de l'exercice 3106 ▲

1.
2. Récurrence : $a^{4\times 10^{k+1}}-1=(a^{4\times 10^k}-1)(a^{4\times 10^k\times 9}+\dots+a^{4\times 10^k\times 0})$.

3. $x = 123456789^{800000001/3}$.

Correction de l'exercice 3107 ▲

$56786730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 61$. Pour tous ces facteurs premiers, on a $\varphi(p) \mid 60$.

Correction de l'exercice 3108 ▲

L'ordre de $\dot{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise p donc est égal à p et cet ordre divise $\varphi(q) = q-1$.

Correction de l'exercice 3111 ▲

$(a+b) \wedge m = d$.

Correction de l'exercice 3112 ▲

$= |a-b|(a \wedge b)^2$ ou $3|a-b|(a \wedge b)^2$.

Correction de l'exercice 3113 ▲

$$8(n^3+n) = (2n+1)(4n^2-2n+5) - 5 \Rightarrow d = (2n+1) \wedge 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \equiv 2 (\bmod 5), & \mathrm{d} = 5 \\ \text{si } n \not\equiv 2 (\bmod 5), & \mathrm{d} = 1. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3114 ▲

$(15n^2+8n+6) \wedge (30n^2+21n+13) = 1$.

Correction de l'exercice 3115 ▲

$\{a,b\} \in \big\{\{50,600\},\{150,200\}\big\}$.

Correction de l'exercice 3116 ▲

$\{a,b\} \in \big\{\{1,192\},\{3,32\},\{7,126\},\{14,63\}\big\}$.

Correction de l'exercice 3117 ▲

$\{x,y\} = \{147,252\}$.

Correction de l'exercice 3118 ▲

$x = 14k, \quad y = 15k$.

Correction de l'exercice 3119 ▲

x impair, $y = 2-x$.

Correction de l'exercice 3120 ▲

$x = 1$ ou $y = 1$.

Correction de l'exercice 3121 ▲

$(300,150)$, $(150,100)$, $(100,75)$, $(75,60)$, $(60,50)$.

Correction de l'exercice 3122 ▲

1. $a^m - 1 \mid (a^{qm}-1)a^r = a^n - a^r$.
2. $A \wedge (AQ+R) = A \wedge R$. Algorithme d'Euclide sur les exposants de a.

3. ssi $m \mid n$.

Correction de l'exercice 3124 ▲

1.
2.
3. $x = 1 + 11k, \quad y = -1 + 7k$.

Correction de l'exercice 3125 ▲

1. $x = 67 - 71k, \quad y = -89 + 95k$.
2. $x = 24 + 53k, \quad y = 9 + 20k$.
3. $x = -49 + 20k - 5m, \quad y = 49 - 20k + 4m, \quad z = -7 + 3k$.

Correction de l'exercice 3127 ▲

1. $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.
2. $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Correction de l'exercice 3128 ▲

785.

Correction de l'exercice 3130 ▲

a, b, c 2 à 2 premiers entre eux.

Correction de l'exercice 3131 ▲

Décomposer en facteurs premiers.

Correction de l'exercice 3134 ▲

Récurrence.

Correction de l'exercice 3135 ▲

On suppose a, r entiers supérieurs ou égaux à 2.
$a - 1 \mid a^r - 1$ donc $a = 2$. Si $r = pq$ alors $2^p - 1 \mid 2^r - 1$ donc r est premier.
La réciproque est fausse, $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

Correction de l'exercice 3136 ▲

1.
2. $M_{11} = 23 \times 89$.
3.
4.

Correction de l'exercice 3140 ▲

1. $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.
2.
3.

4.

Correction de l'exercice 3142 ▲

498.

Correction de l'exercice 3143 ▲

$H_n \Rightarrow H_{2n} \Rightarrow H_{2n+1}$.

Correction de l'exercice 3144 ▲

$= \frac{q-1}{2}$.

Correction de l'exercice 3145 ▲

Si $p \in P$: $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{p} \in A$ avec $n \wedge p = 1$.
Alors pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{nx+py}{p} \in A$, donc $\frac{1}{p}\mathbb{Z} \subset A$.

Correction de l'exercice 3147 ▲

1. Si $x_n = \frac{p}{q} \neq 0$: $\frac{1}{k_n} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{1}{k_n-1}, \Rightarrow x_{n+1} = \frac{k_n p - q}{k_n q}$ et $0 \leqslant k_n p - q < p$. Donc la suite des numérateurs est strictement décroissante.
2. Car $x_{n+1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n-1} - \frac{1}{k_n}$.
3. $n_p > n_{p-1}(n_{p-1}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-1}} + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_{p-1}-1}$.
   $n_{p-1} - 1 \geqslant n_{p-2}(n_{p-2}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-2}} + \frac{1}{n_{p-1}-1} \leqslant \frac{1}{n_{p-2}-1}$, etc.
   Finalement, $x < \frac{1}{n_0-1} \Rightarrow n_0 = k_0$.
   (cf. INA opt. 1977)

Correction de l'exercice 3148 ▲

1. Pour $x = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $m = qc - pd$, et $n = pb - qa$.
2. (m,n) est unique à un facteur près.
3. $\frac{ma+nc}{mb+nd} - \frac{a}{b} = \frac{n(bc-ad)}{b(mb+nd)}$, et $\frac{c}{d} - \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m(bc-ad)}{d(mb+nd)}$.

Correction de l'exercice 3149 ▲

1. $x = -\frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. Pas de solution.

Correction de l'exercice 3150 ▲

1. $x^y = y^x \Leftrightarrow \frac{p^{p'q}}{q^{p'q}} = \frac{p'^{pq'}}{q'^{pq'}}$ (formes irréductibles)
   $\Rightarrow \begin{cases} p^{p'q} = p'^{pq'} \\ q^{p'q} = q'^{pq'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^b = p'^a \\ q^b = q'^a. \end{cases}$
   Comme $a \wedge b = 1$, on décompose p, p', q, q' en facteurs premiers $\Rightarrow$ le résultat.
2. $\left(pq' = m^a n^b,\ p'q = m^b n^a,\ m \wedge n = 1,\ a < b\right) \Rightarrow d = m^a n^a$, $a = n^{b-a}$ et $b = m^{b-a}$.

3. $m \geqslant n+1$ donc si $b-a \geqslant 2$, on a : $m^{b-a} - n^{b-a} = (m-n)(m^{b-a-1} + \cdots + n^{b-a-1}) > b-a$.
   Donc $b-a = 1 = m-n$, $a = n$, $x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
   Ces valeurs conviennent.

Correction de l'exercice 3151 ▲

1. $x = \dot{\overline{25}}$, $y = \dot{\overline{32}}$.
2. $x = \dot{\overline{15}}$ ou $\dot{\overline{16}}$.

Correction de l'exercice 3152 ▲

1. $\dot{0}$, $\pm\dot{1}$, $\pm\dot{5}$.
2.
3.

Correction de l'exercice 3155 ▲

Étudier le même produit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3157 ▲

1.
2. 3.
3.
4.
5.
6. $\dot{\overline{11}}$, $\dot{\overline{27}}$.

Correction de l'exercice 3160 ▲

Pour $1 \leqslant k < p$: $k!C_{p+k}^k = (p+1)\ldots(p+k) \equiv k! (\bmod p)$ donc $C_{p+k}^k \equiv 1 (\bmod p)$. De plus $C_p^k \equiv 0 (\bmod p)$ d'où $C_p^k C_{p+k}^k \equiv C_p^k (\bmod p^2)$.
Ensuite $(p-1)!C_{2p}^p = 2(p+1)\ldots(p+p-1) \equiv 2(p-1)! + 2p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} (\bmod p^2) \equiv 2(p-1)!\left(1+p\sum_{i=1}^{p-1} i'\right) (\bmod p^2)$ où i' désigne l'inverse de i modulo p. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est une permutation de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ donc $\sum_{i=1}^{p-1} i' \equiv \frac{p(p-1)}{2} (\bmod p) \equiv 0 (\bmod p)$, d'où $C_p^p C_{2p}^p \equiv 2 (\bmod p^2)$.
Enfin $\sum_{k=0}^p C_p^k C_{p+k}^k \equiv 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k + 2 (\bmod p^2) \equiv 2^p + 1 (\bmod p^2)$.

Correction de l'exercice 3161 ▲

L'équation caractéristique, $X^3 = 4(X^2+X+1)$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{Z}/11Z$: $1, 6, 8$. Donc x_n est de la forme : $x_n = a + 6^n b + 8^n c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. On a $6^{10} \equiv 8^{10} \equiv 1 (\bmod 11)$, donc (x_n) est périodique de période divisant 10. La plus petite période est 1 si $b = c = 0$, 10 sinon car les suites (6^n) et (8^n) ont 10 comme plus petite période modulo 11 et l'on a : $8(x_{n+1} - x_n) - 5(x_{n+2} - x_{n+1}) = 7 \cdot 8^n c$ et $7(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 7 \cdot 6^n b$.

Correction de l'exercice 3162 ▲

1.
2. (a) Le nombre de solutions de l'équation $x^q = \dot{1}$ est inférieur ou égal à $q < p-1$.

(b) $\dot{0} = a^{3q} - \dot{1} = (a^q - \dot{1})(a^{2q} + a^q + \dot{1})$ donc a^{2q} est racine de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, de discriminant $-\dot{3}$.

3. Il existe $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ solution de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, et un tel x est d'ordre multiplicatif 3. Par le théorème de Lagrange, on en déduit $3 \mid p-1$.

Correction de l'exercice 3163 ▲

Regrouper x et $n-x$.

Correction de l'exercice 3167 ▲

$P(X) = -1 + Q(X) \times (X-1)^n \Leftrightarrow (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n - 2 \Leftrightarrow X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n - 2$. Soit $2 = A(X)(X-2)^n + X^n B(X)$ la division suivant les puissances croissantes de 2 par $(X-2)^n$ à l'ordre n. On obtient $X^n \mid Q(X-1) - A(X)$ soit $Q(X) = A(X+1) + X^n R(X)$ et $\deg(P) < 2n \Leftrightarrow R = 0$. Calcul de $A(X)$ par développement limité : $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} x^k + O(x^n)$ donc :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} \frac{(-1)^k X^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k (-1)^n \frac{X^k}{2^{n+k-1}}$$

Correction de l'exercice 3169 ▲

$\mathrm{vect}(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ contient P, ΔP, $\Delta^2 P$, ..., $\Delta^n P$ donc $K_n[X]$ d'après le thm des degrés étagés.

Correction de l'exercice 3170 ▲

Déjà il est nécessaire que $k = n$. Supposant ceci réalisé, la matrice de $(P_0, \dots, P_k)$ dans la base canonique de $(x^2+1)^{n[X]}$ est équivalente à la matrice de Vandermonde de $z_0, \dots, z_k$. Donc une CNS est : $k = n$ et $z_0, \dots, z_k$ sont distincts.

Correction de l'exercice 3171 ▲

1. $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
2. $P(z) = z^2 + 3z + 1 \Rightarrow z = -1, -1, -2 \pm i$.

Correction de l'exercice 3173 ▲

$\mathrm{Ker}\Phi = K_0[X]$, $\mathrm{Im}\,\Phi = (X-a)K_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 3175 ▲

Formule de Taylor : $\frac{P^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.

Correction de l'exercice 3176 ▲

1.
2. Appliquer le 1) à $P(X+k)$.

Correction de l'exercice 3179 ▲

$$\begin{cases} P = a(X^2+1) + bX + c \\ Q = a'(X^2+1) + b'X + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \cos\theta(X^2-1) + 2X\sin\theta \\ Q = \sin\theta(X^2-1) - 2X\cos\theta. \end{cases}$$

$P \wedge Q = 1$ car $\pm i$ ne sont pas racines de P et Q.

Correction de l'exercice 3180 ▲

$\deg P < 2 \Rightarrow P \in \{1, X, X+1\}$.

Correction de l'exercice 3181 ▲

1. Isomorphisme $P \longmapsto P(X) + P(X+1)$.
2. $P_n' = nP_{n-1}$.
3. $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k$ (Taylor).
4. $Q_n(X) = P_n(1-X) \Rightarrow Q_n(X) + Q_n(X+1) = 2(-1)^n X^n$.

Correction de l'exercice 3182 ▲

1. Bezout généralisé.
2. $\big((1-X)P' - nP\big)(1-X)^{n-1} + \big(nQ + XQ'\big)X^{n-1} = 0$.
3. $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k$.
4.

Correction de l'exercice 3184 ▲

$Q = P + P' + P'' + \dots$: $Q(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha)$ soit minimal.
Alors $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) \Rightarrow \min Q \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 3185 ▲

oui ssi P est pair.

Correction de l'exercice 3186 ▲

1. $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.
2. $u_k = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$.
3.

Correction de l'exercice 3187 ▲

1.
2. Trivialement vrai ou trivialement faux selon le choix qu'on a fait en **1**.
3.
4. Soit $Q \in (x^2+1)^{[}X]$ et $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in (x^2+1)^{n[X]}\}$. On a $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in (x^2+1)^{[}X]\}$ de manière évidente, donc F_Q est stable par la multiplication modulaire par X.
   Soit réciproquement F un sev de $(x^2+1)^{n[X]}$ stable par la multiplication modulaire par X. Si $(P_1, \dots, P_k)$ est une famille génératrice de F alors $Q = \text{pgcd}(P_1, \dots, P_k) \in F$ d'après la relation de Bézout et la stabilité de F donc $F_Q \subset F$ et $P_i \in F_Q$ puisque Q divise P_i d'où $F \subset F_Q$ et $F = F_Q$.

Correction de l'exercice 3188 ▲

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est surjectif sur (x^2+1) donc $P((x^2+1)^{)} \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow P = a$ (constante réelle).
On a par interpolation de Lagrange : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.
Montrons que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Leftrightarrow P = aX + b$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$: la condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un polynôme éventuel P de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. On sait déjà que P est à coefficients rationnels, donc on peut l'écrire sous la forme : $P = \frac{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n}{d}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ et $d \in |||^*$. Soit π un nombre premier ne divisant ni a_n ni d, et $x = p/q$ (forme irréductible) un rationnel

tel que $P(x) = 1/\pi$. On a donc : $\pi(a_0q^n + \cdots + a_np^n) = dq^n$ ce qui implique que π divise q. Il vient alors : $a_np^n = dq^n/\pi - a_0q^n - \cdots - a_{n-1}qp^{n-1}$ ce qui est impossible puisque π est facteur du second membre ($n \geqslant 2$) mais pas du premier ($p \wedge q = 1$).

Correction de l'exercice 3189 ▲

Clairement $E = \varnothing$ si les y_i ne sont pas distincts. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont distincts, soit $P \in E$, $n = \deg(P)$ et λ le coefficient dominant de P ($P \neq 0$ car les y_i ne sont pas tous nuls). Alors $P(X) - y_i$ a pour seule racine x_i donc $P(X) - y_i = \lambda(X - x_i)^n$. Pour $n = 1$ on obtient $P(X) = y_1 + \lambda(X - x_1)$ avec $\lambda \in (x^2+1)^*$. Pour $n \geqslant 2$ on obtient $y_2 - y_1 = \lambda(X - x_1)^n - \lambda(X - x_2)^n = n\lambda X^{n-1}(x_2 - x_1) + \ldots$ ce qui est impossible donc $E = \varnothing$.

Correction de l'exercice 3190 ▲

1. Récurrence sur $\mathrm{Card}\,(S)$ en mettant le terme de plus bas degré en facteur et en dérivant le quotient.
2. Appliquer la question précédente aux suites $(\mathrm{Re}(a_s))$ et $(\mathrm{Im}(a_s))$.

Correction de l'exercice 3191 ▲

Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k}$. f est strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $1 \leqslant k \leqslant 100$ et de $+\infty$ à 0 sur $]100, +\infty[$. Donc il existe $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{99} < 100 < \alpha_{100}$ tels que $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \geqslant 1\} = \bigcup_{k=1}^{100}]k, \alpha_k]$.
La somme des longueurs est $L = \sum_{k=1}^{100} \alpha_k - \sum_{k=1}^{100} k$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{100}(X-k) - \sum_{k=1}^{100} k \prod_{i \neq k}(X-i) = X^{100} - 2X^{99}\sum_{k=1}^{100} k + \ldots$$

D'où $\sum_{k=1}^{100} \alpha_k = 2\sum_{k=1}^{100} k$ et $L = \sum_{k=1}^{100} k = 5050$.

Correction de l'exercice 3192 ▲

Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Pour le sens $\Rightarrow$, il suffit de vérifier la propriété lorsque P est irréductible, strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, et le seul cas non trivial est celui où P est de la forme : $P = (X-a)^2 + b^2$ avec $a > 0$, $b > 0$. Dans ce cas, le coefficient de X^k dans $(X+1)^\ell P(X)$ est : $C_\ell^k(a^2+b^2) - 2aC_\ell^{k-1} + C_\ell^{k-2}$, en convenant que C_x^y vaut 0 si l'on n'a pas $0 \leqslant y \leqslant x$. En mettant ce qui peut l'être en facteur et en ordonnant le reste suivant les puissances de k, on est rammené à montrer que la quantité :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1) - k((a^2+b^2)(2\ell+3) + 2a(\ell+2) + 1) + \ell^2(a^2+b^2)$$

est strictement positive pour tout $k \in [[0, \ell+2]]$ si ℓ est choisi convenablement. Or le discriminant par rapport à k est équivalent à $-4\ell^2(2a+1)$ lorsque ℓ tend vers $+\infty$ donc un tel choix de ℓ est possible.

Correction de l'exercice 3193 ▲

On suppose E fini et on montre que P est constant : il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Soit $N = \prod_{p \in E} p^{1+v_p(P(a))}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(a+kN) \equiv P(a)(\mathrm{mod}\, N)$ (formule de Taylor), donc $v_p(P(a+kN)) = v_p(P(a))$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in E$. Comme $P(a+kN)$ est produit d'éléments de E, on en déduit que $P(a+kN) = \pm P(a)$ pour tout k, donc P prend une infinité de fois la même valeur.

Correction de l'exercice 3194 ▲

Prendre pour P_n la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

Correction de l'exercice 3195 ▲

Analyse : on pose $P_j = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et on considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{a_0}{X} + \frac{a_1}{X+1} + \cdots + \frac{a_n}{X+n} = \frac{P(X)}{X(X+1)\ldots(X+n)}.$$

Alors $\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,dt = F(i+1) = \frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$ donc $P(j+1) = \frac{(j+n+1)!}{j!}$ et $P(k) = 0$ pour $k \in [[1,n+1]] \setminus \{j+1\}$, soit

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(j+n+1)!}{j!} \prod_{k\neq j+1} \frac{X-k}{j+1-k} \\ &= (-1)^{n-j} \frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!} \prod_{k\neq j+1} (X-k) = Q_j(X). \end{aligned}$$

Synthèse : soit Q_j le polynôme ci-dessus et $a_0,\dots,a_n$ les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{Q_j(X)}{X(X+1)\dots(X+n)}$. On doit juste vérifier que les a_i sont entiers. Calcul :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!} = (-1)^{i+j} \frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!} \\ &= (-1)^{i+j} C_{i+j}^{i} C_{i+n+1}^{i+j+1} C_{j+n+1}^{j} C_n^i (n+1) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3198 ▲

$\operatorname{Im}\varphi = \{P \in E$ tel que $X-1 \mid P\}$ (Bézout généralisé).
$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(X^3+X^2+X)$.

Correction de l'exercice 3199 ▲

1. $\frac{\alpha(b-X)+\beta(X-a)}{b-a}$.
2. $\cos n\theta + X\sin n\theta$.

Correction de l'exercice 3200 ▲

$P = \lambda((X+2)(X+3)(X+4)-6)$.

Correction de l'exercice 3201 ▲

1. $X+1$
2. 1
3. $X^2 - iX + 1$

Correction de l'exercice 3202 ▲

1. $7U = X+3, \quad 7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$
2. $3U = 2X^2 - X + 1, \quad 3V = -2X^2 - X + 2$

Correction de l'exercice 3203 ▲

Substituer j à $X \Rightarrow R = \begin{cases} (-1)^n - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ ((-1)^{n+1} - 1)(X+1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ ((-1)^n + 1)X & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Correction de l'exercice 3204 ▲

$n \equiv 0 \pmod 6$.

Correction de l'exercice 3205 ▲

1.

2.
3. Faire le produit.

Correction de l'exercice 3206 ▲

1. $(2^{50}-1)X+2-2^{50}$.
2. $2^{16}\left(X-\sqrt{3}\right)$.
3. $192\left(X-\sqrt{2}\right)^2$.
4.

Correction de l'exercice 3207 ▲

$\lambda=\mu=-1$.

Correction de l'exercice 3208 ▲

$-3X^3+X^2-X-1$.

Correction de l'exercice 3209 ▲

$n=qm+r\Rightarrow X^n-1\equiv X^r-1 (\operatorname{mod} X^m-1)$. On applique la méthode des divisions euclidiennes entre n et m $\Rightarrow \text{pgcd}=X^{n\wedge m}-1$.

Correction de l'exercice 3210 ▲

1.
2. Récurrence.

Correction de l'exercice 3214 ▲

1. $\frac{n}{2^{n-1}}$.
2. $\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. $-(-n)^n$.

Correction de l'exercice 3215 ▲

$\omega^{2k}-2\omega^k\cos\theta+1=(\omega^k-e^{i\theta})(\omega^k-e^{-i\theta})$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k-x)=(-1)^n(x^n-1)$.

Correction de l'exercice 3217 ▲

$X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1=(X^n-e^{in\theta})(X^n-e^{-in\theta})$.
$Q=\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^ke^{i(n-1-k)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}X^le^{-i(n-1-\ell)\theta}\right)$
$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\left(\sum_{p=0}^{k}e^{i(k-2p)\theta}\right)+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\left(\sum_{p=k-n+1}^{n-1}e^{i(k-2p)\theta}\right)$
$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\frac{\sin(2n-k-1)\theta}{\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 3218 ▲

Division de proche en proche : $Q=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\cos k\theta$.

Correction de l'exercice 3219 ▲

$\iff X^2+X+1 \mid X^{2n}+pX^n+q \iff j^{2n}+pj^n+q=0$.

Correction de l'exercice 3220 ▲

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Correction de l'exercice 3221 ▲

On calcule $\operatorname{pgcd}(P(X),Q(X)) = X^2+5$.
$\Rightarrow x_1 = i\sqrt{5}$ et $x_2 = -i\sqrt{5}$.
On obtient alors : $P(X) = (X^2+5)(X^2-3X+1)$.
Les deux dernières racines sont $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 3222 ▲

$P = (X-2)^2(X-3)^3$.

Correction de l'exercice 3223 ▲

$a = 10i$. Racines : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Correction de l'exercice 3224 ▲

$\lambda = 0, x = 1$.

Correction de l'exercice 3225 ▲

P doit être divisible par $X^2 - X + r$, $\Rightarrow r^2 - 3r + p + 1 = 2r^2 - r + q = 0$.
On calcule le pgcd de ces expressions $\Rightarrow$ CNS : $4p^2 - 4pq + q^2 + 3p + 11q - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 3226 ▲

$= (-1)^{n+1}\frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice 3228 ▲

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = \operatorname{Im}\big((1+xe^{i\theta})^n\big)$.
Donc $P(x) = 0 \iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$.
On obtient $x_k = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\theta - k\pi/n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Correction de l'exercice 3230 ▲

$P = a(X-b)^\alpha$.

Correction de l'exercice 3231 ▲

1. si $P(x) = 0$, alors $P\big((x-1)^2\big) = P\big((x+1)^2\big) = 0$.
   On a toujours $|x| < \max\{|x-1|, |x+1|\}$ donc, s'il y a une racine de module > 1, il n'y a pas de racine de module maximal $\Rightarrow P = 0$.
   Or $\max\{|x-1|, |x+1|\} \geqslant 1$ avec égalité ssi $x = 0$. Donc $P = 0$ ou $P = 1$.
2. Si x est racine, alors x^2 et $(x+1)^2$ le sont aussi.
   $\Rightarrow |x| = 0$ ou $1 \Rightarrow |x+1| = 0$ ou $1 \Rightarrow x \in \{0, -1, j, j^2\}$.
   $x = 0$ ou $x = -1 \Rightarrow P(1) = 0$: exclus.
   Donc $P = a(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$. On remplace $\Rightarrow P = (X^2+X+1)^\alpha$.
3. Seule racine possible : $1 \Rightarrow P = -(X-1)^k$.

Correction de l'exercice 3233 ▲

Mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Correction de l'exercice 3234 ▲

1. $P = \frac{\Phi}{X-z_k} \Rightarrow \frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k} = \frac{\Phi'(z_k)}{n}$.
2. Les deux membres sont égaux en $z_0,\dots,z_n$.
3. Décomposer Φ sur la base $\big((X-z_0)^k\big)$.
4. $\sum_k e^{2ikp/n} = 0$ pour $p<n \Rightarrow$ OK.

Correction de l'exercice 3238 ▲

$x = z+\frac{1}{z}$ avec $z^6+z^5+\dots+1=0$.
Autres racines : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Correction de l'exercice 3239 ▲

1. Soit $P(x) = a_n\prod_{k=1}^n(x-x_k)$. On a : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-x_k)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P'}{P}\right)(x) = \frac{P'^2-PP''}{P^2}(x)$.
2. Pour $k=1, x=0$, on a : $a_0a_2 \leqslant \frac{1}{2}a_1^2$.
   Pour k quelconque : on applique le cas précédent à $P^{(k-1)}$ dont les racines sont encore réelles simples : $(k-1)!a_{k-1}\times\frac{(k+1)!}{2}a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(k!a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1}a_k^2$.

Correction de l'exercice 3240 ▲

$Q = X^2-3X+1$, $P = \left(X-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(X-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)(X^2-X+4)$.

Correction de l'exercice 3242 ▲

1. p est premier car K est intègre.
   On a $1^p=1$, $(xy)^p = x^py^p$ (un corps est commutatif) et $(x+y)^p = x^p+y^p+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^kx^ky^{p-k} = x^p+y^p$ car p divise C_p^k si $1\leqslant k\leqslant p-1$.
2. Remarquer que $P'=0 \Leftrightarrow P\in K[X^p]$.
   On suppose σ surjectif. Soit $P(X) = Q(X^p) = a_0+\dots+a_kX^{kp}$ un polynôme non constant à dérivée nulle. Il existe $b_0,\dots,b_k$ tels que $b_i^p = a_i$. Alors $P(X) = Q(X)^p$ est réductible.
   On suppose que tout polynôme irréductible a une dérivée non nulle. Soit $a\in K$ et $P(X) = X^p-a$. $P'=0$ donc P est réductible. Soit Q un facteur unitaire irréductible de X^p-a. Alors Q^p et X^p-a ont Q en facteur commun donc leur pgcd, D, est non constant. Mais Q^p et X^p-a appartiennent à $K[X^p]$ donc D, obtenu par l'algorithme d'Euclide aussi, d'où $D = X^p-a$ et X^p-a divise Q^p. Par unicité de la décomposition de Q^p en facteurs irréductibles, il existe $r\in|||$ tel que $X^p-a = Q^r$. Par examen du degré on a $r=p$ donc $\deg Q=1$, $Q=X-b$ et finalement $b^p=a$.

Correction de l'exercice 3243 ▲

$V(\alpha)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P^{(n)}(\alpha)$ ont même signe, de même pour $V(\beta)$. Comme $P^{(n)}(\alpha) = P^{(n)}(\beta)$ on en déduit que $V(\alpha)-V(\beta)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ ont même signe, donc si et seulement si P a un nombre pair de racines dans $[\alpha,\beta]$.
Décroissance de V : V est constant sur tout intervalle ne contenant aucune racine de $P,P',\dots,P^{(n-1)}$. Considérons $x_0\in[\alpha,\beta[$ tel que $P^{(k)}(x_0)\neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq 0$. Alors pour x proche de

x_0 avec $x > x_0$, $P^{(k)}(x)$ a même signe que $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(k+1)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x)$ ont même signe que $P^{(\ell)}(x_0)$ donc les nombres de changements de signe dans les sous-suites $(P^{(k)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ et $(P^{(k)}(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ sont égaux. De même si $P(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq 0$. Ceci prouve que $V(x_0^+)=V(x_0)$ pour tout $x_0\in[\alpha,\beta[$.
On considère à présent $x_0\in]\alpha,\beta]$ tel que $P^{(k)}(x_0)\neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x<x_0$ la sous-suite $(P^{(k)}(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ a $\ell-k-1$ changements de signe si $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(\ell)}(x_0)$ ont même signe, $\ell-k$ changements de signe sinon tandis que la sous-suite $(P^{(k)}(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ en a un ou zéro. De même, si $P(x_0)=\dots=P^{(\ell-1)}(x_0)=0$ et $P^{(\ell)}(x_0)\neq 0$ on trouve ℓ changements de signe pour $(P(x),\dots,P^{(\ell)}(x))$ et zéro pour $(P(x_0),\dots,P^{(\ell)}(x_0))$ donc dans tous les cas $V(x_0^-)\geqslant V(x_0)$. Ceci achève la démonstration.

Correction de l'exercice 3244 ▲

Pour $z\in\mathbb{U}$, on a $Q(z)=0\Leftrightarrow P(z)/z^d\overline{P}(\bar z)=-\omega$. Comme $\overline{P}(\bar z)=\overline{P(z)}$, les deux membres ont même module pour tout $z\in\mathbb{U}$, il faut et il suffit donc que les arguments soient égaux modulo 2π. Pour $a\in(x^2+1)$ avec $|a|<1$, une détermination continue de $\mathrm{Arg}(e^{i\theta}-a)$ augmente de 2π lorsque θ varie de 0 à 2π donc, vu l'hypothèse sur les racines de P, une détermination continue de $\mathrm{Arg}(P(z)/z^d\overline{P(z)})$ augmente de $2\pi d$ lorsque θ varie de 0 à 2π. Une telle détermination prend donc au moins d fois une valeur congrue à $\mathrm{Arg}(-\omega)$ modulo 2π, ce qui prouve que Q admet au moins d racines distinctes dans $\mathbb{U}$.

Correction de l'exercice 3245 ▲

$f(2k\pi/n)>0>f((2k+1)\pi/n)$ pour $k\in\mathbb{Z}$ donc f admet $2n$ racines dans $[0,2\pi[$. En posant $z=e^{ix}$, $z^nf(x)$ est un polynôme en z de degré $2n$ ayant $2n$ racines sur le cercle unité ; il n'en n'a pas ailleurs.

Correction de l'exercice 3246 ▲

$(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-X\sqrt{3}+1)(X^2+X\sqrt{3}+1)$.

Correction de l'exercice 3247 ▲

Racines : $\alpha=2+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\alpha}$, $\beta=2-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\beta}$.
Factorisation de P sur $\mathbb{R}$: $P=(X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+|\alpha|^2)(X^2-2\mathrm{Re}(\beta)X+|\beta|^2)$ et les facteurs sont irrationnels.

Correction de l'exercice 3248 ▲

1. $P=|Q+iR|^2$.
2. Factoriser P.
3. Avec Maple : $P=\frac{1}{65}Q\overline{Q}$ avec $Q=65X^2+(49i-67)X+(42+11i)$ et Q est irréductible sur $Q[i]$. Donc si $P=A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ avec A,B polynômes à coefficients entiers alors, quitte à changer B en $-B$, il existe $\lambda\in\mathbb{Q}[i]$ tel que : $A+iB=\lambda Q$ et $A-iB=\overline{\lambda Q}$ d'où :

$$2A=65(\lambda+\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda-(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda+(42-11i)\overline{\lambda})$$
$$2iB=65(\lambda-\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda+(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda-(42-11i)\overline{\lambda})$$
$$\lambda\overline{\lambda}=65.$$

En particulier $65\lambda\in\mathbb{Z}[i]$, écrivons $\lambda=\frac{u+iv}{65}$ avec $u,v\in\mathbb{Z}$:

$$A=uX^2-\frac{67u+49v}{65}X+\frac{42u-11v}{65}$$
$$B=vX^2+\frac{49u-67v}{65}X+\frac{11u+42v}{65}$$
$$u^2+v^2=65.$$

$67u+49v$ est divisible par 65 si et seulement si $u \equiv 8v (\bmod 65)$ et dans ce cas les autres numérateurs sont aussi multiples de 65. La condition $u^2+v^2=65$ donne alors $v=\pm 1, u=\pm 8$ d'où :

$$A=\pm(8X^2-9X+5), \qquad B=\pm(X^2+5X+2).$$

Correction de l'exercice 3251 ▲

1. Si $P=QR$ alors $Q(a_i)R(a_i)=-1 \Rightarrow Q(a_i)=-R(a_i)=\pm 1$, donc $Q+R$ a n racines, donc est nul, et $P=-Q^2$: contradiction pour $x \to \infty$.
2. Même raisonnement : $P=Q^2$, donc $Q^2-1=(Q-1)(Q+1)=(X-a_1)\dots(X-a_n)$.
   On répartit les facteurs entre $Q-1$ et $Q+1$: $n=2p$, contradiction.

Correction de l'exercice 3252 ▲

Soit $P=QR$ avec $Q=X^{n_1}+b_{n_1-1}X^{n_1-1}+\dots+b_0X^0$ et $R=X^{n_2}+c_{n_2-1}X^{n_2-1}+\dots+c_0X^0$.
Par hypothèse sur $a_0=b_0c_0$, p divise un et un seul des entiers b_0, c_0. Supposons que p divise $b_0,b_1,\dots,b_{k-1}$: alors $a_k \equiv b_kc_0 (\bmod p)$ donc p divise b_k. On aboutit à « p divise le coefficient dominant de Q », ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 3253 ▲

On suppose $a \neq 0$ et $X^p-a=PQ$ avec $P,Q \in K[X]$ unitaires non constants. Soit $n=\deg(P) \in [[1,p-1]]$ et $b=(-1)^nP(0) \in K$. b est le produit de cetraines p-èmes de a, donc $b^p=a^n$. De plus $n \wedge p=1$; soit $nu+pv=1$ une relation de Bézout. On a alors $b^{pu}=a^{nu}=a^{1-pv}$ d'où $a=(b^u/a^v)^p$ donc $b^u/a^v \in K$ est racine de X^p-a.

Correction de l'exercice 3254 ▲

$3\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=-9.$

Correction de l'exercice 3255 ▲

$-\frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 3256 ▲

$\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 3257 ▲

$x^7=-2x^2+2x-1 \Rightarrow a^7+b^7+c^7=-7.$

Correction de l'exercice 3258 ▲

$\{a,b,c\}=\left\{1,-\frac{1+i}{2},-\frac{1-i}{2}\right\}.$

Correction de l'exercice 3259 ▲

$\{x,y,z\}=\{-1,1,2\}.$

Correction de l'exercice 3260 ▲

$d=\frac{2}{3}$, $\{a,b,c\}=\left\{0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$

Correction de l'exercice 3262 ▲

1. $50p^3 = 27q^2$.
2. $a^2+b^2+c^2 = 2c^2+1 = -2p \Rightarrow$ l'une des racines de l'équation aux carrés $(-Y^3-2pY^2-p^2Y+q^2)$ doit être $-p-\frac{1}{2}$. CNS $\Leftrightarrow 2p+1+8q^2=0$.

Correction de l'exercice 3263 ▲

$20p^3+27q^2=0$.

Correction de l'exercice 3264 ▲

$b=0,\ c=\frac{9}{100}a^2 \Rightarrow$ racines : $-3x,-x,x,3x$ avec $x=\sqrt{\frac{-a}{10}}$.

Correction de l'exercice 3265 ▲

$-P(-2-X) = X^3+4X^2+7X+2$.

Correction de l'exercice 3266 ▲

$X^3+(2b-a^2)X^2+(b^2-2ac)X-c^2$.

Correction de l'exercice 3267 ▲

racine 1 : $\lambda=-6$.
racine -1 : $\lambda=-4$.
racine $\alpha\in\mathbb{U}\setminus\{\pm1\}$: les autres sont $\frac{1}{\alpha}$ et $-\lambda \Rightarrow \lambda=6$, $\alpha=\frac{1+i\sqrt{15}}{4}$.

Correction de l'exercice 3268 ▲

1. Les coefficients de P sont bornés.
2. $\widetilde{P}(X^2) = (-1)^nP(X)P(-X) \Rightarrow \widetilde{P}\in\mathbb{Z}[X]$.
3. La suite $(\widetilde{\vdots}{P})$ prend un nombre fini de valeurs.

Correction de l'exercice 3269 ▲

Soit $y=\gamma x+\delta$ l'équation de la droite en question. On veut que l'équation $x^4+ax^3+bx^2+(c-\gamma)x+(d-\delta)=0$ ait quatre racines distinctes en progression arithmétique. Si r est la raison de cette progression alors les racines sont $-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r$, $-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r$, $-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r$ et $-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r$. On doit donc chercher à quelle condition sur a,b,c,d il existe γ,δ,r réels tels que :

$$\begin{aligned}
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)+\cdots+\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = -b\\
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)+\dots\\
&\qquad+\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = c-\gamma\\
&\Big(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\Big)\Big(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\Big) = \delta-d
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont satisfaites à r donné en choisissant convenablement γ et δ. La première s'écrit après simplifications : $\frac{5}{2}r^2 = \frac{3}{8}a^2+b$ et la condition demandée est $3a^2+8b>0$.

Correction de l'exercice 3270 ▲

1.

2.
3. ssi $\exists\, G \in K(X)$ tel que $G\circ F = X \Rightarrow P\circ F = XQ\circ F$.

$F = \frac{A}{B}$, $A\wedge B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A \mid (p_0 - Xq_0) \\ B \mid (p_n - Xq_n) \end{cases} \quad \Rightarrow F$ est homographique.
4. $F = \phi(X)$.

Correction de l'exercice 3272 ▲

$F = \frac{P}{Q}$. Si $P = \lambda Q$: $\operatorname{Im} F = \{\lambda\}$.
Si $P = \lambda Q + \mu$: $\operatorname{Im} F = (x^2+1)^{\setminus}\{\lambda\}$.
Sinon, $\operatorname{Im} F = (x^2+1)$.

Correction de l'exercice 3273 ▲

1) G =cste.
2) F a un seul pôle $a \Rightarrow F = \frac{P}{(X-a)^k}$ et $G = a + \frac{1}{Q}$ avec $\deg P \leqslant k$.
3) $F \in (x^2+1)^{[}X] \Rightarrow G \in (x^2+1)^{[}X]$.

Correction de l'exercice 3274 ▲

1.
2. $n\frac{X^n+1}{X^n-1}$.

Correction de l'exercice 3275 ▲

1. $\Rightarrow \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})} = \frac{P(X)+P(\frac{1}{X})}{Q(X)+Q(\frac{1}{X})}$.
2.
3.

Correction de l'exercice 3278 ▲

$I_k = \{F$ tels que $\deg F \leqslant -k\}$.

Correction de l'exercice 3280 ▲

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)} &= \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1/3}{X-j} + \frac{1/3}{X-j^2} \\ &= \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{-3/4}{X+1} + \frac{1/12}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3281 ▲

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+p}p!}{k!\,(n-k)!\,(X+k)^{p+1}}$.
2. $\frac{(-1)^p p!}{2i\sin\alpha}\left(\frac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}} - \frac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^k p!\,(-1)^k \frac{\sin(p+1-k)\alpha}{\sin\alpha} X^k}{(X^2-2X\cos\alpha+1)^{p+1}}$.
3. $\frac{\sum_{k \text{ pair}} C_{p+1}^k p!\,(-1)^{p+1} \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} X^{p+1-k} + \sum_{k \text{ impair}} C_{p+1}^k p!\,(-1)^p \frac{\operatorname{ch} k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} X^{p+1-k}}{(X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 3282 ▲

1. 1.
2. $1/4$.
3. $1/2$.

Correction de l'exercice 3283 ▲

$\frac{1}{Q(a)(X-a)^2} - \frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)} = \frac{2}{R''(a)(X-a)^2} - \frac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}$.

Correction de l'exercice 3284 ▲

1. $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(1+a_i^2)^n}{P'^2(a_i)(X-a_i)^2} + \frac{2na_i - P''(a_i)(1+a_i^2)/P'(a_i)}{P'^2(a_i)(X-a_i)} \right)$.
2.

Correction de l'exercice 3285 ▲

1. Décomposer $1/P$ en éléments simples, et prendre $x \to \infty$.
2. Idem avec $X^k/P \Rightarrow \Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k < n-1 \\ 1 & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Correction de l'exercice 3286 ▲

1. $P' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i P}{X - x_i} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X - x_i}$.
2. $P'(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overline{z - x_i}}{|z - x_i|^2} = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{Bar}\left(x_i, \frac{m_i}{|z - x_i|^2} \right)$.
3.
4.

Correction de l'exercice 3288 ▲

$F(X+1) - F(X) = \frac{2}{X-1} - \frac{3}{X} + \frac{1}{X+1} \Rightarrow F(X) = \frac{1}{X} - \frac{2}{X-1} + \text{cste}$.

Correction de l'exercice 3289 ▲

$F = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X - b_j} - \frac{1}{X - c} = \lambda \frac{\prod(X - a_i)}{(X-c)\prod(X - bj)}$ où $\lambda = -\prod \frac{c - b_i}{c - a_i}$.

Correction de l'exercice 3290 ▲

$Q = (XP + P')(XP' + P) = XP^2 \left(X + \frac{P'}{P} \right) \left(\frac{1}{X} + \frac{P'}{P} \right)$.

$\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X - a_i}$, donc les expressions : $x + \frac{P'(x)}{P(x)}$ et $\frac{1}{x} + \frac{P'(x)}{P(x)}$ changent de signe entre a_i et a_{i+1}.

Cela fait au moins $2n-3$ racines distinctes ($2n-2$ si 1 n'est pas racine), plus encore une racine pour $\frac{1}{x} + \frac{P'(x)}{P(x)}$ entre 0 et a_1.

Correction de l'exercice 3291 ▲

$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{(X-k)\prod_{i \neq k}(k-i)}$ donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)} = \lim_{x \to \infty} \frac{xP(x)}{Q(x)} = 1$.

Si l'on suppose $|P(k)| < \frac{n!}{2^n}$ pour tout $k \in [[0, n]]$ alors $\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)} \right| < \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)} = 1$, contradiction.

Correction de l'exercice 3292 ▲

1. On suppose $P \neq 0$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines de P de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$ et $n = m_1 + \cdots + m_p = \deg(P)$. On a $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X-\alpha_i}$ et $\sum_i \frac{-m_i}{(X-\alpha_i)^2} = \left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''}{P} - \left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{(X-\alpha)(X-\beta)} - \left(\sum_i \frac{m_i}{X-\alpha_i}\right)^2$ où α, β sont les deux racines de P manquant dans P''. Si $\alpha_i \notin \{\alpha, \beta\}$ alors en comparant les termes en $1/(X-\alpha_i)^2$ des membres extrêmes on trouve $m_i = 1$. De même si $\alpha_i = \alpha \neq \beta$ ou l'inverse. Reste le cas $\alpha_i = \alpha = \beta$ qui donne $-m_i = n(n-1) - m_i^2$ donc $m_i = n$ ce qui contredit l'hypothèse "P a deux racines distinctes".
2. Soient $\alpha_i < \alpha_j$ les deux plus petites racines réelles de P. Si α_i est aussi racine de P'' alors P et P'' changent de signe en α_i et, en remplaçant au besoin P par $-P$, P est convexe positif sur $]-\infty, \alpha_i[$ et concave négatif sur $]\alpha_i, \alpha_j[$ ce qui est absurde. Donc $\alpha_i \in \{\alpha, \beta\}$. De même pour la plus grande racine réelle de P, ce qui prouve que α et β sont réels. En identifiant les éléments de première espèce dans les deux décompositions de P'/P on obtient :

$$\forall\, i \in [[1,n]],\ \sum_{j \neq i} \frac{2}{\alpha_i - \alpha_j} = \begin{cases} n(n-1)/(\alpha-\beta) & \text{si } \alpha_i = \alpha, \\ n(n-1)/(\beta-\alpha) & \text{si } \alpha_i = \beta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier pour $\alpha_i \notin \{\alpha, \beta\}$ on a : $\sum_{j \neq i} \frac{\overline{\alpha_i} - \overline{\alpha_j}}{|\alpha_i - \alpha_j|^2} = 0$ ce qui signifie que $\overline{\alpha_i}$ est barycentre des $\overline{\alpha_j}$ avec des coefficients positifs, donc appartient à l'enveloppe convexe des $\overline{\alpha_j}$, $j \neq i$. Il en va de même sans les barres, et donc l'ensemble des racines de P n'a pas d'autres points extrémaux que α et β ; il est inclus dans $[\alpha, \beta]$ donc dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3293 ▲

1. $X^3 - 1 = (X^2+1)(X^3+X^2-1) - X^4(X+1)$.
2. $F(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan x + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 3294 ▲

1. $1 = (1-X)^2(1+2X+3X^2+\cdots+nX^{n-1}) + (n+1)X^n - nX^{n+1}$.
2. $= \frac{-n\cos n\theta + (n+1)\cos(n-1)\theta - \cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

Correction de l'exercice 3295 ▲

1. $1 - X^2 = (1 - 2X\cos\theta + X^2)(1 + 2X\cos\theta + \cdots + 2X^n\cos n\theta) + 2X^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2X^{n+2}\cos n\theta$.
2. $= \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Correction de l'exercice 3296 ▲

1.
2. Division de 1 par $P \Rightarrow U = 1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4, \quad V = -1 + X^2 + X^3 + X^4$.

Correction de l'exercice 3297 ▲

$F = G$.

Correction de l'exercice 3298 ▲

Il y a égalité.

Correction de l'exercice 3299 ▲

L'intersection contient F.
Soit $\vec{u} \in \big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big)$: $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$ avec $\vec{a}, \vec{a}' \in F$, $\vec{b} \in G \cap F'$ et $\vec{b}' \in G \cap G'$.
Alors $\vec{b} - \vec{b}' = \vec{a}' - \vec{a} \in F \cap G = F' \cap G'$, donc $\vec{b} \in G'$, donc $\vec{b} \in F' \cap G' \subset F$.

Correction de l'exercice 3303 ▲

CNS $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$.

Correction de l'exercice 3305 ▲

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on décompose en $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$. Alors $P = (P_1 + P_2)(X^2) - (1 - X)P_2(X^2) = (1 - X)P_1(X^2) + X(P_1 + P_2)(X^2)$, ce qui prouve que les deux sommes sont égales à $\mathbb{R}[X]$. Ces sommes sont facilement directes.
   (b) Cela ne change pas A : les éléments de A sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur X près), indépendamment du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
2. Soit f un isomorphisme de E_1 sur E_2 et $F = \{x - f(x) \text{ tq } x \in E_1\}$. Alors $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.

Correction de l'exercice 3310 ▲

1. $\vec{u} = (\vec{u} - g \circ f(\vec{u})) + g \circ f(\vec{u})$.
2. $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
   $f = (f \circ g) \circ f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Correction de l'exercice 3312 ▲

3. $|a| \neq |b|$.

Correction de l'exercice 3315 ▲

Non, ils n'ont pas même dimension si $E \neq \{\vec{0}\}$ ou $F \neq \{\vec{0}\}$.

Correction de l'exercice 3316 ▲

1. $\varphi(v \circ w) = \varphi(v) \circ w + v \circ \varphi(w)$.
2. Par récurrence $\varphi^n(v \circ w) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^k(v) \circ \varphi^{n-k}(w)$ donc si $v \in c_p$ et $w \in c_q$ alors $v \circ w \in c_{p+q-1}$.

Correction de l'exercice 3317 ▲

$$\begin{cases} x' = 2y + z \\ 3y' = -x + z \\ 3z' = -x + 3y + z. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3318 ▲

$r = 3, \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{b} - 2\vec{d} - \vec{e} = \vec{0}.$

Correction de l'exercice 3320 ▲

3. π_H :

$$\begin{cases} 4x' = 3x - y - z \\ 4y' = -x + 3y - z \\ 4z' = -2x - 2y + 2z, \end{cases}$$

s_H :
$$\begin{cases} 2x' = x - y - z \\ 2y' = -x + y - z \\ 2z' = -2x - 2y. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3322 ▲

codim $H = 0$: supplémentaire = $\{\vec{0}\}$.
codim $H = p$: Soit $\vec{u} \in E \setminus (H \cup K)$: Alors $H \oplus K\vec{u}$ et $K \oplus K\vec{u}$ ont un supplémentaire commun, L, donc H et K ont un supplémentaire commun : $L \oplus K\vec{u}$.

Correction de l'exercice 3332 ▲

2. $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{\vec{0}_F\} \\ \mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \end{cases}$
$\iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{\vec{0}_F\} \\ \forall\, \vec{x}, \vec{y},\ \exists\, \vec{z} \text{ tq } f(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f+g)(\vec{z}). \end{cases}$
$\Rightarrow$: Donc $f(\vec{x} - \vec{z}) = g(\vec{z} - \vec{y}) = \vec{0}$. Pour $\vec{y} = \vec{0}$: $\vec{x} = (\vec{x} - \vec{z}) + \vec{z} \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$.
$\Leftarrow$: Soient $\vec{x} = \vec{x}_f + \vec{x}_g$ et $\vec{y} = \vec{y}_f + \vec{y}_g$: Alors $f(\vec{x}) + g(\vec{y}) = f(\vec{x}_g) + g(\vec{y}_f) = (f+g)(\vec{x}_g + \vec{y}_f)$.

Correction de l'exercice 3335 ▲

$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker} g \Rightarrow \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g \leqslant \dim E$.
$f+g$ est surjective $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E \Rightarrow \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g \geqslant \dim E$.

Correction de l'exercice 3336 ▲

1. $\dim H + \dim K = \dim E$.
2. Si $H \oplus K \neq E$ alors $\mathscr{E}$ n'est pas stable pour $\circ$.

Correction de l'exercice 3342 ▲

2. (c) $g(\vec{x}) = \vec{z}$.

Correction de l'exercice 3343 ▲

3. (a) $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f^k(\vec{x}) + g \circ f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$.
Pour $k = p$: $f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$, puis pour $k = p-1$: $f^{k-2}(\vec{x}) = \vec{0}$, etc, jusqu'à $\vec{x} = \vec{0}$.
3. (b) Même principe sur l'équation : $(f+g)(\vec{x}) = \vec{y}$.
On obtient : $(f+g)^{-1} = g^{-1} \circ \left(\mathrm{id} - g^{-1} \circ f + g^{-2} \circ f^2 - \dots + (-1)^{p-1} g^{1-p} \circ f^{p-1}\right)$.

Correction de l'exercice 3348 ▲

$f(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + \beta(\vec{x})\vec{u}$, $\beta \in E^*$.

Correction de l'exercice 3350 ▲

3. $\dim \mathscr{K} = (\dim E)(\dim \mathrm{Ker} f) = \dim \mathscr{I}, \quad \dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I}) = (\mathrm{rg} f)^2$.

Correction de l'exercice 3351 ▲

$(\mathrm{rg} u)(\mathrm{rg} v)$.

Correction de l'exercice 3354 ▲

1. $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell} = \delta_{jk} \psi_{i\ell}$.
2. ψ_{11} est un projecteur non trivial.
3. Si $\sum \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$, alors en appliquant ψ_{1j} : $\lambda_j \vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0$.
4. Décomposer g sur la base (φ_{ij}).

Correction de l'exercice 3355 ▲

$g =$ une projection sur $\operatorname{Im} f$ et $h = f$.

Correction de l'exercice 3356 ▲

On veut $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} f$ donc g est entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$, application linéaire à valeurs dans $\operatorname{Ker} f$. On en déduit $\dim F = (\operatorname{codim} \operatorname{Im} f)(\dim \operatorname{Ker} f) = (\dim \operatorname{Ker} f)^2$.

Correction de l'exercice 3357 ▲

Soit $p = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} g$. Alors $g \circ p = p$, pour tout $g \in G$ donc $p^2 = p$, $F \subset \operatorname{Im} p$ et si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ d'où $g(x) = x$ pour tout $g \in G$ c'est-à-dire $x \in F$. Donc $F = \operatorname{Im} p$ et $\dim F = \operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$ (trace d'un projecteur).

Correction de l'exercice 3359 ▲

2. Si $A, B \in \mathscr{D}$ et $AB = I$, alors pour $i \neq j$, $\forall\, k$, $a_{ik} b_{kj} = 0$.
Soit $a_{i1} \neq 0$: alors $b_{1j} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $a_{i1} = b_{1i} = 1$.
Donc chaque colonne de A contient $n-1$ fois 0 et une fois 1. A est inversible $\Rightarrow$ A est une matrice de permutation.

Correction de l'exercice 3362 ▲

1.
2. $M^{-1} = \frac{-a}{b(na+b)} U + \frac{1}{b} I$.
3.
4.
$$M^n = \frac{(na+b)^n - b^n}{n} U + b^n I \Rightarrow \begin{cases} n \text{ pair} & : a = 0, \text{ ou } -\frac{2b}{n},\ b = \pm 1 \\ n \text{ impair} & : a = 0,\ b = 1. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3365 ▲

2. $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3368 ▲

Il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 3371 ▲

1.
2. Pour $i < j$, on doit avoir $M(I+E_{ij}) = (I+E_{ij})M \Rightarrow \begin{cases} a_{ki} = 0 & \text{si } k \neq i \\ a_{jk} = 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3372 ▲

$(\alpha+\text{tr}A)\text{tr}X = \text{tr}B$.

Si $\alpha(\alpha+\text{tr}A)\neq 0$: solution unique : $X = \frac{1}{\alpha}\left(B - \frac{\text{tr}B}{\alpha+\text{tr}A}A\right)$.

Si $\alpha = 0$: solutions ssi A et B sont proportionnelles.

Si $\alpha+\text{tr}A = 0$: solutions ssi $\text{tr}B = 0$: $X = \frac{1}{\alpha}B + \lambda A$.

Correction de l'exercice 3376 ▲

1.
2. Si A est diagonale : $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $a_{k\ell}\neq 0$: $M = I - \frac{\text{tr}A}{a_{k\ell}}E_{\ell k}$.

Correction de l'exercice 3379 ▲

2. $D^{-1} = BC^{-1}A + I_p$.

Correction de l'exercice 3380 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer ${}^tXX$:

$$ {}^tXX = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. $$

On note $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X. De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX \geqslant 0$. Et aussi que ${}^tXX \geqslant 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I+M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I+M)X = 0$ alors $X = 0$.
   Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY = \|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX) \geqslant 0$.
   D'autre part :
$$ \begin{aligned} {}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\ &= {}^tX{}^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\ &= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\ &= {}^tXMX \\ &= {}^tX(-X) \\ &= -{}^tXX \\ &= -\|X\|^2 \end{aligned} $$
   Qui est donc négatif.
   Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ (= le vecteur nul) et donc $I+M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1}=\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)^{-1}=\left((I+M)^{-1}\right)^{-1}\times(I-M)^{-1}=(I+M)\times(I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

(b) Calculons ${}^tA$.

$$\begin{aligned}{}^tA &= {}^t\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)\\ &= {}^t\left((I+M)^{-1}\right)\times{}^t(I-M) && \text{car } {}^t(AB)={}^tB{}^tA\\ &= \left({}^t(I+M)\right)^{-1}\times{}^t(I-M) && \text{car } {}^t(A^{-1})=\left({}^tA\right)^{-1}\\ &= \left(I+{}^tM)\right)^{-1}\times(I-{}^tM) && \text{car } {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB\\ &= (I-M)^{-1}\times(I+M) && \text{car ici } {}^tM=-M\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.
Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M)=I-M^2=(I-M)(I+M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :
Lemme. Si $AB=BA$ alors $AB^{-1}=B^{-1}A$.
Pour la preuve on écrit :

$$AB=BA\Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1}=B^{-1}(BA)B^{-1}\Rightarrow B^{-1}A=AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I+M$ et $I-M$ on trouve $(I+M)\times(I-M)^{-1}=(I-M)^{-1}\times(I+M)$ et donc $A^{-1}={}^tA$.

Correction de l'exercice 3381 ▲

3. $X=-A$ ou $X=\frac{1}{2}A$ ou $X=A-I$ ou $X=-\frac{1}{2}A-I$.

Correction de l'exercice 3382 ▲

1. $J^2=J$.
2. $JM=MJ$.
3. $k=\mathrm{rg}J$.

Correction de l'exercice 3383 ▲

2. $u_{|\operatorname{Im}v}=\mathrm{id}\Rightarrow\mathrm{tr}\left(u_{|\operatorname{Im}v}\right)=\mathrm{rg}v\Rightarrow\mathrm{tr}\left(v_{|\operatorname{Im}v}\right)=k\mathrm{rg}v$.

Correction de l'exercice 3385 ▲

$M_k=A^kM_0+S_kB$ avec $S_k=I+A+\cdots+A^{k-1}=(I-A^k)(I-A)^{-1}$ si $I-A$ est inversible.

Correction de l'exercice 3386 ▲

1. $A^3-(\lambda+\mu)A^2+\lambda\mu A=0$.
2. $U=\frac{\mu A-A^2}{\lambda(\mu-\lambda)}$, $V=\frac{\lambda A-A^2}{\mu(\lambda-\mu)}$ et la valeur propre est 0, λ ou μ.

Correction de l'exercice 3389 ▲

1. Compacité.

2. Si $x_1 = 0$, on pose $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$R(Y) \geqslant \min\left(a_{11} + \frac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{\alpha}, \frac{\alpha a_{21}}{x_2} + R(X_0), \ldots, \frac{\alpha a_{n1}}{x_n} + R(X_0)\right) > R(X_0)$ pour $\alpha > 0$ assez petit.

3. Si $y_1 > 0$, on pose $X = X_0 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

$AX - RX = Y + \alpha \begin{pmatrix} a_{11} - R \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, donc pour $\alpha > 0$ assez petit, $R(X) > R$.

4. Inégalité triangulaire.

Correction de l'exercice 3390 ▲

1.
2. La base canonique de E est $(F_{ij} = E_{ij} - E_{ji})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: Si $M \in E$, la coordonnée de M suivant F_{ij} est le coefficient d'indices i, j de M. En particulier, en notant $A = (a_{ij})$, la coordonnée de $f(F_{ij})$ suivant F_{ij} est $a_{ii} + a_{jj}$, donc :

$$\mathrm{tr} f = \sum_{i,j} (a_{ii} + a_{jj}) = (n-1)\mathrm{tr} A.$$

Correction de l'exercice 3392 ▲

Soit φ un tel morphisme. Alors pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\dot{0} = p\varphi(M) = \varphi(M^p)$, donc φ s'annule sur toute matrice qui est une puissance p-ème. Notons $P(i, j, \alpha)$ la matrice de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, qui est aussi la matrice de l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$. Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ peut être transformée, à l'aide de ces seules opérations élémentaires, en une matrice $M' = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \det(M))$ par une adaptation de l'algorithme de Gauss. Comme $P(i, j, \alpha) = P(i, j, \alpha/p)^p$ et $\det(M) = \pm(|\det(M)|^{1/p})^p$, on obtient : $\varphi(M) = \dot{0}$ si $\det(M) > 0$ et $\varphi(M) = \varphi(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)) = x$ si $\det(M) < 0$. Réciproquement, la fonction φ ainsi définie est effectivement un morphisme de groupe si et seulement si $2x = \dot{0}$, soit $x = \dot{0}$ pour p impair, et $x \in \{\dot{0}, \dot{q}\}$ pour $p = 2q$.

Correction de l'exercice 3393 ▲

1.
2. $X = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3394 ▲

$B = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3395 ▲

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_n^2 & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3397 ▲

1. $\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k + (n-1)(-1)^k\right) \\ b = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k - (-1)^k\right). \end{cases}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k & \frac{1}{3}(4k^3+6k^2+2k) \\ 0 & 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right]^k = (x^2+y^2+z^2)^{k-1}A$.

Correction de l'exercice 3398 ▲

1. $\frac{A+(2-n)I}{n-1}$.
2. $\frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & & (-b) \\ & \ddots & \\ (-b) & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & \pm 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & 1/a_n \\ & \dots & \\ 1/a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\operatorname{diag}(\lambda_i) - \frac{1}{1+\lambda_1+\dots+\lambda_n}(\lambda_i\lambda_j)$.

Correction de l'exercice 3399 ▲

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $B^{-1} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3400 ▲

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3401 ▲

$P=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c\\ 0 & 0 & 4a & 12a+4b\\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$ est inversible pour $a\neq 0$.

Correction de l'exercice 3402 ▲

$N=P^{-1}AP$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3403 ▲

$B-I$ est inversible.

Correction de l'exercice 3405 ▲

oui, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3407 ▲

1. $\phi(P)=(-X-1)^{n-1}P\left(-\frac{1}{X+1}\right)$.
2. I.

Correction de l'exercice 3408 ▲

Système de Cramer ssi $m\neq 0,\pm 2$; compatible ssi $m\neq 2$.

Correction de l'exercice 3409 ▲

Système de Cramer ssi $m\neq 0,\pm 1,\pm i$; compatible ssi $m\neq 0,\pm i$.

Correction de l'exercice 3410 ▲

Système de Cramer ssi $m\neq 1,\pm 2i$; compatible ssi $m\neq 1$.

Correction de l'exercice 3411 ▲

Si $m\neq 0,-2$ alors système de Cramer ; sinon, système incompatible.

Correction de l'exercice 3412 ▲

Système de Cramer ssi a,b,c sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi $d\in\{a,b,c\}$.

Correction de l'exercice 3413 ▲

Système compatible ssi $3a+2b+2c+d=0$.

Correction de l'exercice 3414 ▲

Système de Cramer.

Correction de l'exercice 3415 ▲

Système de Cramer ssi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi les seconds membres correspondants sont égaux.

Correction de l'exercice 3416 ▲

CN d'existence de solution : $p+q+r=0$. C'est une CNS si la liste (a,b,c) comporte au plus un zéro.

Correction de l'exercice 3417 ▲

1. Pour éviter d'avoir à diviser par a on réordonne nos lignes puis on applique la méthode du pivot :
$$\begin{cases} x + by + az = 1 & L_1 \\ x + aby + z = b & L_2 \\ ax + by + z = 1 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + by + az = 1 & L_1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases}$$
On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ pour obtenir un système triangulaire équivalent au système initial :
$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (2-a-a^2)z = b-a \end{cases}$$
2. Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y+(1-a)z = b-1$ on sait déjà $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1-by-az$.
Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x,y,z).
3. Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.
   (a) Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :
   $$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$
   Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x+y+z = 1$. On choisit par exemple y,z comme paramètres, l'ensemble des solutions est
   $$\left\{(1-y-z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\right\}.$$
   (b) Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :
   $$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ -3by + 3z = b-1 \\ 0 = b+2 \end{cases}$$
   Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est
   $$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$
   Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions
   $$\left\{(-1-2y,y,-1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\right\}.$$
   (c) Enfin si $b = 0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z = -1$ et $(2-a-a^2)z = -a$. Donc $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b = 0$ et $a = 1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

(d) Conclusion :
  - Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, c'est un système de Cramer : il admet une unique solution.
  - Si $a = 1$ et $b \neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).
  - Si $a = 1$ et $b = 1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).
  - Si $a = -2$ et $b \neq -2$ il n'y a pas de solution.
  - Si $a = -2$ et $b = -2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).
  - Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 3418 ▲

Décomposition en éléments simples de $F = \frac{x}{X+a} + \frac{y}{X+2a} + \frac{z}{X+3a}$ avec $F(1) = F(2) = F(3) = 1$ donc une solution unique si $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 3424 ▲

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré $\leqslant 3$.

1. Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx\right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

2. D'autre part

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = \alpha\big(8a+4b+2c+d\big) + \beta\big(27a+9b+3c+d\big) + \gamma\big(64a+16b+4c+d\big).$$

Donc

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha+27\beta+64\gamma)a + (4\alpha+9\beta+16\gamma)b + (2\alpha+3\beta+4\gamma)c + (\alpha+\beta+\gamma)d.$$

3. Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a,b,c,d il faut et il suffit que

$$(8\alpha+27\beta+64\gamma)a + (4\alpha+9\beta+16\gamma)b + (2\alpha+3\beta+4\gamma)c + (\alpha+\beta+\gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Correction de l'exercice 3425 ▲

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -4 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{-2}3^6 \\ y = 2^{-3}3^{12} \\ z = 2^2 3^{-7}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3427 ▲

Ils sont égaux.

Correction de l'exercice 3429 ▲

1.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3431 ▲

Si $\mathrm{rg}(A) = n$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0$.

Correction de l'exercice 3434 ▲

3. On complète par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ base $= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Correction de l'exercice 3435 ▲

Développer le produit.
Un seul coeff. non nul par ligne et colonne, ou une ligne nulle.

Correction de l'exercice 3436 ▲

1.
2. Si $d_{ab} \neq 0$, prendre

$$\begin{cases} \vec{c} = -\frac{d_{bc}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ac}}{d_{ab}}\vec{b} \\ \vec{d} = \frac{d_{db}}{d_{ab}}\vec{a} + \frac{d_{ad}}{d_{ab}}\vec{b}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3437 ▲

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base, décomposer $\vec{d}$. Si $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, on obtient $\vec{0} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 3438 ▲

Les deux membres sont n-linéaires alternés. On le vérifie sur la base du déterminant.

Correction de l'exercice 3441 ▲

2. (b) $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$. Calculer le pgcd d'une ligne par opérations élémentaires à l'aide de Bézout. Ce pgcd vaut 1 sinon $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 3442 ▲

$(\det A)^n$.

Correction de l'exercice 3443 ▲

$27a^4 = 256b^3$.

Correction de l'exercice 3447 ▲

ctrex : $A = \mathbb{Z}$, $P(0) = 0$ et $P(2) = 1$.

Correction de l'exercice 3448 ▲

On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on considère $J = (\delta_{i,i+1 \bmod p})$. On a $J^p = I$ et $A = a_0J^0 + \dots a_{p-1}J^{p-1}$ donc $A^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p)I$ (car on est en caractéristique p).
On en déduit $\det(A) = \det(A)^p = (a_0^p + \dots + a_{p-1}^p)^p = a_0 + \dots + a_{p-1}$.
Autre méthode en restant dans $\mathbb{Z}$: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{p,\sigma(p)} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$.
Notons $x(\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \dots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$ et c le cycle $(1, 2, \dots, p)$. Alors $x(\sigma) = x(c^{-k} \circ \sigma \circ c^k)$ pour

tout $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre de permutations distinctes que l'on obtient à σ fixé en faisant varier k est égal à 1 si σ et c commutent, et à p sinon, d'après la relation : $\mathrm{Card}\,(\text{orbite}) \times \mathrm{Card}\,(\text{stabilisateur}) = \mathrm{Card}\,(< c >) = p$. De plus, c et σ commutent si et seulement si $\sigma \in < c >$ (facile), d'où $\det(A) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon(c^k) a_k^p \equiv a_0 + \cdots + a_{p-1} \bmod p$.

Correction de l'exercice 3449 ▲

$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Alors les termes associés à σ et σ^{-1} sont égaux car M est symétrique, donc la somme de ces deux termes est paire. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma = \sigma^{-1}$. Alors comme n est impair, il existe $i \in [[1,n]]$ tel que $\sigma(i) = i$ donc le terme associé à σ est pair.

Correction de l'exercice 3451 ▲

Notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\bmod 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.
2. $(a+b+c)^3$
3. $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$
4. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.
5. $-(a^3-b^3)^2$.
6. $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ où $\alpha \neq \beta$ sont les racines de $X^2 - aX + bc = 0$.
   $(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$ si $\alpha = \beta$.
7. $a^{n-3}(a-b)\left(a^2+ab-2(n-2)b^2\right)$.
8. 1.
9. $a_1 a_2 \ldots a_n \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right)$.
10. 0
11. $\varepsilon_n \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.
12. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Correction de l'exercice 3452 ▲

1. $-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)$.
2. $(x-a_1)\ldots(x-a_n)(x+a_1+\cdots+a_n)$.
3. $z(y-z)(x-y)\ldots(a-b)$.
4. $\frac{V(a,b,c)V(x,y,z)}{(a+x)\ldots(c+z)}$.

Correction de l'exercice 3453 ▲

3.$\sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha-\beta)$.

Correction de l'exercice 3454 ▲

1. Développer.
2. (a) $\begin{cases} D(a-b,0,c-b) = (a-b)^n \\ D(a-c,b-c,0) = (a-c)^n \end{cases} \Rightarrow D(a,b,c) = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.

   (b) $\det((a-b)I + bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Correction de l'exercice 3457 ▲

1. $M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & n \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & n & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = \varepsilon_{n-1} n^n$.
2.
3. $n^{n/2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 3458 ▲

Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow D = 2^{(n-1)(n-2)/2} V(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Correction de l'exercice 3459 ▲

$M = (x_i^{j-1}) \times (C_k^{i-1} y_j^{k-i+1}) \Rightarrow$

$\det M = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n-1 \\ \varepsilon_n C_{n-1}^0 C_{n-1}^1 \dots C_{n-1}^{n-1} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 3460 ▲

$A = \left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) \times \left(P^{(i-1)}(j)\right) \Rightarrow \det A = \varepsilon_n \left(a_{n-1}(n-1)!\right)^n$. Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction de l'exercice 3461 ▲

1. 3.
2. 4.
3. 2.
4. 3.

Correction de l'exercice 3463 ▲

$\text{rg} = 3$ si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -25$.
$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \text{rg} = 2 : 11L_1 = 5L_2 + 9L_3$.
$\lambda = -25 \Rightarrow \text{rg} = 2 : L_1 + 2L_2 + 9L_3 = 0$.

Correction de l'exercice 3464 ▲

$\text{rg} = 3$ si $a \neq \frac{1}{3}$ ou $b \neq -3$, $\text{rg} = 2$ sinon.

Correction de l'exercice 3465 ▲

$\text{rg}ABC \leqslant 2 \Rightarrow x = 13$. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3466 ▲

Les colonnes de A engendrent les $n-p$ derniers vecteurs de la base canonique.

Correction de l'exercice 3467 ▲

Échange des lignes i et j.

Correction de l'exercice 3470 ▲

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 & \dots & y_n\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rg}(A)=\begin{cases}2 & \text{si } (x_i) \text{ et } (y_j) \text{ ne sont pas constantes}\\ 1 & \text{ou 0 sinon.}\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^2 & \dots & y_n^2\\ 2y_1 & \dots & 2y_n\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rg}(B)=\begin{cases}3 & \text{si Card}\,(x_i)\geqslant 3 \text{ et Card}\,(y_j)\geqslant 3\\ 2 & \text{si } \min\big(\text{Card}\,(x_i),\text{Card}\,(y_j)\big)=2\\ 1 & \text{ou 0 sinon.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 3472 ▲

4. $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3474 ▲

$$M=\operatorname{Re}\left[\begin{pmatrix}e^{i\theta}\\ \vdots\\ e^{ni\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dots & e^{(n-1)i\theta}\end{pmatrix}\right]\Rightarrow \operatorname{rg}M\leqslant 2.$$

Le premier mineur 2×2 vaut $-\sin^2\theta \Rightarrow \operatorname{rg}M=2$ si $\theta\not\equiv 0(\operatorname{mod}\pi)$. Sinon, $\operatorname{rg}M=1$.

Correction de l'exercice 3476 ▲

E est un sev et un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est isomorphe à $\mathscr{L}(H,\mathbb{R}^n)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im}A$ dans $\mathbb{R}^n$. $\dim E=n(n-\operatorname{rg}(A))$.

Correction de l'exercice 3479 ▲

2 ou 0.

Correction de l'exercice 3483 ▲

1.
2. B admet r lignes indépendantes d'indices $i_1,\dots,i_r$ et C admet r colonnes indépendantes d'indices $j_1,\dots,j_r$. Soient B' et C' les sous matrices carrées associées dans B et C. Alors la sous-matrice de A d'indices $i_1,\dots,i_r$ pour les lignes et $j_1,\dots,j_r$ pour les colonnes est $B'C'$, de rang r. Donc $\operatorname{rg}(A)\geqslant r$ et l'inégalité inverse est bien connue.
3. Soient $i_1,\dots,i_r$ r indices tels que les lignes associées dans A sont linéairement indépendantes, et $B\in\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la sous-matrice correpondante. Par construction, $\operatorname{rg}(B)=r$. Chaque ligne de A étant combinaison linéaire des lignes de B, il existe $C\in\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que $A=BC$. Et on a $r=\text{nb.lignes}(C)\geqslant\operatorname{rg}(C)\geqslant\operatorname{rg}(A)=r$.
4.
5. Comprendre dans cette question que B,C ne sont pas forcément les matrices construites en **2**. Notons $\operatorname{vect}(X)$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice X. De $A=BC={}^tC^tB$ on tire $\operatorname{vect}(A)\subset\operatorname{vect}(B)$ et $\operatorname{vect}(A)\subset\operatorname{vect}({}^tC)$, et tous ces espaces sont de dimension r, donc ils sont égaux. On en déduit qu'il existe une matrice $P\in GL_r(\mathbb{R})$ telle que $B={}^tCP$ d'où $CB=C^tCP$. $\operatorname{rg}(C^tC)=\operatorname{rg}(C)=r$ et P est inversible donc $\operatorname{rg}(CB)=r$.

Correction de l'exercice 3489 ▲

$f^2 = f \circ g \circ f = f \circ g = f$ donc f est une projection. g idem.
$f \circ g = f \Rightarrow \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ et donc, par symétrie, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
Réciproquement, si f, g sont deux projections de même direction, alors $f \circ g$ et f coïncident sur la base et la direction de g, donc sont égales. De même, $g \circ f = g$.

Correction de l'exercice 3490 ▲

Direction = $\operatorname{Ker} f$ et Base = $\operatorname{Im} g$.

Correction de l'exercice 3491 ▲

Direction = $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et Base = $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Correction de l'exercice 3492 ▲

Si $\lambda \neq 1$, $(\mathrm{id} - f)^{-1} = \mathrm{id} + \frac{1}{1-\lambda} f$.

Correction de l'exercice 3494 ▲

1.
2. $\begin{cases} 2x' = x - 2y - z \\ 2y' = -x - z \\ 2z' = -x - 2y + z. \end{cases}$

Correction de l'exercice 3495 ▲

Si $A = \varnothing$ c'est évident.
Sinon, A est un sous-groupe de $GL(E)$ donc $\frac{u}{\operatorname{Card} A}$ est un projecteur et $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{Card}(A) \operatorname{rg}(u)$.

Correction de l'exercice 3496 ▲

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3497 ▲

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -5 & 12 & 12 \\ -3 & 9-\sqrt{57} & 9+\sqrt{57} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3-\sqrt{57}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3+\sqrt{57}}{2} \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $P=\begin{pmatrix}1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$

4. $P=\begin{pmatrix}-7 & 5+3\sqrt{5} & 5-3\sqrt{5}\\ 11 & -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5}\\ 2 & 5+5\sqrt{5} & 5-5\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

5. $P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -5 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

6. $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ i & -i & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1+i & 0 & 0\\ 0 & 1-i & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

7. $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

8. $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

9. $P=\begin{pmatrix}-4 & -1 & -2\\ -3 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

10. $P=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3498 ▲

1. $P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

2. $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

3. $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

4. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 30 & 18\\ 0 & 0 & 15 & -99\\ 0 & 0 & 21 & 99\\ 0 & 1 & -11 & 11\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -16\end{pmatrix}$

5. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & -8\\ 3 & 1 & 12 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

6. 1 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

7. 0 est valeur propre quadruple, non diagonalisable.

8. 0 est vp double, $\mathrm{rg} A = 2$. Autres vp : $\frac{-3\pm 3\sqrt{13}}{2}$, diagonalisable.

Correction de l'exercice 3499 ▲

1. 0 et les racines de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.
2. $\sin\alpha + \sin 2\alpha, \quad -\sin\alpha, \quad -\sin 2\alpha$.

Correction de l'exercice 3500 ▲

1. $\mathrm{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. $E_0 = \{a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
   vp $\lambda \neq 0$: $\lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2) = 0$. Il y a deux racines distinctes, $E_\lambda = \mathrm{vect}((a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda))$.
2. A est diagonale. vp = 0 et a_n.

Correction de l'exercice 3501 ▲

1. $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
2. $-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Correction de l'exercice 3502 ▲

Soit $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de x et $Q_n(x)$ celui de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le premier 1 par 2. On a les relations de récurrence :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

D'où pour $x \notin \{0,4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \qquad \text{avec } x = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Les valeurs propres de A autres que 0 et 4 sont les réels $x_k = 2(1-\cos(k\pi/n))$ avec $0 < k < n$ et 0 est aussi valeur propre (somme des colonnes nulle) donc il n'y en a pas d'autres.

Correction de l'exercice 3503 ▲

$$n \text{ pair} : P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \cdots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \cdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

$$n \text{ impair} : P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \cdots & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & \cdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & -1 \end{pmatrix}, D = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

Correction de l'exercice 3504 ▲

$P = \left(\omega^{(i-1)(1-j)}\right)$, $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ avec $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

Correction de l'exercice 3505 ▲

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(a+b+c+e, a-b-c+e, -a+b-c+e, -a-b+c+e)$.

Correction de l'exercice 3506 ▲

$\lambda = 0 : E_0 = \{\vec{x} \text{ tq } x_1 + \cdots + x_q + x_{n-q+1} + \cdots + x_n = 0\}$,
$\lambda = 2\min(p,q) : E_\lambda = \operatorname{vect}((\underbrace{1,\dots,1}_{p}, 0, \dots, 0, \underbrace{1,\dots,1}_{p}))$.

Correction de l'exercice 3510 ▲

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & (0) \\ & 2 & 2 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & n \\ (0) & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3512 ▲

$u(X^k) = -kX^k + (k-2n)X^{k+1} \Rightarrow$ la matrice de u est triangulaire inférieure. $\operatorname{Spec}(u) = \{0, -1, \dots, -2n\}$.
$\lambda = -k$: Résoudre l'équation différentielle $\Rightarrow P = cX^k(X-1)^{2n-k}$.

Correction de l'exercice 3513 ▲

$\alpha^3 : (X-\beta)(X-\gamma)$, $\quad \beta^3 : (X-\alpha)(X-\gamma)$, $\quad \gamma^3 : (X-\alpha)(X-\beta)$.

Correction de l'exercice 3514 ▲

$\lambda = 1 \quad : P = Q\big((X-1)^2\big)$.
$\lambda = -1 : P = (X-1)Q\big((X-1)^2\big)$.

Correction de l'exercice 3515 ▲

$\lambda = 1 : P = aX + b$.

Correction de l'exercice 3516 ▲

$M = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \dots & -a^n \\ & 2 & -2a & & (0) \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -na \\ (0) & & & & n+1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Ker} f = \{\text{polynômes constants}\}$, $\operatorname{Im} f = \{\text{polynômes divisibles par } X-a\}$.
Valeurs propres : $0, 2, 3, \dots, n+1$. Pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $E_k = \operatorname{vect}\big((X-a)^{k-1}\big)$.

Correction de l'exercice 3517 ▲

Oui ssi $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Correction de l'exercice 3518 ▲

1. $(-1)^n(X^n - a_nX^{n-1} - \cdots - a_1)$.
2. Étude de $x \mapsto (x^n - a_nx^{n-1} - \cdots - a_1)/x^n$.
3. Inégalité triangulaire.
4. Expression générale de A^k.

Correction de l'exercice 3520 ▲

$\mathrm{spec}(T) =]-1,1]$.

Correction de l'exercice 3521 ▲

2. $0 < \lambda \leqslant 1 : f(x) = Cx^{1/\lambda - 1}$.

Correction de l'exercice 3522 ▲

$1/k$, $k \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 3523 ▲

$\lambda = \frac{1}{(\pi/2+k\pi)^2} : u(x) = C\sin(\pi/2 + k\pi)x$.

Correction de l'exercice 3525 ▲

3. $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3526 ▲

1. 1 si $C \neq 0$, 0 si $C = 0$.
2. $\dim(E_0) \geqslant n-1 \Rightarrow X^{n-1}$ divise $\chi_M \Rightarrow \chi_M = (-1)^n(X^n - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)X^{n-1})$.
3. Oui.

Correction de l'exercice 3527 ▲

$\mathrm{rg}A = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}A = n-1$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$. La somme des valeurs propres est $\mathrm{tr}A = n$ donc la drenière valeur propre est n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3528 ▲

1. La fonction $f_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{x^n}$ croît strictement de $-\infty$ à 1 quand x varie de 0 à $+\infty$.
2. $\chi_A(x) = (-1)^n\left(x^n - \sum_{k=1}^n kx^{n-k}\right)$.

Correction de l'exercice 3529 ▲

Soit $M = (x_iy_j)$: M est de rang inférieur ou égal à 1, donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $n-1$. Comme $\mathrm{tr}(M) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = (-x)^{n-1}(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x)$, et le déterminant demandé est $\Delta_n = \chi_M(-1) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + 1$.

Correction de l'exercice 3530 ▲

1. $\det(M+(t))$ est une fonction affine de t.
2. $|\lambda+a| = k|\lambda+b|$ et $\lambda = x+iy \Rightarrow (1-k^2)(x^2+y^2)+\cdots = 0$, équation d'un cercle si $|a| \neq |b|$.

Correction de l'exercice 3531 ▲

1. $a_1\dots a_n + b_1a_2\dots a_n + a_1b_2a_3\dots a_n + \cdots + a_1\dots a_{n-1}b_n$.
2.
3. $\frac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^n(a_i-t)} = 1+\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i-t}$ change de signe entre deux a_i successifs et dans l'un des intervalles $]-\infty,a_1[$ ou $]a_n,+\infty[$ donc χ_A admet n racines distinctes.
4. Oui. Supposons par exemple $a_1 = \cdots = a_p < a_{p+1} < \cdots < a_n$: La question précédente met en évidence $n-p$ racines simples de χ_A entre les a_i et $\pm\infty$, et a_1 est aussi racine d'ordre $p-1$ de χ_A. Or les p premières lignes de $A-a_1I$ sont égales donc $\mathrm{rg}(A-a_1I) \leqslant n-p+1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A-a_1I)) \geqslant p-1$ d'où la diagonalisabilité. Le cas où il y a plusieurs groupes de a_i égaux se traite de même.

Correction de l'exercice 3532 ▲

$\chi_B(X) = \frac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A(1/X), \quad \chi_C(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Correction de l'exercice 3535 ▲

$(a) \Leftrightarrow (b)$: thm du rang.
$(c) \Leftrightarrow (d)$: immédiat.
$\underline{(c)} \Rightarrow \underline{(b)}$: si $AX = XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X = XP(B)$.
$\overline{(c)} \Rightarrow \overline{(b)}$: prendre U vecteur propre de A, V vecteur propre de ${}^tB$ associés à la même valeur propre et $X = U{}^tV$.

Correction de l'exercice 3538 ▲

Somme des valeurs propres $= n$.

Correction de l'exercice 3540 ▲

Soit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il faut en fait prouver que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ on a $\mathrm{tr}(A^p) = \mathrm{tr}(A)$. Remarquer qu'on n'a pas forcément $A^p = A$ dans $\mathcal{M}_n(K)$, c'est faux, entre autres, si A est nilpotente d'indice 2. Soit X une indéterminée sur K. On a dans l'anneau $\mathcal{M}_n(K[X])$: $(A-XI_n)^p = A^p - X^pI_n$, d'où, en prenant les déterminants : $\chi_{A^p}(X^p) = \chi_A(X)^p = \chi_A(X^p)$ et on égale les coefficients de $X^{(n-1)p}$.

Correction de l'exercice 3541 ▲

$a = b$ ou a, b non nuls.

Correction de l'exercice 3544 ▲

1.
2. $(A-xI)({}^tA-xI) = (x^2-2x+4)I$, $\chi_A(x) = x^2-2x+4$.
3. ${}^tA = 2I-A$ donc $(A-xI)((2-x)I-A) = (x^2-2x+4)I$. En prenant pour x une des racines du polynôme x^2-2x+4, on obtient un polynôme scindé à racines simples annulant A.

Correction de l'exercice 3546 ▲

A est diagonalisable car $A^2 = I$. $e^A = (\operatorname{ch} 1)I + (\operatorname{sh} 1)A$.

Correction de l'exercice 3547 ▲

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est l'unique valeur propre de u et $u \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable.
Si $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$ et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u = E$. Or $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3549 ▲

1. Polynôme annulateur simple.
2. Non, ctrex = B nilpotent.

Correction de l'exercice 3550 ▲

$\operatorname{spec}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Correction de l'exercice 3551 ▲

A est (x^2+1)-diagonalisable et les valeurs propres sont $\alpha > 0$ et $\beta, \overline{\beta}$ avec la même multiplicité.

Correction de l'exercice 3553 ▲

A est diagonalisable et a n valeurs propres distinctes, sinon il existerait un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ces racines sont les n racines n-èmes de 1 et leur somme est nulle.

Correction de l'exercice 3554 ▲

A est (x^2+1)-diagonalisable (polynôme annulateur à racines simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Les dimensions sont conservées sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3556 ▲

Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ, de f. Alors $p_\lambda = P(f)$.

Correction de l'exercice 3557 ▲

3. $\operatorname{Spec}(u_k) \subset \{i, -i\}$ d'après la relation $u_k^2 = -\mathrm{id}_E$. Si le spectre était réduit à un élément alors u_k serait scalaire car diagonalisable, mais ceci est incompatible avec la relation d'anticommutation entre u_k et u_ℓ. Donc $\operatorname{Spec}(u_k) = \{i, -i\}$.
4. u_ℓ avec $\ell \neq k$ échange les sous-espaces propres de u_k donc ils ont même dimension $n/2$.

Correction de l'exercice 3560 ▲

1. Calcul Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.
2. (a)
   (b)
   (c) $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.
   (d) Si $P(u) = 0$ alors $u \circ P'(u) = 0$ donc P (polynôme minimal) divise XP' ce qui implique $P(X) = X^k$ pour un certain k.

Correction de l'exercice 3563 ▲

Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \operatorname{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geqslant 1$ *et il existe* $u \in \mathbb{Z}$ *tel que toutes les racines de* P *sont congrues à* u/n *modulo* 1. Cette condition est clairement suffisante.

Correction de l'exercice 3564 ▲

On écrit $C = PJQ$ où P, Q sont inversibles et J est la matrice canonique de rang r. Alors $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$ donc $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs avec le même bloc diagonal $r \times r$, ce qui prouve que χ_A et χ_B ont un facteur de degré r en commun.

Correction de l'exercice 3565 ▲

Le polynôme s'écrit $(X^2+1)(X^2+X+1)$. Il n'a donc pas de racine réelle. Or tout élément de $M_5(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre et cette valeur propre devrait être également racine du polynôme minimal. Par conséquent $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ ne peut pas être le polynôme minimal d'une matrice de $M_5(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3566 ▲

1. Que c'est un isomorphisme (et réciproquement).
2. Soit $Q(X) = P(X)/X$. On a $u \circ Q(u) = 0$ et X, Q sont premiers entre eux, d'où $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} Q(u)$. On conclut avec le théorème du rang.
3. Même méthode.

Correction de l'exercice 3568 ▲

1.
2. (a) Pour $p \in K[X]$ on a $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.

   (b) $(\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists\, v \neq 0 \text{ tq } v \circ (u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif$) \Leftrightarrow (\lambda \in \operatorname{Spec}(u))$. Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ on a : $(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker} v)$ donc $\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathscr{L}(H, E)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$. On en déduit : $\dim(\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Correction de l'exercice 3570 ▲

$\lambda = 1$: $\operatorname{Dir}(p) \subset \operatorname{Ker} f, \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Base}(p)$.
$\lambda = 0$: $f\big(\operatorname{Base}(p)\big) \subset \operatorname{Dir}(p)$.

Correction de l'exercice 3572 ▲

1. Pour $P \in K[X]$ on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Correction de l'exercice 3574 ▲

Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Alors il existe $\ell \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :

$$\forall\, x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall\, x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x)f^{k-1}(a) + \ell(f(x))f^{k-2}(a) + \dots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f-monogène engendré par a est égal à E, soit : $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$. Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \dots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall\, x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x) f^{n-1}(a) + \dots + \ell(f^{n-1}(x) - \dots - \alpha_1 x)a.$$

Ceci implique $\ell(x) = 0$ pour tout x, en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Correction de l'exercice 3575 ▲

1. Oui, les applications $u \mapsto p \circ u$ et $u \mapsto u \circ p$ le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}\,p$ et d'une base de $\mathrm{Im}\,p$.
   Si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(u)) = \left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{smallmatrix}\right)$, d'où $\mathrm{Spec}(\varphi) \subset \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ et $d_{1/2} = 2r(n-r)$.

Correction de l'exercice 3576 ▲

Si D est diagonalisable alors les applications $X \mapsto DX$ et $X \mapsto XD$ le sont (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.
Pour la réciproque, on commence par constater que si P est un polynôme quelconque, alors :

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^)),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(formule du binôme pour $P = X^m$ et linéarité de chaque membre par rapport à P pour P quelconque).
Supposons ϕ_D diagonalisable, prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U^t V$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k U^t V \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V P(D - \lambda I).$$

Comme $U \neq 0$, ceci implique ${}^t V P(D - \lambda I) = 0$ pour tout V, donc $P(D - \lambda I) = 0$. Ainsi $D - \lambda I$ est diagonalisable et D itou.

Correction de l'exercice 3578 ▲

1. 1 est valeur propre double, $d_1 = 1$.
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $X = \begin{pmatrix} (6\alpha t + \gamma)e^t + 2\beta \\ (6\alpha t + \gamma + 3\alpha)e^t + \beta \\ (6\alpha t + \gamma - \alpha)e^t + 2\beta \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3580 ▲

1. $A \sim \text{diag}(1, \alpha, \alpha^{-1})$ où α est une racine primitive $7^{\text{ème}}$ de 1,
   $A \sim \text{diag}(\alpha, \alpha^{10}, \alpha^{-11})$ où α est une racine primitive $37^{\text{ème}}$ de 1.
2. pas de solution.
3. $\text{vp} = 0$ ou 1.

Correction de l'exercice 3583 ▲

On se ramène à $\lambda = 0$ en remplaçant f par $f - \lambda \text{id}$. $\text{Im} f$ est de dimension 1 stable par f donc $f_{|\text{Im} f}$ est une homothétie, c'est l'application nulle vu $\text{Spec}(f)$. On en déduit $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$. Soit $e_2 \in \text{Im} f \setminus \{0\}$, e_3 un antécédent de e_2 par f et $e_1 \in \text{Ker} f$ indépendant de e_2. Alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Correction de l'exercice 3584 ▲

Soit f un endomorphisme d'un ev E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$.
Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.
$n \leqslant 1$: on a $f = 0$ donc $g = \text{id}_E$ convient.
$0, \dots, n-1 \Rightarrow n$: f est non surjectif donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $f_{|\text{Im}(f)}$. Soit $g_1 \in GL(\text{Im}(f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \text{Im}(f)$. Soit $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ avec $H = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, $H \oplus I = \text{Im}(f)$ et $H \oplus K = \text{Ker}(f)$. La restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur $\text{Im}(f)$, on note φ l'isomorphisme réciproque. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$g(h + i + k + \ell) = g_1(h + i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

On vérifie facilement que $f \circ g = 2g \circ f$ et il reste à prouver que g est injective. Si $x = h + i + k + \ell \in \text{Ker} g$ alors $g(f(x)) = g_1(f(i + \ell)) = 0$ donc $i + \ell \in \text{Ker} f = H \oplus K$ soit $i = \ell = 0$. Il reste $g_1(h) + k = 0$ ce qui implique $h = k = 0$ car $g_1(h) \in \text{Im} f = H \oplus I$.
Remarque : la démonstration passe à tout corps de caractéristique différente de 2.

Correction de l'exercice 3585 ▲

1. $A^{2k} = I$, $A^{2k+1} = A$.

Correction de l'exercice 3586 ▲

3. $\alpha_n = -\frac{1}{3} + \frac{2^n}{4} + \frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4}$, $\gamma_n = \frac{4}{3} - \frac{2^n}{2} + \frac{(-2)^n}{6}$.

Correction de l'exercice 3587 ▲

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
$2u_n = (6 - 6.2^n + 2.3^n)u_0 + (-5 + 8.2^n - 3.3^n)u_1 + (1 - 2.2^n + 3^n)u_2$.

Correction de l'exercice 3588 ▲

1. Le polynôme minimal de f est de degré supérieur ou égal à n et n'a pas de diviseurs non triviaux. Donc $\dim E = 1$ et f est une homothétie si $K = (x^2 + 1)$. Si $K = \mathbb{R}$ on peut aussi avoir $\dim E = 2$ et f n'a pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 3589 ▲

1. Diagonaliser ${}^tM \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cste}$.
2. $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$ donc si $y_0 \neq x_0$ alors $M_n \to \infty$ sinon la suite est constante.
3. $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Correction de l'exercice 3591 ▲

2. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou l'inverse.

Correction de l'exercice 3592 ▲

$M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1/5 & \pm 2 & 0 \\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 & 0 \\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3593 ▲

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On prend $B = PMP^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3594 ▲

3 valeurs propres distinctes, M est diagonalisable et son commutant est l'ensemble des polynômes en M : $aI + bM + cM^2$, $a, b, c \in K$.

Correction de l'exercice 3595 ▲

1. Par similitude on se ramène aux cas : $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathscr{M}_2((x^2+1)^{)}$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = (x^2+1)^{[}A]$ ou $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = (x^2+1)^{[}A]$.
2. Si A est diagonalisable de valeurs propres λ_i avec les multiplicités n_i alors $\dim(C(A)) = \sum n_i^2 \geqslant n$. Dans le cas général, soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A et $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ une suite de n-uplets de matrices commutant avec A_k telles que $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ est une famille orthonormale pour un produit scalaire quelconque choisi sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)}$. Par compacité il existe une sous-suite convergente, donc n matrices C_∞^i formant une famille orthonormale et commutant avec A d'où $\dim(C(A)) \geqslant n$.

Correction de l'exercice 3596 ▲

Soit $d_n(i, j)$ le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j. j admet trois voisins k_1, k_2, k_3 et l'on a : $d_n(i, j) = d_{n-1}(i, k_1) + d_{n-1}(i, k_2) + d_{n-1}(i, k_3)$. On numérote les sommets de 0 à 7 de sorte que les voisins du sommet i sont les sommets $i+1 \bmod 8$, $i+2 \bmod 8$ et $i+4 \bmod 8$. Le vecteur $d_n = (d_n(0,0), \dots, d_n(0,7))$ vérifie la relation de récurrence $d_n = Ad_{n-1}$ où A est la matrice suivante (. désigne 0) :

$$A = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} B+I_4 & 0 \\ 0 & B-I_4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B \pm I_4 = \begin{pmatrix} C \pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C \pm I_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C \pm I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & C \pm I_2 - I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et enfin,

$$C \pm I_2 \pm I_2 = \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1 \pm I_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 + I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1 \pm I_1 - I_1 \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres $-3, -1, 1, 3$ et on peut certainement terminer les calculs pour obtenir $d_n = A^n d_0$.

Correction de l'exercice 3597 ▲

1.
2. Par récurrence pour $P = X^k$, puis par linéarité.
3. $A = 0$.

Correction de l'exercice 3598 ▲

S'inspirer du cas $n = 1$. Soit $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donc A aussi.

Correction de l'exercice 3599 ▲

$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tq } AY = \lambda^2 Y \right\}$.

Correction de l'exercice 3601 ▲

Calcul du polynôme caractéristique de B par opérations en blocs. On obtient

$$\chi_B(x) = \det(x^2 I - 2xA - A^2) = (-1)^n \chi_A\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right) \chi_A\left(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\right)$$

donc

$$\mathrm{Spec}(B) = \{(1+\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \cup \{(1-\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

Correction de l'exercice 3602 ▲

En prenant $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a^2 - ab & ab - b^2 & 0 & 0 \\ ab - b^2 & a^2 - ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + ab & b^2 + ab \\ 0 & 0 & b^2 + ab & a^2 + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.

En prenant $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P_1^{-1} M_1 P_1 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1} M_2 P_1 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Spec} A = \{(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)\}$, donc l'ensemble cherché est la boule unité ouverte pour $\| \ \|_1$.

Correction de l'exercice 3605 ▲

Si $P(0) \neq 0$ alors f est bijective. Si $P(0) = 0$ alors $f^2 \circ \text{qqch} = -P'(0) f \Rightarrow \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.

Correction de l'exercice 3607 ▲

Soit μ le polynôme minimal de u et $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de μ. Pour $P \in K[X]$ et $d = P \wedge \mu$ on a facilement $\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(d(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u)) = \mathrm{Im}(d(u))$. Ceci montre déjà que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{I}$ sont finis.

De plus, si $d \in \mathscr{D}$ alors l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Im}(d(u))}$ est μ/d donc l'application $d \mapsto \mathrm{Im}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{I}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D})$. De même, l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Ker}(d(u))}$ est d car $\mathrm{Ker}(d(u)) \supset \mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ et d est l'annulateur minimal de $u_{|\mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))}$ donc l'application $d \mapsto \mathrm{Ker}(d(u))$ est injective sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{K}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 3608 ▲

En appliquant le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Ker}f^2}$, on a : $\dim(\mathrm{Ker}f^2) = \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(f(\mathrm{Ker}f^2))$, et $f(\mathrm{Ker}f^2) \subset \mathrm{Ker}f$, donc $f(\mathrm{Ker}f^2) = \mathrm{Ker}f$. Soit $G_i = \mathrm{Ker}g^i$. Montrons que $g(G_{i+1}) = G_i$ pour tout $i \in [[0,k]]$: si $x \in G_{i+1}$ alors $g^i(g(x)) = g^{i+1}(x) = 0$ donc $g(x) \in G_i$. Réciproquement, si $y \in G_i$ alors $y \in G_k = f(G_{2k})$, donc y a un antécédant x par f, cet antécédant appartient à G_{i+k}, et $y = g(g^{k-1}(x)) \in g(G_{i+1})$. On en déduit, avec le théorème du rang appliqué à $g_{|G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\mathrm{Ker}g)$ pour tout $i \in [[0,k]]$, d'où $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k\dim(\mathrm{Ker}g) = k\dim(\mathrm{Ker}g)$.

Correction de l'exercice 3612 ▲

1. Valeurs propres : $1, j, j^2$. sev stables : $\{\vec{0}\}$, $\mathrm{vect}\{\vec{e}_3\}$, $\mathrm{vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\mathbb{R}^3$.
2. $\left.\begin{array}{l} AB = BA \quad \Rightarrow \phi_B(\vec{e}_3) = \lambda\vec{e}_3 \\ {}^tA{}^tB = {}^tB{}^tA \Rightarrow \phi_{{}^tB}(\vec{e}_3) = \lambda\vec{e}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a+\mu & a & 0 \\ -3a & -2a+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3614 ▲

Soit $\varphi(x,y,z) = x + 2y + 3z$. f conserve la surface de niveau $\varphi = 1$ donc par linéarité $f \circ \varphi = \varphi$ et φ est vecteur propre de ${}^tf$.

Correction de l'exercice 3617 ▲

Si χ_u est irréductible, pour $x \neq 0$ le polynôme minimal de x en u est égal à χ_u donc le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E et il n'y a pas de sous-espace stable non trivial.
Si seuls $\{0\}$ et E sont stables, soit $x \neq 0$. Le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E donc l'annulateur minimal de u en x est égal à χ_u. Soit P un diviseur non trivial de χ_u et $y = P(u)(x)$: l'annulateur minimal de u en y est χ_u/P, absurde.

Correction de l'exercice 3618 ▲

Soit F un hyperplan de E, $<e>$ un supplémentaire stable et H un supplémentaire de $<e>$ stable. Si K est un sev de H, alors K admet un supplémentaire K' dans E stable et $H \cap K'$ est un sev de H stable, en somme directe avec K. $K' \not\subset H$ car $K \subset H$ et $K \oplus K' = E$ donc $K' + H = E$ et $\dim(H \cap K') = \dim(H) + \dim(K') - \dim(E) = \dim(H) - \dim(K)$ soit $K \oplus (H \cap K') = H$. $f_{|H}$ vérifie la même propriété que f et on obtient par récurrence que f est diagonalisable.
Réciproquement, soit f diagonalisable, F un sev de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre pour f. On montre que F admet un supplémentaire stable par récurrence sur $\mathrm{codim}(F)$: si $F = E$ alors $\{0\}$ convient et si $F \neq E$ alors il existe i tel que $e_i \notin F$ d'où $F \oplus <e_i>$ est un sur-espace strict de F, admettant un supplémentaire G stable, d'où $G \oplus <e_i>$ est supplémentaire de F stable.

Correction de l'exercice 3619 ▲

$\mathrm{Spec}(f) = \{0,1,2\}$ donc f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Comme la restriction d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, les sous-espaces stables par f sont les huit sous-sommes de $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

Correction de l'exercice 3622 ▲

0 est valeur propre, se placer dans un hyperplan stable et récurer.

Correction de l'exercice 3623 ▲

Non. Prendre $\mathrm{mat}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3624 ▲

Trigonaliser fortement M.

Correction de l'exercice 3626 ▲

1.
2. $((-2,0,1),\ (0,3,-2),\ (1,-2,1))$.

Correction de l'exercice 3627 ▲

Base ssi n est impair, $2\vec{e}_1 = (1,1,-1,1,-1,\dots,1,-1)$ et les autres vecteurs s'obtiennent par rotation : $2\vec{e}_2 = (-1,1,1,-1,1,-1,\dots,1)$.

Correction de l'exercice 3629 ▲

2. $\phi_i^* = (1-2d_i(X-x_i))P_i^2$, $\psi_i^* = (X-x_i)P_i^2$.

Correction de l'exercice 3630 ▲

2. $\frac{1}{8}(9-15X^2,\ 75X-105X^3,\ -15+45X^2,\ -105X+175X^3)$.

Correction de l'exercice 3631 ▲

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & b & c & (b^2-a^2)/2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (b^3-a^3)/3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = (b-a)^4(c-a)(c-b)\frac{2c-a-b}{12}$, donc la famille est libre si et seulement si $c \neq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 3632 ▲

2. terme dominant $\Rightarrow P_n^*(Q_i) = 1$, donc $P_n^* = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{Q_i(i)} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3. $P_k^* = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}f_i}{i!\,(k-i)!}$.

Correction de l'exercice 3633 ▲

2. $P_0^* = \frac{f_a}{(b-a)^2}$, $P_1^* = \frac{f_a+f_b-4f_c}{(b-a)^2}$, $P_2^* = \frac{f_b}{(b-a)^2}$.

Correction de l'exercice 3639 ▲

1. $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3. $(\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'})$ où A', B', C' sont les milieux du triangle ABC.

5. $\int\int_T f(x,y)\,dxdy = \frac{f(A')+f(B')+f(C')}{6}$.

Correction de l'exercice 3640 ▲

3. Rmq : coefficients de Fourrier : $\alpha_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\cos(pa_k)$ et $\beta_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\sin(pa_k)$.

Correction de l'exercice 3642 ▲

2. $\left(\frac{\varphi^{n-1}-\bar{\varphi}^{n-1}}{\varphi-\bar{\varphi}}, \frac{\varphi^{n}-\bar{\varphi}^{n}}{\varphi-\bar{\varphi}}\right)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 3650 ▲

$\vec{e}_i \leftrightarrow \vec{e}_j$: $e_i^* \leftrightarrow e_j^*$.
$\vec{e}_i \leftarrow \alpha\vec{e}_i$: $e_i^* \leftarrow e_i^*/\alpha$.
$\vec{e}_i \leftarrow \vec{e}_i + \alpha\vec{e}_j$: $e_j^* \leftarrow e_j^* - \alpha e_i^*$.

Correction de l'exercice 3659 ▲

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simmultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geqslant 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commnue sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.

Correction de l'exercice 3660 ▲

1. $a > 0, b = c, d > 0, ad - bc > 0$.
2. $a - b > 0$ et $a + (n-1)b > 0$.
3.

Correction de l'exercice 3661 ▲

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2-1)\sqrt{\frac{5}{8}} + (5X^3-3X)\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

Correction de l'exercice 3662 ▲

$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 3663 ▲

1.
2. Élever au carré.
3. (a) $(\vec{x} \mid \vec{u}) = 1 \Leftrightarrow (i(\vec{x}) \mid \vec{u} - i(\vec{x})) = 0$: sphère passant par $\vec{0}$.
   (b) Hyperplan ne passant pas par $\vec{0}$.
   (c) $\|\vec{x} - \vec{a}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2 - R^2}\right\|^2 = \frac{R^2}{(\|\vec{a}\|^2 - R^2)^2}$: sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

Correction de l'exercice 3664 ▲

1. Élever au carré.
2.

Correction de l'exercice 3665 ▲

1.
2. $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Correction de l'exercice 3666 ▲

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)\right)$
2. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\sqrt{\frac{7}{10}}$.

Correction de l'exercice 3667 ▲

$\frac{1}{\Sigma a_i^2}\Big(I-(a_ia_j)\Big)$.

Correction de l'exercice 3671 ▲

Si $p\circ q = q\circ p$: Soient $x\in(\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)^{\perp}\cap\operatorname{Im}p$ et $y\in(\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)^{\perp}\cap\operatorname{Im}q$.
Alors $p\circ q(x) = q(x)\in\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q$, donc $(q(x)\mid y) = (x\mid y) = 0$. Si $A = (\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)^{\perp}\cap\operatorname{Im}p$ et $B = (\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)^{\perp}\cap\operatorname{Im}q$ sont orthogonaux : Alors $\operatorname{Im}p = (\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)\overset{\perp}{\oplus}A$, $\operatorname{Im}q = (\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)\overset{\perp}{\oplus}B$, et $E = (\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q)\overset{\perp}{\oplus}A\overset{\perp}{\oplus}B\overset{\perp}{\oplus}(\operatorname{Im}p^{\perp}\cap\operatorname{Im}q^{\perp})$. Par décomposition, on obtient $p\circ q = q\circ p =$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q$.

Correction de l'exercice 3672 ▲

1. $\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_j\mid\vec{e}_i)^2 = 1 \Rightarrow$ famille orthonormée et $\operatorname{vect}(\vec{e}_i)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.
2.

Correction de l'exercice 3675 ▲

sphère de centre $-\frac{\gamma\vec{a}}{\beta\|\vec{a}\|^2}$.

Correction de l'exercice 3679 ▲

Soit X la matrice de $\vec{e}_n$ dans $\mathscr{B}$. On a $GX = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda\end{pmatrix}$ et ${}^tXGX = \lambda x_p = 1$. On applique alors les formules de Cramer.

Correction de l'exercice 3681 ▲

Non, $\|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\|^2 < 0$.

Correction de l'exercice 3683 ▲

1.
2.
3. $\int_{t=0}^{1} t^k t^x\,dt = \frac{1}{k+x+1}$.
4. Φ a pour pôles au plus simples $-1,-2,\dots,-n-1$ et pour racines $0,1,\dots,n-1$. Comme $\Phi(x)\to 0$ lorsque $x\to\infty$, on a donc $\Phi(x) = \lambda\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.

5. $a_k =$ résidu de Φ en $-k-1 = (-1)^{n+k}\lambda\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}$.
6.

Correction de l'exercice 3684 ▲

$x^2+(x+y)^2+(x+2y)^2 = (\sqrt{3}(x-y))^2+(\sqrt{2}y)^2$.

Correction de l'exercice 3687 ▲

$f \in F^{\perp} \Rightarrow xf \perp f$.

Correction de l'exercice 3688 ▲

1.
2. $30X^2-36X+9$.

Correction de l'exercice 3689 ▲

$P_a(t) = \frac{3}{8}(3-5t^2-5a^2+15a^2t^2)+\frac{5at}{8}(15-21t^2-21a^2+35a^2t^2)$,
$8\|P_a\|^2 = 9+45a^2-165a^4+175a^6$ est maximal pour $a=\pm 1 \Rightarrow \|P_a\| = 2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3690 ▲

1.
2. $\pi(f)(t) = f(0)\frac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)}+f(1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$.
3. L'inf est atteint pour la fonction $f \in W$ telle que $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$, soit $f(t)=\alpha\frac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)}+\beta\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$ et $inf = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\mathrm{ch}(1)-2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}$.

Correction de l'exercice 3691 ▲

1. Le sous-espace vectoriel engendré a un orthogonal nul.
2. N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).
3. $1 = \|y_i\|^2 = \|y_i\|^4+\sum_{j\neq i}(y_i \mid y_j)^2 \Rightarrow \forall\, j \neq i,\ (y_i \mid y_j) = 0$.
4. Par polarisation on a : $\forall\, x,y,\ \sum_{j\in I}(x \mid y_j)(y \mid y_j) = A(x \mid y)$ donc $\sum_{j\in I}(x \mid y_j)y_j - Ax \in E^{\perp}$.

Correction de l'exercice 3692 ▲

Soient $x \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ et $y = u(z)-z \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$. On a $y = u(z+\lambda x)-(z+\lambda x)$ d'où :

$$\|z+\lambda x\|^2 \geqslant \|u(z+\lambda x)\|^2 = \|z+\lambda x\|^2+2\lambda(x \mid y)+2(z \mid y)+\|y\|^2.$$

En faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $(x \mid y) = 0$ et on conclut avec le théorème du rang.

Correction de l'exercice 3693 ▲

f linéaire et $f = x \mapsto \|x\|^2$ conviennent et l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f vérifiant la propriété est stable par combinaison linéaire donc toute fonction de la forme $x \mapsto \ell(x)+a\|x\|^2$ avec $\ell \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$ convient. On montre que ce sont les seules : Soit $f \in \mathscr{E}$ l'on décompose en sa partie paire f_p et sa partie impaire f_i. Alors $f_p, f_i \in \mathscr{E}$.
Soient $x,y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $x \perp y$. On a $f_i(x\pm y) = f_i(x)\pm f_i(y)$ et $f_i(2x) = f_i(x+y)+f_i(x-y) = 2f_i(x)$. Ensuite, $f_i(2x)+f_i(x)-f_i(y) = f_i(2x+y)+f_i(x-2y) = f_i(3x-y) = f_i(3x)-f_i(y)$ d'où $f_i(3x) = 3f_i(x)$ et de proche en proche $f_i(kx) = kf_i(x)$ pour $k \in |||$ puis pour $k \in \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ successivement vu la continuité de f.

En prenant une base $(e_1,\dots,e_n)$ orthonormale on a $f(x_1e_1+\dots+x_ne_n)=x_1f(e_1)+\dots+x_nf(e_n)$ pour tous $x_1,\dots,x_n$ réels donc f_i est linéaire.
Soient à présent $x,y\in E$ avec $\|x\|=\|y\|$ alors $f_p(x+y)+f_p(x-y)=f(2x)$ et $f_p(x+y)+f_p(y-x)=f_p(2y)$ d'où $f_p(2x)=f_p(2y)$. Ainsi f_p est constante sur les sphères de centre 0. On écrit $f_p(x)=\varphi(\|x\|^2)$ avec $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ prolongée à $\mathbb{R}$ par imparité ($f_p(0)=0$ de manière évidente) et on a $\varphi(a^2+b^2)=f_p(ae_1+be_2)=f_p(ae_1)+f_p(be_2)=\varphi(a^2)+\varphi(b^2)$ d'où l'on conclut que φ est linéaire.

Correction de l'exercice 3695 ▲

$\vec{x}=-\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}+\lambda\vec{a}$.

Correction de l'exercice 3696 ▲

$$p=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\wedge\vec{v}=p\vec{b}\\ \vec{v}\wedge\vec{w}=p\vec{c}\\ \vec{w}\wedge\vec{u}=p\vec{a}\end{cases}\quad\text{et } [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=p^2.$$

si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]<0$: pas de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})>1$: pas de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et $\mathrm{rg}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\leqslant 1$: une infinité de solutions.
si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]>0$: 2 solutions.

Correction de l'exercice 3697 ▲

3. $G=\mathrm{tr}(F)I-{}^tF$.

Correction de l'exercice 3699 ▲

$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$
$=abc\sqrt{(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)}$.

Correction de l'exercice 3701 ▲

1. $f(\vec{x})=(\vec{x}|\vec{u})\vec{u}+\cos\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})\wedge\vec{u}+\sin\alpha(\vec{u}\wedge\vec{x})$.
2. $M=(\cos\alpha)I+(1-\cos\alpha)\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}+\sin\alpha\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3703 ▲

Pour $f,g\in\mathscr{O}^+(\mathbb{R}^3)$, f et g ont la même matrice réduite dans une base orthonormée convenable, donc sont conjugués dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$. h n'est pas toujours positif car les bases peuvent ne pas avoir même orientation (ex : deux rotations inverses). Pour $f,g\in\mathscr{O}^-(\mathbb{R}^3)$, considérer $-f$, $-g$.

Correction de l'exercice 3704 ▲

3. $\pi/2,\pi/2,\pi$
$-\pi/2,\alpha,\pi/2$.

Correction de l'exercice 3706 ▲

1.
2. matrice dans une *bond*.
3. $f=2(h+\mathrm{id})^{-1}-\mathrm{id}$.

Correction de l’exercice 3707 ▲

1. $f(\vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{x}$ avec $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$.
2. $\vec{y} = \frac{\vec{x}+(\vec{u}|\vec{x})\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{x}}{1+\|\vec{u}\|^2}$.
3. axe dirigé par $\vec{u}$, $\cos\theta = \frac{1-\|\vec{u}\|^2}{1+\|\vec{u}\|^2}$, $\sin\theta = \frac{-2\|\vec{u}\|}{1+\|\vec{u}\|^2}$.

Correction de l’exercice 3708 ▲

1.
2. $g(\vec{x}) = (\cos\alpha)\vec{x} + (1-\cos\alpha)\frac{(\vec{a}|\vec{x})\vec{a}}{\alpha^2} + \frac{\sin\alpha(\vec{a}\wedge\vec{x})}{\alpha}$.

Correction de l’exercice 3709 ▲

1. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Rotation autour de $(1,1,1)$ d’angle $\arccos(\frac{11}{14})$.

Correction de l’exercice 3710 ▲

Les conditions ${}^tMM = I$ et $\det(M) = 1$ équivalent à : $a+b+c = 1$ et $ab+ac+bc = 0$ d’où le polynôme P. P a trois racines réelles si et seulement si $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{4}{27}$(étude de la fonction associée).

Correction de l’exercice 3711 ▲

1. rotation autour de $(1,0,1)$ d’angle $-\arccos(1/3)$.
2. rotation autour de $(-3,1,1)$ d’angle $-\arccos(7/18)$.
3. demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.
4. rotation autour de $(0,1,1)$ d’angle $2\pi/3$.
5. rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d’angle $\arccos(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.
6. symétrie par rapport à $x = y+z$.
7. symétrie par rapport à $3x = 2y-z$.
8. symétrie par rapport à $x+2y-z = 0$.
9. symétrie-rotation autour de $(1,-3,1)$ d’angle $-\arccos(5/6)$.
10. symétrie-rotation autour de $(1,-1,0)$ d’angle $\pi/3$.
11. projection sur $2x+2y+z = 0$ puis rotation d’angle $\arccos(3/5)$.

Correction de l’exercice 3712 ▲

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Correction de l’exercice 3713 ▲

1. Oui ssi $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant 1$.

2. Non, disc $= -1$.
3. Oui, $= \frac{5x^2}{12} + 3\left(y+\frac{x}{3}\right)^2 + 4z^2 + \left(t+\frac{x}{2}\right)^2$.

Correction de l'exercice 3714 ▲

$\mathrm{Spec}(A) = \{6,3,3\} \Rightarrow$ oui.

Correction de l'exercice 3715 ▲

$(n-1,0)$.

Correction de l'exercice 3717 ▲

Récurrence, $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i<k} \frac{i+1}{2i} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant k} x_i^2 + \frac{1}{2k}\left(\sum_{i\geqslant k} x_i\right)^2$.

Correction de l'exercice 3720 ▲

1.
2.
3. Si $a \in \mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = E$.
   Si $a \notin \mathrm{Ker} f$ et $q(a) = 0$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = a^{\perp}$.
   Si $q(a) \neq 0$, $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi} = \mathrm{Ker}(f) \oplus < a >$.

Correction de l'exercice 3723 ▲

1.
2. $(d-1,0)$ ou $(d,0)$.

Correction de l'exercice 3724 ▲

Récurrence sur n.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n} \alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$. Alors A a mêmes mineurs principaux que la matrice de q dans la base $(e_1,\dots,e_{n-1},u_n)$.

Correction de l'exercice 3725 ▲

Pour A à diagonale fortement dominante, récurrence sur n.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n} \alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1,\dots,e_{n-1}$ et il faut montrer que $q(u_n) > 0$ ce qui résulte de $|\alpha_i| \leqslant 1$ en considérant la i-ème ligne de A.

Correction de l'exercice 3726 ▲

1.
2.
3. $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

Correction de l'exercice 3728 ▲

1. Il n'y a pas de solution pour $n = 2$ donc pas non plus pour $n > 2$.

2. Pour $n=3$ on trouve $A={}^tCC$ où C est une colonne sans zéros, pour $n\geqslant 3$ on obtient le même résultat en considérant les blocs 3×3 centrés sur la diagonale.

Correction de l'exercice 3729 ▲

Soit P orthogonale diagonalisant S : ${}^tPSP=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $Y={}^tPX$.

On a : $q(X)=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dots & y_n \\ y_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & \lambda_n \end{vmatrix} = -\lambda_1\dots\lambda_n\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1}+\dots+\frac{y_n^2}{\lambda_n}\right).$

Correction de l'exercice 3730 ▲

Pour $a=0$, q est définie positive. Pour $a\neq 0$ prendre une base orthonormale commençant par a ; la matrice de q dans cette base est $\mathrm{Diag}(\alpha+\beta\|a\|^2,\alpha,\dots,\alpha)$.

Correction de l'exercice 3731 ▲

Soit (E_{ij}) la base canonique de $\mathscr{M}_2((x^2+1)^)$: $E_{12}^2=0$ donc $q(E_{12})=0$ et si A est une matrice quelconque de rang 1, A est équivalente à E_{12} d'où $q(A)=0$. Si $A=0$ on a aussi $q(A)=0$ et si A est inversible alors toute matrice est multiple de A donc $q(A)\neq 0$, en particulier $q(I)=1$ car $q^2(I)=q(I)$. On en déduit $q(A)=0 \Leftrightarrow \det(A)=0$.
Pour A quelconque, les applications : $z\mapsto \det(A-zI)$ et $z\mapsto q(A-zI)$ sont polynomiales de degré 2, avec le même coefficient de z^2 et les mêmes racines, donc sont égales d'où $q=\det$.
Remarque : le même raisonnement est applicable sur un corps quelconque en se limitant aux matrices triangulaires, et toute matrice est produit de triangulaires (algorithme du pivot de Gauss).

Correction de l'exercice 3732 ▲

Quitte à remplacer E par $\mathrm{vect}(x_1,\dots,y_n)$, on peut supposer E de dimension finie p. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et X,Y et F les matrices de $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)$ et ϕ dans $\mathscr{B}$. On doit prouver $\det({}^tXFY)^2\leqslant\det({}^tXFX)\det({}^tYFY)$.
Comme F est symétrique positive, elle est de la forme $F={}^tMM$ pour une certaine matrice carrée M, donc en remplaçant X et Y par MX et MY, il suffit de prouver $\det({}^tXY)^2\leqslant\det({}^tXX)\det({}^tYY)$ pour toutes matrices X,Y réelles rectangulaires de même taille.
En projetant chaque colonne de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de X, on peut décomposer $Y=XA+B$ où A est une matrice carrée et B une matrice rectangulaire de même taille que X telle que ${}^tXB=0$. Il reste à prouver : $\det({}^tXXA)^2\leqslant\det({}^tXX)\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$, soit : $\det({}^tA{}^tXXA)\leqslant\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$.
On pose $U={}^tA{}^tXXA$ et $V={}^tBB$: U et V sont des matrices réelles symétriques positives de même taille, à priori quelquonques. Si U est inversible, on écrit $U={}^tPP$ avec P inversible et on est rammené à prouver que $1\leqslant\det(I+{}^tP^{-1}VP^{-1})=\det(I+W)$, avec W symétrique positive, ce qui résulte du fait que toutes les valeurs propres de $I+W$ sont supérieures ou égales à 1. Si U n'est pas inversible, on remplace U par $U+\varepsilon I$ avec $\varepsilon>0$, puis on fait tendre ε vers 0^+.
Remarque : il y a peut-être plus simple ?

Correction de l'exercice 3735 ▲

$\lambda=0$, $f=\mathrm{id}_E$ et $\lambda=-\frac{2}{\|\vec v\|^2}$, $f=$ la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(\vec v)$.

Correction de l'exercice 3740 ▲

$\varphi(A)=\mathrm{tr}(A{}^tA)$ donc pour toute matrice P telle que $P{}^tP$ soit scalaire (non nulle) on a $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$. Ces matrices sont les matrices de la forme $P=\lambda M$ avec M orthogonale (matrices de similitude).
Réciproquement, soit P telle que $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$ et $Q=P{}^tP$.
On a par polarisation : $\forall\, A,B,\ \mathrm{tr}(AQ{}^tB{}^tQ^{-1})=\mathrm{tr}(A{}^tB)$ donc pour $B=QC$: $\forall\, A,C\ \mathrm{tr}(AQ{}^tC)=\mathrm{tr}(A{}^tCQ)$ ce qui implique : $\forall\, C,\ Q{}^tC={}^tCQ$ et donc que Q est scalaire.

Correction de l'exercice 3750 ▲

1.
2. On raisonne par récurrence sur $d = \dim(F) = \dim(G)$. Pour $d = 0$ il n'y a rien à prouver.
   Pour $d \geqslant 1$ on considère $a \in F$ et $b \in G$ unitaires tels que $(a \mid b)$ soit maximal. Soient F_1 l'orthogonal de a dans F et G_1 l'orthogonal de b dans G (sous-espaces vectoriels de dimensions égales à $d-1$). Le choix de a,b fait que F_1 est orthogonal à b et G_1 est orthogonal à a, donc F_1 et G_1 sont tous deux inclus dans l'orthogonal de $\text{vect}(a,b)$. On peut trouver un endomorphisme de cet orthogonal qui échange F_1 et G_1, que l'on complète par la symétrie orthogonale dans $\text{vect}(a,b)$ qui échange a et b.

Correction de l'exercice 3751 ▲

1.
2.
3. oui pour ϕ_P.
   Pour $\psi_P : \forall A,B,\ \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \text{tr}(P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
   Donc $P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc P^tP est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Correction de l'exercice 3752 ▲

$A = 0$ ou $A \in \mathscr{O}^+(n)$.

Correction de l'exercice 3753 ▲

1. $A = P - I$, $P \in \mathscr{O}(n)$.
2. Hadamard.

Correction de l'exercice 3755 ▲

1.
2. Tout $f \in G$ vérifie $\det(f) \in \{-1,1\}$. Réciproquement, soit $f \in U(E)$ tq $\det(f) \in \{-1,1\}$ et $F = \text{Ker}(f - \text{id})$. On montre que f est composée de réflexions par récurrence sur $p = \text{codim}F$.
   $p = 0 \Rightarrow f = \text{id}$. $p = 1 \Rightarrow f$ est une réflexion car F est un hyperplan et $F^\perp$ est stable par f.
   $0,\dots,p-1 \Rightarrow p$: soit $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E telle que $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est une BON de F et e_1 est vecteur propre de f. Soit $e'_1 = f(e_1) = \lambda e_1$, et σ,σ' deux réflexions telles que $\sigma(e_1) = e_2$ et $\sigma'(e_2) = e'_1$. Alors $g = \sigma\circ\sigma'\circ f \in U(E)$, $\det(g) = \det(f) \in \{-1,1\}$ et $\text{codim}(\text{Ker}(g - \text{id})) < p$ donc g est composée de réflexions et f aussi.

Correction de l'exercice 3759 ▲

$f = \text{id} - r$ où $r(x_1,\dots,x_n) = (x_n,x_1,\dots,x_{n-1})$. Donc $f^*\circ f = 2\text{id} - r - r^{-1}$ a pour valeurs propres les nombres $2 - 2\cos(2k\pi/n)$, $k \in [[0,2n-1]]$ et $\|f\| = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\cos(\pi/2n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Correction de l'exercice 3760 ▲

Oui. Pour $n = 1$ il y a égalité. Pour $n = 2$ cela résulte de la densité de $\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$ (démonstration ci-dessous). Pour n quelconque, il suffit de voir qu'une réflexion quelconque est limite de réflexions à coefficients rationnels (approcher un vecteur non nul normal à l'hyperplan de réflexion par une suite de vecteurs rationnels).

Densité de $\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$: pour $p\in |||^*$ on considère $z_p=\frac{(p^2-1)+2ip}{p^2+1}$. On a $z_p\in\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i]$ et $z_p\to 1$ lorsque $p\to\infty$. Si $z\in\mathbb{U}$ alors $d(z,\mathbb{U}\cap\mathbb{Q}[i])\leqslant d(z,\{z_p^k,\ k\in\mathbb{Z}\})\leqslant\frac{1}{2}|1-z_p|$.

Correction de l'exercice 3761 ▲

${}^tAA=I\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$. Dans ce cas $\det(A)=\mathrm{tr}(A)=1$ donc f est un quart de tour. L'axe du quart de tour est engendré par $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3766 ▲

1. $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{Diag}(3\ 6\ 9)$.
2. $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{Diag}(3\ 3\ 2)$.

Correction de l'exercice 3767 ▲

Si tous les a_i sont nuls, $M=0$.
Sinon, $M=C{}^tC\Rightarrow E_0=C^\perp$ et $E_\nu=\mathrm{vect}(C)$ avec $\nu=\|C\|^2$.

Correction de l'exercice 3768 ▲

$$M=5\begin{pmatrix}\frac12&0&0&\frac12\\0&\frac12&\frac12&0\\0&\frac12&\frac12&0\\\frac12&0&0&\frac12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac12&0&0&-\frac12\\0&\frac12&-\frac12&0\\0&-\frac12&\frac12&0\\-\frac12&0&0&\frac12\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3769 ▲

1.
2. u est autoadjoint pour $<,>$.
3. $P_0=1$, $P_2=x$, $P_6=3x^2-1$, $P_{12}=5x^3-3x$.

Correction de l'exercice 3770 ▲

1.
2.
3. $\lambda_k=k(k+1)$.

Correction de l'exercice 3773 ▲

1.
2.
3. $(p\circ q)_{|\mathrm{Im}\,p}=(p\circ q\circ p)_{|\mathrm{Im}\,p}$ est diagonalisable et $(p\circ q)_{|\mathrm{Ker}q+(\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Im}q)}=0$ donc tout vecteur de E est somme de vecteurs propres pour $p\circ q$.

Correction de l'exercice 3778 ▲

1.
2. Récurrence : pour $n = 1$ c'est évident.
   $n-1 \to n : A = \begin{pmatrix} A' & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A' = {}^tB'B'$.
   On cherche $B = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & x \end{pmatrix}$ d'où : $X' = {}^tB'^{-1}C'$ et $x^2 = \alpha - {}^tX'X' = \frac{\det A}{\det A'} > 0$.

Correction de l'exercice 3782 ▲

1. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base propre pour u. On prend $\vec{x} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n$.
2. On norme $\vec{x}$ et on le complète en une base orthonormée. La matrice de u dans cette base est symétrique, de trace nulle, et la diagonale commence par 0. On termine par récurrence.

Correction de l'exercice 3784 ▲

$ABX = \lambda X \Rightarrow {}^tX{}^tBABX = \lambda{}^tXBX$.

Correction de l'exercice 3785 ▲

Se ramener au cas où A est diagonale.

Correction de l'exercice 3786 ▲

Il existe P inversible telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPB'P$ avec B' symétrique définie positive.
Alors $A + B = {}^tP(I + B')P$ et $\det(I + B') = \prod(1 + \beta_i) \geqslant 1 + \prod \beta_i \Rightarrow$ cqfd.

Correction de l'exercice 3787 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une BON fixée, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $\mathscr{B}'$ la BON cherchée et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On veut que ${}^tM'M'$ soit diagonale avec $M' = {}^tPMP$, cad ${}^tP{}^tMMP$ diagonale.

Correction de l'exercice 3790 ▲

Soit $(\vec{h}_i)$ une base diagonale pour h, $H_i = \mathrm{vect}\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_i\}$ et $(\vec{f}_i)$, F_i idem pour f.
Pour $\vec{x} \in F_k \cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k \|\vec{x}\|^2 + (\vec{x} \mid \vec{x}_0)^2 \leqslant (h(\vec{x}) \mid \vec{x}) + (\vec{x} \mid \vec{x}_0)^2 = (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leqslant \mu_k \|\vec{x}\|^2$.
Pour $\vec{x} \in H_{k+1} \cap F_{k-1}^{\perp} \cap \vec{x}_0^{\perp}$, $\mu_k \|\vec{x}\|^2 \leqslant (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) = (h(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leqslant \lambda_{k+1} \|\vec{x}\|^2$.

Correction de l'exercice 3791 ▲

1. Si $f(x) + f^*(x) = 0$ alors $f(x) \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} f^* = \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Ker} f)^{\perp} = \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Im} f)^{\perp}$ donc $f(x) = f^*(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} f^* = \mathrm{Ker} f \cap (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.
2. $f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.
   $f + f^* \in GL(E) \Rightarrow \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} f^* = \mathrm{Im} f + (\mathrm{Ker} f)^{\perp} = E \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \geqslant \dim \mathrm{Ker} f$.

Correction de l'exercice 3796 ▲

1. $((u - u^*)(x) \mid x) = 0$.
2. Orthodiagonaliser et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 3797 ▲

Soit $K = \sup\{\|u_0 + \dots + u_n\|\}$ et $x \in H$. On note $v_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n$ pour $p \leqslant q$. La série $\sum(u_n(x) \mid x)$ est convergente (termes positifs, sommes partielles majorées) donc elle vérifie le critère de Cauchy : $(v_{p,q}(x) \mid x) \to 0$ lorsque $p, q \to \infty$.

Comme $v_{p,q}$ est positif, il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(v_{p,q}(x) \mid y)|^2 \leqslant (v_{p,q}(x) \mid x)(v_{p,q}(y) \mid y) \leqslant 2K\|y\|^2(v_{p,q}(x) \mid x).$$

En particulier pour $y = v_{p,q}(x)$ on obtient : $\|v_{p,q}(x)\|^2 \leqslant 2K(v_{p,q}(x) \mid x)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy.
Remarque : exemple où $\sum u_n$ ne converge pas dans $\mathscr{L}_c(H)$: $H = \ell^2(|||)$ et $u_n =$ projection orthogonale sur $< e_n >$ où $e_n(p) = \delta_{n,p}$. $\sum u_n$ converge simplement et non uniformément vers l'identité.

Correction de l'exercice 3798 ▲

${}^tAA$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples. A annule le polynôme $P(X^3)$, donc est (x^2+1)-diagonalisable si 0 n'est pas racine de P ce que l'on peut imposer si A est inversible.
Si A n'est pas inversible, soit $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
On a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A^3) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A^3))$ et $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ donc $AQ(A^3) = 0$ et A est encore (x^2+1)-diagonalisable.
Contre-exemple pour la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité : prendre une rotation d'angle $2\pi/3$ dans le plan.

Correction de l'exercice 3799 ▲

1. On se place dans une base propre pour u, soient U,V,W les matrices correspondantes avec $U = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. On doit donc résoudre $(\lambda_i+\lambda_j)W_{ij} = V_{ij}$ d'où l'existence, l'unicité et la symétrie de w.
2.
```
> A := matrix([[4,1,1],[1,4,-1],[1,-1,4]]); B := matrix([[0,0,-1],[0,0,1],[-1,1,3]]);
> eigenvals(A); eigenvects(A);
> P := transpose(matrix([[1, 0, 1], [1, 1, 0],[-1, 1, 1]]));
> A1 := evalm(P^(-1)&*A&*P); B1 := evalm(P^(-1)&*B&*P);
> C1 := matrix(3,3);
> for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do C1[i,j] := B1[i,j]/(A1[i,i]+A1[j,j]) od od;
> C := evalm(P&*C1&*P^(-1)); evalm(A&*C+C&*A-B);
```
$\Rightarrow C = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 11 & -11 & -33 \\ -11 & 11 & 33 \\ -33 & 33 & 69 \end{pmatrix}$.
3. Si v est défini positif : on a $(v(x) \mid x) = 2(u(x) \mid w(x))$ donc si λ est une valeur propre de w et x est un vecteur propre associé, on a $\lambda = \frac{(v(x)|x)}{2(u(x)|x)} > 0$ d'où w est défini positif.
Cas w défini positif et v non positif : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4x+4 \end{pmatrix}$ avec $0 < x < \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 3800 ▲

1. c'est un endomorphisme autoadjoint positif de déterminant 1.
2. $X^n \det\left(\frac{\mathrm{id}}{X} + s^* \circ s\right) = \det(\mathrm{id} + Xs^* \circ s) = \det(s^* \circ (\mathrm{id} + Xs^* \circ s) \circ s) = \det(s^* \circ s + X\mathrm{id})$.
3. $s^* \circ s$ est diagonalisable avec des valeurs propres (λ_i) réelles positives deux à deux inverses pour la même multiplicité. $P^2(1) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}(1+\lambda_i)\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)$ et $(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) \geqslant 4$ pour tout $x > 0$ avec égalité ssi $x = 1$.
Si $P(1) = 2^n$ alors toutes les valeurs propres de $s^* \circ s$ valent 1 et $s^* \circ s$ est diagonalisable donc $s^* \circ s = \mathrm{id}$ et s est une symétrie orthogonale. La réciproque est immédiate.
4. Se ramener au cas $A_4 = I$ puis calculer $\det A$ par pivotage.

Correction de l'exercice 3801 ▲

1. Que c'est un espace préhilbertien.
2. $g_x(t) = \min(t(1-x), x(1-t))$

3. On note $g_i = g_{x_i}$: $(g_1,\dots,g_n)$ est libre par considération des points anguleux, donc engendre un espace vectoriel G de dimension n. Soit $f \in P$: $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in G$ et $f_1 \in G^\perp$. Alors $\varphi(f) = \varphi(f_0) + \|f_1\|^2$ donc φ est minimale en f ssi $\varphi_{|G}$ est minimale en f_0 et $f_1 = 0$. Désormais on suppose $f_1 = 0$ et $f \in G$. L'application :
$$u : G \to \mathbb{R}^n, f \mapsto (f(x_1),\dots,f(x_n)) = ((f \mid g_1),\dots,(f \mid g_n))$$
est un isomorphisme linéaire. Soit v l'endormophisme autoadjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}^n, (t \mid v(t)) = \|u^{-1}(t)\|^2$.
On a donc en notant $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $\beta = (\mathrm{id}+v)^{-1}(\alpha)$:
$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(u^{-1}(t)) &= (t \mid v(t)) + (t-\alpha \mid t-\alpha)\\ &= (t \mid (\mathrm{id}+v)(t)) - 2(t \mid \alpha) + (\alpha \mid \alpha)\\ &= (t-\beta \mid (\mathrm{id}+v)(t-\beta)) + (\alpha \mid \alpha-\beta).\end{aligned}$$
$\mathrm{id}+v$ est autoadjoint défini positif donc le minimum de φ est atteint pour $f = u^{-1}(\beta)$ (solution unique) et vaut $(\alpha \mid \alpha-\beta)$.

Correction de l'exercice 3802 ▲

1. p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow$ p est un projecteur et $p = p^*$ $\Leftrightarrow$ p^* est un projecteur orthogonal.
2. p et p^* commutent donc $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par p et par p^*, d'où $p^*_{|\mathrm{Ker}\, p} = (p_{|\mathrm{Ker}\, p})^* = 0_{\mathrm{Ker}\, p}$ et $p^*_{|\mathrm{Im}\, p} = (p_{|\mathrm{Im}\, p})^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, p}$. Ainsi $p = p^*$ ce qui implique $\mathrm{Ker}\, p \perp \mathrm{Im}\, p$.

Correction de l'exercice 3803 ▲

1.
2. On a pour $f,g \in E$: $u \circ v(f) = g \Leftrightarrow g$ est $\mathscr{C}^2$, $g(0) = g'(1) = 0$ et $g'' = -f$. En particulier $u \circ v$ est injectif, 0 n'est pas valeur propre de $u \circ v$.
   Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$ on a $u \circ v(f) = \lambda f$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ avec $\alpha^2 = -\frac{1}{\lambda}$ et $a + b = a\alpha e^{\alpha} - b\alpha e^{-\alpha} = 0$. On obtient $f \neq 0$ en prenant $a \neq 0$, $b = -a$ et $\alpha = i\pi(\frac{1}{2}+k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{Spec}(u \circ v) = \left\{\frac{1}{\pi^2(\frac{1}{2}+k)^2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction de l'exercice 3804 ▲

1. $u_1 + \dots + u_p$ est l'endomorphisme autoadjoint associé à $q_1 + \dots + q_p$.
2. $\mathrm{Im}(u_1) + \dots + \mathrm{Im}(u_p) \supset \mathrm{Im}(u_1 + \dots + u_p) = E$ et la somme des dimensions est égale à $\dim E$ donc la somme des sous-espaces est directe.
3. On a $\mathrm{Ker}(u_1) = \{x \in E \text{ tq } x = u_2(x) + \dots + u_p(x)\} \subset \mathrm{Im}(u_2 + \dots + u_p) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$ et les deux termes extrêmes ont même dimension, d'où $\mathrm{Ker}(u_1) = \mathrm{Im}(u_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(u_p)$. Comme u_1 est autoadjoint, $\mathrm{Im}(u_1) \perp \mathrm{Ker}(u_1)$ ce qui prouve l'orthogonalité de la somme. De plus $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(u_j)$ pour $j \geqslant 1$ donc $q_1(x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$. En appliquant **1)** à $\mathrm{Im}(u_1)$ on obtient $u_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(u_1)$ ce qui prouve que u_1 est un projecteur, et c'est un projecteur orthogonal car autoadjoint.

Correction de l'exercice 3805 ▲

$A = P^{-1}DP \Rightarrow {}^tA = ({}^tPP)A(P^{-1\,t}P^{-1})$.
S définie positive $\Rightarrow \exists\ P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^tPP$, donc ${}^tA = SAS^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tPM\,{}^tP^{-1}$ avec $M = PAP^{-1}$, d'où ${}^tM = M$ est diagonale.

Correction de l'exercice 3806 ▲

Pour A symétrique réelle on a $\max(\mathrm{Sp}(A)) = \sup\{(x \mid Ax)/\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ donc f est la borne supérieure des fontions affines $t \mapsto ((x \mid Ax) + t(x \mid Bx))/\|x\|^2$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En tant que sup de fonctions convexes, c'est une fonction convexe.

Correction de l'exercice 3807 ▲

$M = X^tY - Y^tX$.
Soit $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $(I + aM)Z = 0$. Donc $Z \in \mathrm{vect}(X,Y) : Z = \lambda X + \mu Y$.
on remplace :

$$\begin{cases} (1 - a^tYX)\lambda & - & a^tYY\mu & = & 0 \\ a^tXX\lambda & + & (1 + a^tYX)\mu & = & 0 \end{cases}$$

CNS $\iff a^2({}^tXX\,{}^tYY - ({}^tXY)^2) + 1 \neq 0$.

Correction de l'exercice 3808 ▲

On a ${}^tAA - {}^tCC = I_n$.
Soit X tel que $AX = 0$. Donc ${}^tXX = -{}^t(CX)(CX)$, donc $X = 0$.

Correction de l'exercice 3809 ▲

$A^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$.

Correction de l'exercice 3810 ▲

trigonaliser A dans une base orthonormée.

Correction de l'exercice 3811 ▲

$h = f \circ f^* : h^2 = \mathrm{id}$ et $h \geqslant 0 \Rightarrow h = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 3813 ▲

$a = b = \pm c$.

Correction de l'exercice 3814 ▲

Ils sont égaux (décomposer A en symétrique + antisymétrique).

Correction de l'exercice 3815 ▲

1. $\mathrm{spec}(M) = \{j, j^2\} \Rightarrow$ on prend comme base orthonormale $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{2}{\sqrt{3}}(f(a) + \frac{1}{2}a) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
2. M est une matrice de rotation ssi $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ ou $M = \pm I$.
3. M est la matrice d'une application orthogonale ssi $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U}$ et M est (x^2+1)-diagonalisable (alors M est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de rotation).

Correction de l'exercice 3817 ▲

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Il existe P orthogonale de même taille que A telle que $D = {}^tPAP$ est diagonale positive.
   Alors $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ {}^tCP & B \end{pmatrix}$ est symétrique positive donc si $d_{ii} = 0$ alors la ligne i de ${}^tPC$ est nulle. Ainsi $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U' \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est, après renumérotation éventuelle des lignes et

colonnes, de la forme $U'' = \begin{pmatrix} D' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où D' est diagonale inversible et U' est semblable à U''. Enfin U'' est diagonalisable : $\begin{pmatrix} I & D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} U'' \begin{pmatrix} I & -D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3818 ▲

1. Si ${}^tUMV = D$ est diagonale alors ${}^tMM = VD^2{}^tV$. Inversement, comme ${}^tMM$ est symétrique définie positive, il existe D diagonale inversible et V orthogonale telles que ${}^tMM = VD^2{}^tV$. On pose $M = UD^tV$ ce qui définit U puisque D^tV est inversible et on a $VD^2{}^tV = {}^tMM = VD^tUUD^tV$ d'où ${}^tUU = I$.
2. M est limite de matrices M_k inversibles que l'on peut décomposer sous la forme $M_k = U_kD_k{}^tV_k$ avec U_k et V_k orthogonales et D_k diagonale. Comme $O(n)$ est compact on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que les suites (U_k) et (V_k) convergent vers U, V orthogonales d'où ${}^tUMV = \lim_{k\to\infty} {}^tU_kM_kV_k = \lim_{k\to\infty} D_k = D$ diagonale.
3. En diagonalisant ${}^tMM$ on trouve $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme D n'est pas inversible il faut ruser pour trouver U. On donne des coefficients indéterminés à U et on écrit que ${}^tUMV = D$ ce qui donne $U = \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{2} & c \\ -a-\frac{3}{\sqrt{6}} & -b-\frac{1}{\sqrt{2}} & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On choisit alors a, b, c de sorte que $U \in O(3)$ d'où, par exemple, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3819 ▲

1. $\det(A)^2 = (-1)^n$.
2. A est (x^2+1)-diagonalisable (annulateur simple) et ses valeurs propres sont $i, -i$ avec la même multiplicité (A est réelle). La matrice A' donnée a les mêmes propriétés donc A et A' sont (x^2+1)-semblables à la même matrice diagonale, et donc (x^2+1)-semblables l'une à l'autre. Comme la (x^2+1)-similitude entre matrices réelles est équivalente à la $\mathbb{R}$-similitude (résultat bien connu), A et A' sont $\mathbb{R}$-semblables.
3. Soit e_1 unitaire et $e'_1 = Ae_1$. Alors e'_1 est unitaire et $Ae'_1 = -e_1$ d'où $(e_1 \mid e'_1) = (Ae_1 \mid Ae'_1) = -(e_1 \mid e'_1) = 0$ donc (e_1, e'_1) est une famille orthonormale. Si F_1 est le sous-espace vectoriel engendré par (e_1, e'_1) alors $F_1^\perp$ est stable par A donc on peut construire par récurrence une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n/2}, e'_1, \dots, e'_{n/2})$ telle que $Ae_i = e'_i$ et $Ae'_i = -e_i$.

Correction de l'exercice 3820 ▲

On remplace A par $A + b_nI$ et B par $B - b_nI$ ce qui ne modifie pas C. Maintenant les valeurs propres de B sont positves donc pour tou $x \in (x^2+1)^n$ on a $(Ax \mid x) \leqslant (Cx \mid x)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base orthonormale propre pour A et $(y_1, \dots, y_n)$ une base orthonormale propre pour C. Si $z \in \mathrm{vect}(x_1, \dots x_i)$ alors $(Az \mid z) \geqslant a_i\|z\|^2$ et si $z \in \mathrm{vect}(y_i, \dots y_n)$ alors $(Az \mid z) \leqslant (Cz \mid z) \leqslant c_i\|z\|^2$. Or $\mathrm{vect}(x_1, \dots x_i)$ et $\mathrm{vect}(y_i, \dots y_n)$ ont une intersection non triviale (la somme des dimensions est égale à $n+1$) donc il existe $z \neq 0$ tel que $a_i\|z\|^2 \leqslant c_i\|z\|^2$ d'où $a_i \leqslant c_i$.

Correction de l'exercice 3821 ▲

1. Prendre A supérieur ou égal à la plus petite des valeurs propres de $-M$.
2. Surjectivité de ϕ : $\mathrm{Im}\,\Phi$ est un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$ contenant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc contenant $\mathrm{vect}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. On en déduit que ϕ est un isomorphisme grâce au théorème du rang.

Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M + I_n/p)$ donc $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$. Réciproquement, si $M \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ alors $M = \lim_{p\to\infty}(M_p)$ avec M_p définie positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^t xMx = \lim_{p\to\infty}({}^t xM_p x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$. Comme ϕ est continue (car linéaire en dimension finie) on en déduit $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$ donc par continuité de ϕ^{-1} : $\phi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, d'où $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \phi(S_n^+(\mathbb{R}))$.

3. Soit $M \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres a, b avec $a \leqslant b$, et soient $a' \leqslant b'$ les valeurs propres de $\phi(M)$. Pour tout $\lambda > b$ on a $M + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\phi(M) + \lambda I_2 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\lambda > b'$. Ceci prouve que $b' \leqslant b$ et on montre l'égalité en considérant ϕ^{-1}. De même, en considérant $-M$ on montre que $a' = a$. Finalement $\chi_M = (X-a)(X-b) = \chi_{\phi(M)}$. De plus, $\det(M) = ab = \det(\phi(M))$.
   Remarque : soient $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, et $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$, $C' = \phi(C)$. On sait que A' est orthodiagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, donc il existe $P \in O(2)$ telle que $A' = {}^t PAP$. $A' + B' = \phi(I_2) = I_2$ d'où $B' = I_2 - A' = {}^t PBP$. Posons $C' = {}^t P\left(\begin{smallmatrix}u&v\\v&w\end{smallmatrix}\right)P$. $0 = \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C') = u + w$ et $-1 = \det(C) = \det(C') = uw - v^2$ donc $w = -u$ et $u^2 + v^2 = 1$. De plus, $-1 = \det(A + C) = -u - u^2 - v^2$ d'où $u = 0$ et $v = \pm 1$.
   Si $v = 1$ alors $C' = {}^t PCP$ et par linéarité, $\phi(M) = {}^t PMP$ pour toute $M \in S_2(\mathbb{R})$. Si $v = -1$ on trouve de même $\phi(M) = {}^t QMQ$ avec $Q = P\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right) \in O(2)$. Réciproquement, toute aplication de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in O(2)$ vérifie les hypothèses de la question. Les fonctions ϕ linéaires vérifiant la seule condition $\phi(S_2^{++}(\mathbb{R})) = S_2^{++}(\mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $M \mapsto {}^t PMP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ (écrire $\phi(I_2) = {}^t TT$ puis considérer $M \mapsto {}^t T^{-1}\phi(M)T^{-1}$).
   Généralisation en dimension quelconque ?

Correction de l'exercice 3822 ▲

$M = ({}^t MM)^{-2}$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable en base orthonormale. En examinant la forme diagonale on trouve $M = I$.

Correction de l'exercice 3825 ▲

1. $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid \vec{x})$ et $(f(i\vec{x}) \mid \vec{y}) = -(f(\vec{y}) \mid i\vec{x})$.
2.
3.

Correction de l'exercice 3827 ▲

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Correction de l'exercice 3828 ▲

1. $\frac{1}{16}$.
2. $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3832 ▲

1.
2.
3.
4.
5. $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 3834 ▲

1.
2.
3. $\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Correction de l'exercice 3835 ▲

1.
2. Soit $P_0 = Q_0'$. Par IPP on obtient Q_0 est orthogonal à la famille $(jX^{j-1} - X^j)_{j\geqslant 1}$ qui est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $Q_0 = 0 = P_0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^0 P_0(t)\,dt \neq \delta_{0,0}$.

Correction de l'exercice 3836 ▲

$f =$ cste.

Correction de l'exercice 3838 ▲

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $(\vec{e}_i)$.
Le premier membre vaut ${}^tXPG^{-1\,t}PX = {}^tXX$.

Correction de l'exercice 3840 ▲

1.
2.
3. Soit $g \in H^\perp$ non nulle. Les formes linéaires : $f \mapsto \int_0^{1/2} f$ et $f \mapsto \int_0^1 fg$ sont nulles sur H, donc proportionnelles, ce qui est impossible pour g continue.

Correction de l'exercice 3841 ▲

1. $u \geqslant 0$ et $u^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
2. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha u \leqslant v \leqslant \beta u$.

Correction de l'exercice 3842 ▲

1. (a_n) est partout dense.
2.
3.
4. Si les a_n sont distincts, on choisit pour tout n une fonction f_n comprise entre 0 et 1 valant alternativement 1 et -1 en $a_0, \dots, a_n$. Alors la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas car si $f_n \to f$ alors $f^2 \equiv 1$, absurde.

Correction de l'exercice 3843 ▲

$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} = d(v,(x^2+1)^u) \leqslant d(v,(x^2+1)^w) + |(v \mid w)| d(w,(x^2+1)^u)$.

Correction de l'exercice 3844 ▲

1. $A = UT\,{}^tU \Rightarrow A\overline{A} = UT\overline{T}\,{}^t\overline{U}$ est semblable à $T\overline{T}$.

2. $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives distinctes. Soit U unitaire trigonalisant $A\overline{A}$ et $T = U^{-1}A\,{}^tU^{-1}$. Donc $T\overline{T}$ est triangulaire supérieure à valeurs propres réelles distinctes. On montre que ceci implique T triangulaire supérieure par récurrence sur n.
$T = \begin{pmatrix} t & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow T\overline{T} = \begin{pmatrix} |t|^2 + X\overline{Y} & t\overline{X} + X\overline{Z} \\ \bar{t}Y + Z\overline{Y} & Y\overline{X} + Z\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{réel} & * \\ 0 & \text{tr.sup à vp réelles} \end{pmatrix}$.
Donc $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ et $Z\overline{Y} = -\bar{t}Y$, d'où $(Y\overline{X} - X\overline{Y}I)Y = 0 = (Z\overline{Z} - |t|^2 I)Y$.
Par hypothèse $Y\overline{X} + Z\overline{Z} - (|t|^2 + X\overline{Y})I$ est inversible donc $Y = 0$ et on est ramené au cas $n-1$.
3. $A\overline{A}$ est à valeurs propres positives : ? ? ?
Solution de Pierre Février (MP* Neuilly sur Seine) :
lemme : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$ alors il existe $W \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A\overline{W} = \alpha W$ et $\alpha^2 = \lambda$.
Soit $V \in E_\lambda(A\overline{A})$, $V \neq 0$. Si $A\overline{V} = -\sqrt{\lambda}V$ on a le résultat voulu, sinon on pose $W = A\overline{V} + \sqrt{\lambda}V$. On a alors :
$$\overline{A}W = \overline{A}A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\overline{A}V = \lambda\overline{V} + \sqrt{\lambda}\overline{A}V = \sqrt{\lambda}\,\overline{W}$$
On peut s'arranger pour que le vecteur précédent soit unitaire et construire U matrice unitaire de première colonne W.
On a alors ${}^t\overline{U}A\overline{U} = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, puis ${}^t\overline{U}A\overline{A}U = \begin{pmatrix} \alpha^2 & y & y & y \\ 0 & & & \\ \vdots & & B\overline{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. On en déduit le résultat par récurrence.

Correction de l'exercice 3856 ▲

1. $f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1.
2. Sinon $f - g$ est de signe constant, par exemple positif. Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Correction de l'exercice 3858 ▲

En posant $b = f(a)$ on a $(f(a) - a) + (f(b) - b) = 0$ donc $x \mapsto f(x) - x$ s'annule entre a et b. De même, s'il existe $k \in |||^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^k(a) = a$ alors $(f(a) - a) + (f^2(a) - f(a)) + \cdots + (f^k(a) - f^{k-1}(a)) = 0$ donc $f(x) - x$ s'annule entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.

Correction de l'exercice 3861 ▲

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f est discontinue en a. Il existe une suite a_n telle que $a_n \to a$ et $|f(a_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. Alors $f(a) \pm \varepsilon$ a une infinité d'antécédents.
2.

Correction de l'exercice 3869 ▲

Si f n'est pas identiquement nulle, alors $f(0) = \pm 1$ et f est paire, de signe constant.
Par récurrence, $\forall\, p \in |||$, $f(px) = \pm f^{p^2}(x) \Rightarrow$ par densité, $f(x) = \pm\lambda^{x^2}$.

Correction de l'exercice 3870 ▲

$\omega(\delta) \to 0 \Leftrightarrow f$ (lorsque $\delta \to 0^+$) est uniformément continue.
Continuité en $\delta > 0$: on remarque que ω est croissante donc $\omega(\delta^-)$ et $\omega(\delta^+)$ existent et encadrent $\omega(\delta)$. Si $\delta_n \to \delta^+$ (lorsque $n \to \infty$), soient x_n, y_n tels que $\omega(\delta_n) = |f(x_n) - f(y_n)|$ et $|x_n - y_n| \leqslant \delta_n$. On extrait de (x_n, y_n) une suite convergente vers (x, y) avec $|x - y| \leqslant \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta^+)$ d'où $\omega(\delta^+) \leqslant \omega(\delta)$ puis $\omega(\delta^+) = \omega(\delta)$.
On a aussi $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x - y| < \delta\} \leqslant \omega(\delta^-)$ d'où $\omega(\delta^-) = \omega(\delta)$.

Correction de l'exercice 3871 ▲

f admet des points fixes car l'application $x \mapsto f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1. Si E est l'ensemble des points fixes de f alors E est stable par g donc $f - g$ a des signes opposés en $\min(E)$ et $\max(E)$.

Correction de l'exercice 3872 ▲

1. Non. Si φ est lipschitzienne alors $\varphi(x) = O(\|x\|)$ lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini, donc toute fonction f à décroissance suffisament rapide vers $-\infty$ n'est pas minorable par une fonction lipschitzienne. Contre-exemple explicite : $f(x) = -\|x\|^2$.
2. CNS : $x \mapsto f(x) + k\|x\|$ est minorée.
3. On pose $\varphi(x) = \sup\{g(x),\ g\ k\text{-lipschitzienne minorant } f\}$. Il suffit de vérifier que φ est k-lipschitzienne, ce sera alors la plus grande fonction k-lipschitzienne minorant f. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et g_x, g_y des fonctions k-lipschitziennes minorant f telles que $g_y(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_x(x) + \varepsilon$ et $g_x(y) \leqslant \varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon$. On a :

$$\varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon \leqslant g_y(x) + k\|x - y\| + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + k\|x - y\| + \varepsilon,$$
$$\varphi(y) \geqslant g_x(y) \geqslant g_x(x) - k\|x - y\| \geqslant \varphi(x) - k\|x - y\| - \varepsilon.$$

Donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k\|x - y\| + \varepsilon$ et on fait tendre ε vers 0^+.

Correction de l'exercice 3873 ▲

Soit pour $x > 0$, $\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} f(nx)$. On a $\ell(kx) = \ell(x)$ pour tout $k \in |||^*$ d'où aussi pour tout $k \in \mathbb{Q}^{+*}$. Montrons alors que $f(x) \to \ell(1)$ lorsque $x \to +\infty$: soit $\varepsilon > 0$ et δ associé dans la définition de l'uniforme continuité de f. On choisit un rationnel $\alpha \in]0, \delta[$ et un entier N tel que $|f(n\alpha) - \ell(1)| = |f(n\alpha) - \ell(\alpha)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $|f(x) - \ell(1)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x \geqslant N\alpha$.

Correction de l'exercice 3883 ▲

$\alpha = \inf(A) \Rightarrow f(\alpha^+) \leqslant \alpha$ et $f(\alpha^-) \geqslant \alpha$.

Correction de l'exercice 3884 ▲

Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f(b) < f(a)$. On note $E = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < f(a)\}$ et $c = \inf(E)$. On a $c \in E$ et $c > a$ par hypothèse et donc $f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) \geqslant f(a)$, absurde.

Correction de l'exercice 3885 ▲

Injectivité évidente.
Monotonie : pour $a < b < c$ on a $|a - b| < |a - c|$ et $|c - b| < |c - a|$ d'où les mêmes inégalités pour $f(a), f(b), f(c)$ ce qui prouve que $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.
Continuité : soit $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $x = a - \delta$, $y = a + \delta$ et $z = a - 4\delta$. On a $2\delta = |x - y| < |x - z| = 3\delta$ donc $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$ et en faisant tendre δ vers 0^+ : $|f(a^-) - f(a^+)| \leqslant |f(a^-) - f(a^-)| = 0$.
Affine : soient $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $z = x + h$ et $x - h < y < x$. On a $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x + h)|$ d'où en faisant tendre y vers $(x - h)^+$: $|f(x) - f(x - h)| \leqslant |f(x) - f(x + h)|$. On obtient l'inégalité inverse en permutant y et z, donc $f(x - h)$ et $f(x + h)$ sont équidistants de $f(x)$ et, par injectivité de f : $f(x) = \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$ ce qui permet de conclure avec la continuité de f.

Correction de l'exercice 3888 ▲

1. Étudier les logs.

2. Idem.

Correction de l'exercice 3889 ▲

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \frac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$.
Pour $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $t \longmapsto \frac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 3892 ▲

1. Oui ssi $|a| > |b|$.
2. Oui ssi $|a| < |b|$.

Correction de l'exercice 3893 ▲

$= \frac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$.

Correction de l'exercice 3894 ▲

$x = -\frac{2}{3}a$.

Correction de l'exercice 3895 ▲

$2\coth 2x - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 3896 ▲

$\coth\frac{x}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 3898 ▲

Poser $X = e^x$, $Y = e^y$: $\Rightarrow \begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b}. \end{cases}$ Il y a des solutions si et seulement si $a \geqslant \sqrt{b^2+4}$.

Correction de l'exercice 3900 ▲

$= x + \ln\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3901 ▲

$x = \frac{5}{4}$.

Correction de l'exercice 3902 ▲

1. $F(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.
2. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2x-1}{\sqrt{5}+2x+1}\right|$.

Correction de l'exercice 3903 ▲

1. Étude de $x \mapsto \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_p}{a}\right)^x$.
2. $x_a > x_b$.
3. $x_a \to \ell$. Si $\ell > 0$, $a^{a_a} \to +\infty$, mais $a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} \to a_1^{\ell} + \cdots + a_p^{\ell}$.
   Donc $\ell = 0$, et $x_a \ln a \to \ln p$.

Correction de l'exercice 3904 ▲

1. Pour $x=1$ on a $f\circ f(y)=yf(1)$ donc f est injective et pour $y=1$: $f(xf(1))=f(x)$ d'où $f(1)=1$.
2. $f(xy)=f(xf(f(y)))=f(y)f(x)$.
   Pour $0<x<1$ on a $f(x^n)=f(x)^n\to+\infty$ (lorsque $n\to\infty$) donc $f(x)>1$ ce qui entraîne par morphisme la décroissance de f. Enfin f est monotone et $f(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ donc f n'a pas de saut et est continue.
3. En tant que morphisme continu, f est de la forme $x\mapsto x^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et l'involutivité et la décroissance donnent $\alpha=-1$.

Correction de l'exercice 3905 ▲

1. $4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=2 \iff \theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$.
2. $\sin\theta+\cdots+\sin 4\theta=2\sin\theta\cos\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=4\sin(5\theta/2)\cos\theta\cos(\theta/2)$
   $4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0 \iff \cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos(2\pi/5)$ ou $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin(2\pi/5)$
   $\Rightarrow$ modulo 2π, $\theta\in\{0,\pi,\pi/2,3\pi/2,2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5\}$.
3. $\cos\theta\in\left\{-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \iff \theta\equiv\pm\frac{2\pi}{3}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{2})$.
4. $2\sin(3\theta/2)\sin(\theta/2)=2\sin(3\theta/2)\cos(3\theta/2) \iff \theta\equiv 0(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{3})$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\, \pi)$ ou $\theta\equiv\frac{3\pi}{2}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$.
5. $2\cos 4\theta\cos 3\theta=\cos 4\theta \iff \theta\equiv\frac{\pi}{8}(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{4})$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{9}(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{3})$.
6. $2\cos 7\theta\cos 5\theta=\sqrt{3}\cos 5\theta \iff \theta\equiv\frac{\pi}{10}(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{5})$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{42}(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{7})$.
7. $\theta\equiv 0\,\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{3}$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{12}(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{2})$.
8. $\cos^3\theta\sin 3\theta+\cos 3\theta\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin 4\theta\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{8}(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{2})$.
9. $\theta\equiv 0(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{8})$.
10. $\sin\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ ou $\theta\equiv\frac{5\pi}{6}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$.
11. $\theta\equiv 0,\pm\arctan\sqrt{5}(\mathrm{mod}\, \pi)$.
12. $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$.
    $\cos\theta+\sin\theta=0 \iff \theta\equiv-\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\, \pi)$.
    $\cos\theta-\sin\theta=\cos\theta\sin\theta\Rightarrow(\cos\theta\sin\theta)^2+2\cos\theta\sin\theta=1\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}.\end{cases}$
    Les valeurs trouvées conviennent.
13. $\tan x=\tan y=\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3906 ▲

1. $-\frac{2\pi}{3}<\theta(\mathrm{mod}\, 2\pi)<\frac{\pi}{3}$.
2. $2\alpha<\theta(\mathrm{mod}\, 2\pi)<2\pi$ avec $\begin{cases}\cos\alpha=2/\sqrt{5}\\ \sin\alpha=1/\sqrt{5}.\end{cases}$

Correction de l'exercice 3908 ▲

1. $1-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$,
   $\cos\beta+\cos\gamma=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.
2. $=1$.

Correction de l'exercice 3910 ▲

$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$.

$$S_n = \begin{cases} \frac{\tan((n+1)\theta)-\tan\theta}{\sin\theta} & \text{si } \sin\theta \neq 0 \\ n & \text{si } \theta \equiv 0 (\bmod 2\pi) \\ -n & \text{si } \theta \equiv \pi (\bmod 2\pi). \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3911 ▲

linéariser : $\sum = \frac{1}{4}\left(3^n \sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

Correction de l'exercice 3912 ▲

$\text{cotan} x - 2\text{cotan} 2x = \tan x$, $\sum = \frac{1}{2^n}\text{cotan}\frac{\alpha}{2^n} - 2\text{cotan} 2\alpha$.

Correction de l'exercice 3913 ▲

$\theta = \frac{\pi}{7}$: $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin 3\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta}$.

Correction de l'exercice 3914 ▲

$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 3915 ▲

$\arctan a + \arctan b \equiv \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) (\bmod \pi)$.

Correction de l'exercice 3916 ▲

$x = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$.

Correction de l'exercice 3917 ▲

$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow x \equiv \frac{3\pi}{10} \pmod{\frac{2\pi}{5}}$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Donc $x = \frac{3\pi}{10}$.

Correction de l'exercice 3918 ▲

1. $x > -1 \Rightarrow = \frac{\pi}{4} - \arctan x$, $\qquad x < -1 \Rightarrow = -\frac{3\pi}{4} - \arctan x$.
2. $= \frac{1}{2}\arccos x$.
3. $-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow = \arcsin x + \frac{3\pi}{4}$, $\qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1 \Rightarrow = \arcsin x - \frac{\pi}{4}$.
4. $= \frac{\pi}{4}$.
5. $f(x) = 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$;
   $f(x) = \pi$ pour $x \in]0, 1[$;
   $f(x) = 0$ pour $x \in]1, +\infty[$.

Correction de l'exercice 3919 ▲

$D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\quad f(x) = \frac{1}{2} - x^2 - x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.

Correction de l'exercice 3920 ▲

$\cos(3\arctan x) = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. $\quad\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Correction de l'exercice 3921 ▲

$f(x) = 0$ pour $x \in]0,\pi/2[$; $f(x) = 2x-\pi$ pour $x \in]\pi/2,\pi[$; $f(x) = 3\pi-2x$ pour $x \in]\pi,3\pi/2[$; $f(x) = 0$ pour $x \in]3\pi/2,2[$.

Correction de l'exercice 3922 ▲

$f(x) = -8\arctan x - 2\pi$ pour $x \in]-\infty,-1[$, solution $-\sqrt{3}$;
$f(x) = -4\arctan x$ pour $x \in]-1,0[$, solution $-1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 4\arctan x$ pour $x \in]0,1[$, solution $1/\sqrt{3}$;
$f(x) = 2\pi$ pour $x \in]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 3923 ▲

$f(x) = x+\pi/4$ pour $x \in]-\pi,-\pi/2[$;
$f(x) = -\pi/4$ pour $x \in]-\pi/2,\pi/2[$;
$f(x) = x-3\pi/4$ pour $x \in]\pi/2,\pi[$.

Correction de l'exercice 3924 ▲

$= \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Correction de l'exercice 3925 ▲

1. $x = \frac{1}{6}$.
2. $x = \pm 1\sqrt{2}$.
3. $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
4. $x^3-3x^2-12x+10 = 0 \Rightarrow x = 5,\ -1\pm\sqrt{3}$. Seule la solution $x = 5$ convient.

Correction de l'exercice 3928 ▲

$\sin\big(2g(x)\big) = \sin(f(x))$.
$f(x) = -\pi-2g(x)$ pour $x \in]-\infty,\sin a-\cos a[$;
$f(x) = 2g(x)$ pour $x \in]\sin a-\cos a,\sin a+\cos a[$;
$f(x) = \pi-2g(x)$ pour $x \in]\sin a+\cos a,+\infty[$.

Correction de l'exercice 3934 ▲

Contre-exemple : $f(t) = t^2$ si $t \geqslant 0$ et $f(t) = -t^2$ si $t < 0$.

Correction de l'exercice 3939 ▲

Poser $g(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt$. On obtient $(g^3)'(x) \to 3\ell^2$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui implique (classiquement) que $g^3(x) \sim 3\ell^2 x$, puis $f(x) \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de l'exercice 3943 ▲

TAF $\Rightarrow \ell = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3949 ▲

Dériver par rapport à a puis par rapport à b.

Correction de l'exercice 3953 ▲

1.
2. $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.
3.

Correction de l'exercice 3957 ▲

$\frac{f'(0)}{2}$.

Correction de l'exercice 3959 ▲

$f = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 3962 ▲

1. AF $\Rightarrow \exists\, w(x)$ compris entre $u(x)$ et $v(x)$ tel que $\frac{u^v - v^v}{u-v} = vw^{v-1} \to a^a$.
2. $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u-v)(vw_1^{v-1} - (\ln v)v^{w_2})$
   $u^u - v^v = (u-v)w_3^{w_3}(1 + \ln w_2)$
   $\Rightarrow \lim = \frac{1-\ln a}{1+\ln a}$.

Correction de l'exercice 3963 ▲

1.
2. Pour $k \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante et $\ln u_n \leqslant \frac{k}{1-k}$.
   Pour $k < 0$, (u_{2n}) décroît et converge, et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Correction de l'exercice 3965 ▲

$(1+x^2)f^{(n+1)} + 2nxf^{(n)} + n(n-1)f^{(n-1)} = 0$ pour $n \geqslant 1$.
$g^{(n+1)} = 3x^2 g^{(n)} + 6nxg^{(n-1)} + 3n(n-1)g^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 3966 ▲

$(-1)^n e^{-x}\big(x^3 + (2-3n)x^2 + (3n^2 - 7n)x + (-n^3 + 5n^2 - 4n - 5)\big)$.

Correction de l'exercice 3967 ▲

$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\frac{\pi}{6})$.

Correction de l'exercice 3968 ▲

$\frac{d^n}{dx^n}\big(x^n(1-x)^n\big) = \sum_{k=0}^n n!\,\big(C_n^k\big)^2(-1)^{n-k}x^{n-k}(1-x)^k$.
coefficient de $x^n = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \big(C_n^k\big)^2 = (-1)^n A_{2n}^n$.

Correction de l'exercice 3969 ▲

$\frac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\exp(1/t)$.

Correction de l'exercice 3970 ▲

1. $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + 2(2k-n)a_{n,k}$.
2. $a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Correction de l'exercice 3975 ▲

1. Au point d'abscisse α tq $\ln\alpha = \frac{a\ln a}{1-a} + 1$ pour $\mathscr{C}$, et $\alpha' = a\alpha$ pour $\mathscr{C}'$.
2. Centre = $\left(0, \frac{a\ln a}{1-a}\right)$, rapport = a.

Correction de l'exercice 3976 ▲

Si f change de signe, soit par exemple $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $a < b$ et $c = \sup\{x \text{ tq } f_{|[a,x]} \text{ est croissante}\}$. Alors f est croissante sur $[a,c]$ et $f(c) = 0$, contradiction.

Correction de l'exercice 3977 ▲

Si l'on pose $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,dt$, on constate que $a(x) = F^{-1}(1+F(x))$ ce qui prouve l'existence, l'unicité et le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de a. Pour la symétrie, il faut montrer que $a(-a(x)) = -x$ soit $\int_{t=-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,dt = 1$ ce qui est immédiat.

Correction de l'exercice 3978 ▲

Toute fonction linéaire $\varphi : x \mapsto ax$ convient. Réciproquement, si φ est solution alors $\varphi(0) = 0$. On note $a = \varphi'(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ est également solution et $\psi'(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in |||$ alors $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où $\psi = 0$ et $\varphi(x) = ax$.

Correction de l'exercice 3979 ▲

1. $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.
2.
3.
4. f et f' ont des limites nulles en 0^+ et infinies en $+\infty$ donc $f(x) = o_{x\to 0^+}(x)$ et $x = o_{x\to+\infty}(f(x))$, ce qui implique que $f(x) - x$ s'annule sur $]0,+\infty[$. S'il y a deux points fixes, $a < b$, alors par le thm. des accroissements finis l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution dans $]0,a[$ et une dans $]a,b[$, en contradiction avec la bijectivité de $f' = f^{-1}$.
5. On note a le point fixe de f, b celui de g et on suppose $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a $g(x) < x$ pour $x \in]0,b[$ donc $g(a) < a = f(a)$. Par conséquent $g(x) < x \leqslant f(x)$ si $x \in [a,b[$; soit $]c,b[$ le plus grand intervalle sur lequel $g(x) < f(x)$. On a $0 \leqslant c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leqslant c$ et f, g sont strictement croissantes, donc $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$ pour $x \in]c,b[$. Ainsi $g - f$ est strictement croissante sur $]c,b[$ a une limite nulle en c^+ et est négative en b, c'est absurde.

   Remarque : le point fixe est le nombre d'or m. De plus, si f et g sont deux éléments de E distincts alors $f - g$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de m^- (même démonstration).

Correction de l'exercice 3980 ▲

On a $f' \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier elle admet des limites finies, a et b en $-\infty$ et $+\infty$ avec $-1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$.

Supposons $a > 0$: soit $\alpha \in]0,a[$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ x \leqslant x_0,\ f(x) \geqslant a - \alpha > 0$, d'où $f'(x) \leqslant -1 + \sqrt{a-\alpha} < 0$. Ceci est incompatible avec le caractère borné de f, donc on a en fait $a \leqslant 0$. On montre de même que $b \geqslant 0$ et comme $b \leqslant a$, on a finalement $a = b = 0$.

Correction de l'exercice 3982 ▲

$y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow \frac{n}{y_1 \cdots y_n} \leqslant \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$.

Correction de l'exercice 3988 ▲

1.
2. $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \to 0$.
   TAF entre x et $x/2 \Rightarrow 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow xf'(x) \to 0$.

Correction de l'exercice 3994 ▲

1. Fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f(x) - xf'(x) = -x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Donc, $x \mapsto \frac{f(x)-p}{x} \searrow$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} \nearrow$.
3. $p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$.

Correction de l'exercice 3995 ▲

1. Soient $x < y$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \frac{f(y)-f(0)}{y-0} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(y)}{y} + f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.
2. Pour $x < y$: $f(x+y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ avec $t = \frac{x}{x-y} < 0$,
   donc $f(x+y) - f(x) - f(y) \leqslant \frac{xy}{x-y}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right) \leqslant 0$.

Correction de l'exercice 3999 ▲

1.
2. Prendre x tel que $f(x)$ soit maximal.
3.
4.

Correction de l'exercice 4000 ▲

Pour a_0 : $\left|f(a_0 + h) - f(a_0) - |h|\right| \leqslant \frac{|h|}{2}$.

Correction de l'exercice 4003 ▲

Soit $F(x) = x^2 + xG(x)$. On a pour $h > 0$: $f(x) \leqslant \frac{F(x+xh)-F(x)}{xh} = 2x + xh + \frac{G(x+xh)-G(x)}{h} + G(x+xh)$. Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $y \geqslant A \Rightarrow |G(y)| \leqslant \varepsilon^2$. On prend $h = \varepsilon/\sqrt{x}$ et on obtient $f(x) - 2x - \varepsilon\sqrt{x} \leqslant \varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2$ d'où $f(x) \leqslant 2x + o(\sqrt{x})$. L'inégalité inverse se montre de même.

Correction de l'exercice 4004 ▲

$f'(a)f'''(a) - f''(a)^2$.

Correction de l'exercice 4007 ▲

1. Formule de Taylor Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0.
2. Sinon, la fonction $g : x \mapsto f(x) - (1-2x)^n$ est monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et nulle en 0 et $\frac{1}{2}$, donc identiquement nulle. Impossible car $g^{(n)}(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Correction de l'exercice 4008 ▲

1. Formule de Taylor pour f et $f' \Rightarrow \lambda = 1/180$.
2.

Correction de l'exercice 4009 ▲

1. Formule de Taylor pour calculer $f(a)$ et $f(b)$ à partir de $f(x)$.
2. Étudier $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \pm M(x-a)^2/2$.

Correction de l'exercice 4010 ▲

Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 de x à a et de x à $-a$.

Correction de l'exercice 4011 ▲

$f^{(n)}(a+h\theta_h) = f^{(n)}(a) + h\theta_h f^{(n+1)}(a+\theta' h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta'' h)$.

Correction de l'exercice 4013 ▲

1. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x+\theta h)$.
2. $h = 2\sqrt{\alpha/\beta} \Rightarrow |f'| \leqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Correction de l'exercice 4014 ▲

1. $= f(x+y) + \frac{y^2}{2}(M - f''(z))$.
2. $\Delta \leqslant 0$.
3. $\sqrt{f}$ est affine.

Correction de l'exercice 4016 ▲

Soit $\varepsilon > 0$: $f(x+\varepsilon x) = f(x) + \varepsilon x f'(x) + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x) \Rightarrow x f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon x)-f(x)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x)$.

Correction de l'exercice 4017 ▲

Si $Q = P \circ f$ alors $Q' = f' \times (P' \circ f)$ a autant de racines que P' d'où $p = q$, $f(y_i) = x_i$ et $Q(y_i) = P(x_i)$. De plus, au voisinage de y_i :

$$\lambda_i (y-y_i)^{n_i} \sim Q'(y) = f'(y) \times P'(f(y)) \sim f'(y_i) \times \mu_i (f(y)-x_i)^{m_i} \sim \mu_i f'(y_i)^{1+m_i} (y-y_i)^{m_i}$$

d'où $m_i = n_i$.
Réciproquement, si $p = q$, $P(x_i) = Q(y_i)$ et $m_i = n_i$ alors en posant $x_0 = y_0 = -\infty$ et $x_{p+1} = y_{p+1} = +\infty$, P induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]x_i, x_{i+1}[$ sur $P(]x_i, x_{i+1}[) = Q(]x_i, x_{i+1}[)$ (les limites de P et Q en $+\infty$ sont égales à $+\infty$ vu les coefficients dominants de P et Q ; celles en $-\infty$ s'en déduisent en comptant les changements de signe pour P' ou pour Q' et on trouve le même compte puisque $m_i = n_i$). On note f_i la fonction réciproque de $P_{|]x_i, x_{i+1}[}$ et f définie par $f(y) = f_i(Q(y))$ si $y_i < y < y_{i+1}$ et $f(y_i) = x_i$. f ainsi définie est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ à dérivée non nulle sauf peut-être aux y_i, et $P \circ f = Q$. Reste à étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ en y_i et à vérifier que $f'(y_i) \neq 0$.
Au voisinage de y_i, par intégration des DL de P et Q on a :

$$\frac{\lambda_i}{1+m_i}(y-y_i)^{1+m_i} \sim Q(y) - Q(y_i) = P(f(y)) - P(f(y_i)) \sim \frac{\mu_i}{1+m_i}(f(y)-f(y_i))^{1+m_i}$$

d'où $\frac{f(y)-f(y_i)}{y-y_i} \to \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$ lorsque $y \to y_i$, car les taux d'accroissement de f sont positifs. Ceci prouve que f est dérivable en y_i et $f'(y_i) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)} \neq 0$. Enfin on a, lorsque $y \to y_i$:

$$f'(y) = \frac{Q'(y)}{P'(f(y))} \sim \frac{\lambda_i(y-y_i)^{m_i}}{\mu_i(f(y)-f(y_i))^{m_i}} \to \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-m_i/(1+m_i)} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$$

et donc f est $\mathscr{C}^1$ en y_i.

Correction de l'exercice 4019 ▲

$e^{1/3}\left(1+\frac{7}{90}x^2+o(x^3)\right)$.

Correction de l'exercice 4024 ▲

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Correction de l'exercice 4025 ▲

$v_p = \left(\frac{2^{1+1/p}-1}{1+1/p}\right)^p$, $w_n = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$, $v = w = \frac{4}{e}$.

Correction de l'exercice 4026 ▲

$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \to \frac{f'(0)}{2}$ lorsque $n \to \infty$. $\left(\text{Utiliser } |f(x)-xf'(0)| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f''(t)| \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1\right)$

Correction de l'exercice 4027 ▲

1. $y = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}$.
2. $y = -\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}$.
3. $y = -\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}$.
4. $y = e^3(1-4x+16x^2)$.
5. $y = -1+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}$.
6. $y = \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{5x^2}{128}\right)$.

Correction de l'exercice 4028 ▲

$h \leqslant k \leqslant g \leqslant f$.

Correction de l'exercice 4029 ▲

1. $y = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}$.
2. $y = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}$.
3. $y = 2x-\frac{4}{3x}$.
4. $y = \frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}+1-\frac{1}{3x^2}$.
5. $y = \frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi/4-1}{x}$.
6. $y = \frac{\pi x}{2}+\pi-1+\frac{5\pi/4-2}{x}$.
7. $y = x+\frac{1}{2}-\frac{9}{8x}$.

Correction de l'exercice 4030 ▲

1.
2. $e\left(1-\frac{\ln 2}{x}+\frac{\ln^2 2}{2!x^2}-\cdots+(-1)^n\frac{\ln^n 2}{n!x^n}\right)+o(x^{-n})$.

Correction de l'exercice 4032 ▲

$f^{-1}(y)=\frac{y}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1^3}+o(y^2)$.

Correction de l'exercice 4033 ▲

$(1-e^x)^n=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^ke^{kx}=\sum_{p=0}^{n+2}\left(\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kk^p\right)\frac{x^p}{p!}+o(x^{n+2})$,
$(1-e^x)^n=(-x)^n\left(1+\frac{nx}{2}+\frac{n(3n+1)}{24}x^2+o(x^2)\right)$.

Correction de l'exercice 4037 ▲

1. Notons I_n l'intervalle $\left]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$. Alors sur chaque I_n la fonction définie par $f(x)=\tan x-x$ est un fonction continue et dérivable. De plus $f'(x)=1+\tan^2x-1=\tan^2x$. La dérivée est strictement positive sauf en un point où elle est nulle et ainsi la fonction f est strictement croissante sur I_n. La limite à gauche est $-\infty$ et la limite à droite est $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $x_n\in I_n$ tel que $f(x_n)=0$ c'est-à-dire $\tan x_n=x_n$.
2. $x\mapsto\arctan x$ est la bijection réciproque de la restriction de la tangente $\tan_| :]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to]-\infty,+\infty[$. Sur ces intervalles on a bien $\tan x=y \iff x=\arctan y$. Mais si $y\notin]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ il faut d'abord se ramener dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$.
Ainsi $x_n\in I_n$ donc $x_n-n\pi\in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$. Maintenant $x_n=\tan(x_n)=\tan(x_n-n\pi)$.
Donc $\arctan x_n=\arctan\big(\tan(x_n-n\pi)\big)=x_n-n\pi$. Ainsi
$$x_n=\arctan x_n+n\pi.$$
L'erreur classique est de penser que $\arctan(\tan x)=x$. Ce qui n'est vrai que pour $x\in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$!
3. Comme $x_n\in I_n$ alors $x_n\to+\infty$ lorsque $n\to+\infty$.
On sait par ailleurs que pour $x>0$ on a $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\arctan x_n=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}$
Lorsque n tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{x_n}\to 0$ donc $\arctan\frac{1}{x_n}\to 0$.
Ainsi
$$x_n=n\pi+\arctan x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}=n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1).$$
4. On va utiliser le dl obtenu précédemment pour obtenir un dl à un ordre plus grand :
$$\begin{aligned}
x_n&=n\pi+\arctan x_n\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x_n}\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}+o(\frac{1}{n^2}) &&\text{car }\arctan u=u+o(u^2)\text{ en }u=0\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}+o(\frac{1}{n^2})\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))+o(\frac{1}{n^2})\\
&=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

Ainsi en $+\infty$ on a le développement :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Correction de l'exercice 4038 ▲

1. $f_n'(x) = 0 \iff \text{cotan} x = nx$.
2. 0.
3. $x_n \tan x_n = \frac{1}{n}$.
4. $\ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right) \to -\frac{1}{e} \Rightarrow y_n \sim \frac{1}{\sqrt{ne}}$.

Correction de l'exercice 4039 ▲

1.
2. (a)
   (b) $a \sim e^{-b} \Rightarrow a \ln b \to 0 \Rightarrow b^a \to 1$.

Correction de l'exercice 4040 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de f sur $[3, +\infty[$ (pour $x \leqslant 3$ on ne peut pas avoir $0 < f(x) < 1$). On a facilement $x_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
$\ln(x_n - 2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln(x_n) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x_n}\right) = -\frac{\ln(x_n)}{n} \Rightarrow x_n \ln(x_n) \sim 2n \Rightarrow x_n \sim \frac{2n}{\ln n}$.

Correction de l'exercice 4041 ▲

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Correction de l'exercice 4042 ▲

Existence et unicité de x_n par étude de la fonction $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}^+$. On a clairement $x_n \to +\infty$ (lorsque $n \to \infty$) et $n = e^{x_n} + x_n$ d'où :

$$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) = x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}).$$

On en déduit $x_n \sim \ln n$. Écrivons $x_n = \ln n + y_n$:

$$0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$$

d'où $y_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim -\frac{\ln n}{n} e^{-y_n} \sim -\frac{\ln n}{n}$. Écrivons maintenant $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} e^{-2y_n} + o\left(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\right) \\
&= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où $z_n \sim -\frac{\ln^2 n}{2n^2}$ et finalement, $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 4043 ▲

1.
2.

$$nx_n^n(x_n-1) = x_n^n + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{n+1}(x_n) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^{n+1} + \frac{x_n}{2}\right) - x_n^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{x_n^{n+1}}{n} + \frac{(n+1)x_n - n}{2n} > 0$$
$$\Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge vers $\ell \geqslant 1$.
$0 \leqslant x_n - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2nx_n^n} \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) donc $\ell = 1$.
Soit $y_n = n(x_n-1) = 1 + \frac{1}{2x_n^n}$. On a $f(y_n) = \frac{\ln(2(y_n-1))}{y_n} = -\frac{\ln x_n}{x_n-1} = -g(x_n)$ et f, g sont strictement croissantes sur $[1,+\infty[$ donc les suites (x_n) et (y_n) varient en sens contraire. On en déduit que la suite (y_n) décroît donc admet une limite $\lambda \geqslant 1$, soit $x_n = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $x_n^n \to e^\lambda$ (lorsque $n \to \infty$) d'où $\lambda = 1 + \frac{1}{2e^\lambda}$.

Correction de l'exercice 4044 ▲

Il s'agit bien sûr de calculer un développement limité, le premier terme de ce développement donne l'équivalent cherché.

1. Le dl à l'ordre 3 en 0 est
$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} = -\frac{11x^3}{3} + o(x^3)$$
donc
$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \sim -\frac{11x^3}{3}.$$
2. De même
$$(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x} \sim \frac{x^5}{4}.$$
3. On pose $h = x - \sqrt{3}$ alors
$$\arctan x + \arctan\frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{h^2}{8\sqrt{3}} + o(h^2)$$
donc
$$\arctan x + \arctan\frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} \sim -\frac{(x-\sqrt{3})^2}{8\sqrt{3}}.$$
4. En $+\infty$
$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = \frac{1}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
donc
$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} \sim \frac{1}{12x}.$$
5. Il faut distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$ pour trouver :
$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \sim |x|.$$

Correction de l'exercice 4045 ▲

Le dl de $\cos x$ en 0 à l'ordre 6 est :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculons celui de $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2) \times \frac{1}{1+bx^2} \\
&= (1+ax^2) \times \big(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\big) \quad \text{car } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \\
&= \cdots \quad \text{on développe} \\
&= 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Notons $\Delta(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ alors

$$\Delta(x) = \big(-\frac{1}{2} - (a-b)\big)x^2 + \big(\frac{1}{24} + b(a-b)\big)x^4 + \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6).$$

Pour que cette différence soit la plus petite possible (lorsque x est proche de 0) il faut annuler le plus possible de coefficients de bas degré. On souhaite donc avoir

$$-\frac{1}{2} - (a-b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24} + b(a-b) = 0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$\Delta(x) = \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Avec notre choix de a,b nous avons obtenu une très bonne approximation de $\cos x$. Par exemple lorsque l'on évalue $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ (avec $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$) en $x = 0.1$ on trouve :

$$0.9950041631\ldots$$

Alors que

$$\cos(0.1) = 0.9950041652\ldots$$

En l'on trouve ici $\Delta(0.1) \simeq 2 \times 10^{-9}$.

Correction de l'exercice 4046 ▲

$a = -7/60$, $b = 1/20$, $\Delta \sim 11x^7/50400$.

Correction de l'exercice 4048 ▲

1. $(3a\alpha(\alpha - a) + 2(b\alpha - a\beta))X^7$.
2. $-x^7/30 + o_{x\to 0}(x^7)$.

Correction de l'exercice 4051 ▲

$\sim x$ pour k impair, et $= 1 + x\ln(x) + o_{x\to 0}(x\ln x) \sim 1$ si k est pair $\geqslant 2$.

Correction de l'exercice 4054 ▲

1. $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.
2. $y = \frac{C+\sin x}{x}$.
3. $y = -\cos x + \frac{\sin x+\lambda}{1+x}$.
4. $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.
5. $y = \lambda x^{4/3} - x$.
6. $y = \frac{\sin x-\cos x}{2} + \frac{3\sin 2x-6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.
7. $y = \frac{\operatorname{argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$
   $y = \frac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$
   $y = \frac{-\operatorname{argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.
8. $y = \frac{x-1}{2x}\arctan x + \frac{x+1}{2x}\left(\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda\right)$.
9. $y = \frac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Correction de l'exercice 4055 ▲

1. $y = (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.
2. $y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.
3. $y = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.
4. $y = \sin x\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \lambda\cos x + \mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).
5. $y = (\lambda + \ln|x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.
6. $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P^{(2n)}(x)$.
7. $y = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou $y = \pm 1$.

Correction de l'exercice 4056 ▲

1. $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.
2. $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2+3}{16}$.
3. $y = \lambda x^2 + \mu\ln x$.
4. $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.
5. $y = x^2\ln|x+1| + \lambda\left(x^2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + x - \frac{1}{2}\right) + \mu x^2$.
6. $y = \frac{-1+a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x}{x^2}$.
7. $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.
8. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\operatorname{ch}x - x\operatorname{sh}x) + b(x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x)$.

Correction de l'exercice 4057 ▲

1. $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0\cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ a_0\operatorname{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$

   Solution générale : $y = \begin{cases} a\cos u + b\sin u & \text{si } x \geqslant 0 \\ a\operatorname{ch} u + b\operatorname{sh} u & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$ avec $u = |x|^{3/2}$.
2. $n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0\frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

   Solution générale : $y = \frac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}{x}$.
3. $(2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0\operatorname{ch}(\sqrt{x})$.

   Solution générale sur $\mathbb{R}^+$: $u = a\operatorname{ch}(\sqrt{x}) + b\operatorname{sh}(\sqrt{x})$.
4. $n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0 \Rightarrow y = a_0(1-x^2)e^{-x^2/2} + a_1 z$.

   Solution générale : $y = (1-x^2)e^{-x^2/2}(a + bF(x)) + bx$ avec $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2/2}\,dt$.
5. $(n+2)(n+3)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = \frac{x - \operatorname{sh} x}{x^3}$.

   Solution générale : $y = \frac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x + x}{x^3}$.
6. $na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow y = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$.

   Solution générale : $y = \frac{ax + b(1 + x\ln|x|)}{(1-x)^2}$.

Correction de l'exercice 4058 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4059 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\frac{x\sin kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4060 ▲

$y = x + 1 + \lambda e^x$ ou $y = x - 1 + \lambda e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4061 ▲

$$y = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos x + \sin x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \\ e^{3\pi/2 - x} - 1 & \text{si } x \geqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4062 ▲

$4xz'' + 2z' + z = \frac{-1}{y^2}\left(4xy'' + 2y' - y - \frac{8xy'^2}{y}\right) = \frac{2}{y^3}(y^2 + 4xy'^2)$ donc $\frac{y'}{y} = \pm\frac{1}{\sqrt{-4x}}$ et $y = \lambda\exp(\pm\sqrt{-x})$ pour $x < 0$.

Résolution sans indication : on pose $x = \varepsilon t^2$ et $y(x) = z(t)$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon z = 0$.

Correction de l'exercice 4063 ▲

1. $g(x) = be^{-ax} + \int_{t=0}^{x} e^{a(t-x)}f(t)\,dt$.
2. $\int_{x=0}^{X} g(x)\,dx = \frac{b}{a}(1-e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\int_{x=t}^{X} e^{a(t-x)}f(t)\,dx\,dt = \frac{b}{a}(1-e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\frac{1-e^{a(t-X)}}{a}f(t)\,dt$

   $\to \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $X \to +\infty$.

Donc l'intégrale de g converge. On montre la convergence absolue par majoration élémentaire.

Correction de l'exercice 4064 ▲

1. $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}, \quad y = (\gamma t + \beta)e^{2t}, \quad z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}.$
2. $y = -1 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}, \quad z = -1 + \lambda(1+\alpha)e^{\alpha t} + \mu(1+\beta)e^{\beta t}, \quad \alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$
3. $y = \frac{-3\cos t - 13\sin t}{25} + (at+b)e^{2t}, \quad z = \frac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at+a+b)e^{2t}.$
4. $x = (a + bt + ct^2)e^t, \quad y = \left(a + \frac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t, \quad z = \left(a - \frac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t.$
5. $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t},$
   $y = \frac{1}{2}(-a+5b+3c) - 2(b+c)e^t + \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t},$
   $z = \frac{1}{2}(a-5b-3c) + 3(b+c)e^t - \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}.$
6. $x = (at^2 + (a+b+\frac{1}{2})t + a+b+c)e^t,$
   $y = (at^2 + (b-a+\frac{1}{2})t + a+c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t},$
   $z = (-at^2 + (a-b-\frac{1}{2})t - c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$

Correction de l'exercice 4065 ▲

$y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Rightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t.$
Résolution par DSE $\Rightarrow x = a(1 + t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

Correction de l'exercice 4068 ▲

Dériver deux fois. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{2} + \lambda\,\mathrm{sh}\,x + \mu\cos x.$

Correction de l'exercice 4069 ▲

1. $z' + \frac{z}{\mathrm{th}\,x} = 0.$
2. $y = \frac{ax+b}{\mathrm{sh}\,x}.$
3.
4.
5.

Correction de l'exercice 4070 ▲

1. spectre $= (x^2+1)$, $f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}.$
2. Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \Leftrightarrow f = af_\lambda + bf_{-\lambda}.$
   Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = (at+b)e^{-t^2/2}.$
3. $\Phi^2(y) = -2y \Leftrightarrow y = e^{-t^2/2}\left(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\right).$

Correction de l'exercice 4071 ▲

1. $\lambda = n^2 : P(X) = aX^n.$
2. $\lambda > 0 : f(x) = \alpha x^{\sqrt{\lambda}} + \beta x^{-\sqrt{\lambda}}.$
   $\lambda = 0 : f(x) = \alpha + \beta\ln x.$
   $\lambda < 0 : f(x) = \alpha\cos\left(\sqrt{-\lambda}\ln x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{-\lambda}\ln x\right).$
3. $\lambda \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\exp\lambda\left(\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right).$

Correction de l'exercice 4072 ▲

1. $\lambda = 2k$, $P = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$ pour $-n \leqslant k \leqslant n$.
2. $\lambda = 0$, $P = \alpha X^{2n}$.
3. $\lambda = 0$, $P = \alpha(X^2+1)^n$.

Correction de l'exercice 4073 ▲

$y = \int_{t=0}^{x} g(t)\,dt \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{x} \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$. Continuité en 0 $\Rightarrow g(x) = \alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 4074 ▲

Étudier $e^{-A}(y-z)$, $A' = a$.

Correction de l'exercice 4075 ▲

Point de concours : $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Correction de l'exercice 4077 ▲

1.
2. Soient y_0 une solution particulière et y_1 une solution non nulle de l'équation homogène : $y_1(x) = e^{-A(x)}$ avec $A' = a$. Alors $y_0(x+T) = y_0(x) + \alpha y_1(x)$, et pour une solution y quelconque, $y = y_0 + \lambda y_1$: $y(x+T) - y(x) = (\alpha + \lambda(e^{-I}-1))y_1(x)$ où $I = \int_{t=0}^{T} a(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 4078 ▲

$\lambda \neq 0 : \quad f(x) = a\sin(\alpha x), \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4} (\operatorname{mod} \pi)$
$\lambda = 0 : \quad f = 0.$

Correction de l'exercice 4079 ▲

$f(1) = e^{-k}\int_{t=0}^{1} g(t)e^{kt}\,dt$.
Avec Cauchy-Schwarz on obtient $\int_{t=0}^{1}(f'(t)+kf(t))^2\,dt \geqslant \frac{2k}{1-e^{-2k}}f(1)^2 = 9\frac{2k}{1-e^{-2k}}$.
Il y a égalité pour $f(t) = 3\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^k-e^{-k}}$.

Correction de l'exercice 4080 ▲

1. $u_n - u(t_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t} u'(x)\,dx\,dt$ et on majore l'intégrale interne par Cauchy-Schwarz.
2. $w + w'' = u'$ donc $w(t) = \int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,dx + \alpha\cos t + \beta\sin t$ puis

$$\begin{aligned}
\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt &= \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,dx\,dt \\
&= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t=x}^{t_n+2\pi}\sin(t-x)u'(x)\,dt\,dx \\
&= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} u'(x)(\cos(t_n-t)-1)\,dx \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$

et $\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt = w(t_n) - w(t_n+2\pi) = -\int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} \sin(t-x)u'(x)\,dx$.

Correction de l'exercice 4081 ▲

1. Formule de Duhamel : $y(t) = -\int_{x=0}^{t} e^{t-x} f(x)\,dx + \lambda e^t$.
   Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ donc toutes les solutions de (E) sont bornées au voisinage de $-\infty$.
   Pour $t \geqslant 0$ on a $y(t) = e^t\Big(\lambda - \int_{x=0}^{t} e^{-x} f(x)\,dx\Big)$ donc il y a au plus une valeur de λ telle que y soit éventuellement bornée au voisinage de $+\infty$, c'est $\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx$.
   Pour ce choix on a : $|y(t)| = \Big|\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_{x=t}^{+\infty} |f(x)|\,dx \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.
2.
$$\begin{aligned}\int_{t=a}^{b} |F(t)|\,dt &\leqslant \int_{t=a}^{b}\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}|f(x)|\,dxdt\\ &\leqslant \int_{x=a}^{b}\int_{t=a}^{x} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx + \int_{x=b}^{+\infty}\int_{t=a}^{b} e^{t-x}|f(x)|\,dtdx\\ &\leqslant \int_{x=a}^{b}(1-e^{a-x})|f(x)|\,dx + \int_{x=b}^{+\infty}(e^{b-x}-e^{a-x})|f(x)|\,dtdx\\ &\leqslant \int_{x=-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

   donc F est intégrable. $F' = F - f$ est aussi intégrable et $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F'(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Correction de l'exercice 4082 ▲

Poser $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\,dt$ puis résoudre :

$$\begin{cases} F(x) &= x - 1 + G'(x)\\ G(x) &= x - 1 + F'(x)\\ F(0) &= G(0) = 0.\end{cases}$$

On trouve $f(x) = g(x) = 1$.

Correction de l'exercice 4083 ▲

y' étant bornée, y admet une limite finie en tout point fini donc la solution non prolongeable est définie sur $\mathbb{R}$. Une solution y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ vu l'équation et $y'' = (1+\sin(x+y))\cos(x+y)$ est du signe de $\cos(x+y)$. En un point (x_0, y_0) tel que $x_0 + y_0 \equiv \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $y'' = 0$ et $\frac{d}{dx}(x+y) \neq 0$ donc y'' change de signe et il y a inflexion. En un point (x_0, y_0) tel que $x_0 + y_0 \equiv \frac{3\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi)$ on a $x + y =$cste (car $y =$ cste $- x$ est solution et il y a unicité) donc il n'y a pas inflexion.

Correction de l'exercice 4084 ▲

1. thm de Cauchy-Lipschitz linéaire.
2. $x \mapsto A(-x)$ et $x \mapsto -B(-x)$ sont solutions de (E) et vérifient les bonnes conditions initiales.
3. Résoudre $u''(x) + ku(x) = 2d\cos(x)u(x)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4085 ▲

1.
2. Oui, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.
3. Oui : si $g \in E$ alors $f = t \mapsto \int_{s=-\infty}^{t} e^{s-t} g(s)\,ds$ appartient à E et $f + f' = g$.

Correction de l'exercice 4086 ▲

1.
2. $u_p(x) = -\int_{t=0}^{x} pf(t)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt + \frac{\mathrm{sh}(x/p)}{\mathrm{sh}(1/p)}\int_{t=0}^{1} pf(t)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1-t}{p}\right)dt$.
3. TCD : lorsque $p \to \infty$ $u_p(x) \to -\int_{t=0}^{x}(x-t)f(t)\,dt + x\int_{t=0}^{1}(1-t)f(t)\,dt = \int_{t=0}^{x} t(1-x)f(t)\,dt + \int_{t=x}^{1} x(1-t)f(t)\,dt$ (primitive deuxième de $-f$ s'annulant en 0 et 1).

Correction de l'exercice 4087 ▲

1. Il suffit de démontrer que les solutions de $(\mathscr{E})$ sont développables en série entière. La méthode des coefficients indéterminés donne $n(n-1)a_n = (\lambda-1)a_{n-4}$ si $n \geqslant 4$ et $a_2 = a_3 = 0$ d'où $a_{4k} = \frac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i-1)}$, $a_{4k+1} = \frac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i+1)}$, $a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$. On obtient une série de rayon infini pour tout choix de a_0, a_1 donc les solutions DSE forment un espace vectoriel de dimension 2 et on a ainsi trouvé toutes les solutions.
2. On doit avoir $H''(x) - 2xH'(x) + ((2-\lambda)x^2 - 1)H(x) = 0$. Si H est une fonction polynomiale non nulle, en examinant les termes de plus haut degré on obtient une contradiction. Donc il n'existe pas de telle solution.

Correction de l'exercice 4088 ▲

Considérer $h(t) = a + \int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t) \leqslant g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel.

Correction de l'exercice 4089 ▲

$f(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\sin(x-t)\,dt + \lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $g = f + f''$.

Correction de l'exercice 4090 ▲

On pose $\varphi(t) = f''(t) + f'(t) + f(t)$.
$f(t) = e^{-t/2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{u=0}^{t}\varphi(u)e^{u/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}(u-t)}{2}\right), du + A\cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)\right]$.

Correction de l'exercice 4092 ▲

1. $y = \int_{t=\alpha}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt + y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A' = a$ et $A(\alpha) = 0$.
   Comme $a \geqslant 1$, on a $A(x) \geqslant x - \alpha$ et $A(t) - A(x) \leqslant t - x$ pour $t \leqslant x$.
   Donc $|y| \leqslant \int_{t=\alpha}^{z}|b(t)|e^{t-x}\,dt + \int_{t=z}^{x}|b(t)|e^{t-x}\,dt + |y(\alpha)|e^{\alpha-x} \leqslant \|b\|_\infty e^{z-x} + \sup_{[z,+\infty[}|b| + |y(\alpha)|e^{\alpha-x}$.
   On choisit z tel que $z \to +\infty$ et $x - z \to +\infty \Rightarrow$ cqfd.
2. Comme $A(t) - A(x) \leqslant t - x$ pour $t \leqslant x$, l'intégrale $\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$. Comme $e^{-A(x)} \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$, c'est la seule.

Correction de l'exercice 4093 ▲

1. Sinon, la convexité de y est incorrecte.
2. S'il existe x tel que $z(x) = z'(x) = 0$, alors $z = 0$ ce qui est absurde.
   S'il existe x tel que $z(x) = 0 \neq z'(x)$, alors par convexité, z ne peut s'annuler ailleurs.

Correction de l'exercice 4095 ▲

Si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées alors y_1'' et y_2'' sont intégrables donc $y_i'(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $W_{y_1,y_2}(t) = 0$ pour tout t.

Correction de l'exercice 4096 ▲

1. On suppose $y \neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé, donc la notion de zéros consécutifs est pertinente. Enfin, $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ sont de signes opposés sinon il existe un autre zéro dans $]x_0, x_1[$.
2. $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$ (non simplifiable).
3. Si z ne s'annule pas dans $]x_0, x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1) - W(x_0)$ si $z(x_0) \neq 0$ ou $z(x_1) \neq 0$.
4. On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0, x_1[$ et en permutant les rôles de u et y, le prochain zéro éventuel de u vient après y_1. Sinon, $u = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)} y$.

Correction de l'exercice 4097 ▲

1.
2. (a) Wronskien.
   (b) $\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - zy'}{y^2}$ est de signe constant $\Rightarrow \frac{z}{y}$ est monotone.
   $\frac{z}{y}$ admet des limites infinies en u et v. TVI

Correction de l'exercice 4098 ▲

$z' = -\frac{\lambda}{t^2}\sin(t-a)y(t)$ donc si y ne s'annule pas sur $]a, a+\pi[$, alors z est strictement monotone sur $[a, a+\pi]$. Mais $z(a+\pi) - z(a) = y(a+\pi) + y(a) \Rightarrow$ contradiction de signe.

Correction de l'exercice 4099 ▲

1. L'ensemble des zéros est localement fini d'après Cauchy-Lipchitz.
   Si y ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$, par exemple $y > 0$, alors y est concave positive donc minorée, donc $y'' \to -\infty$ ce qui implique $y', y \to -\infty$, contradiction.
2.
3. Soit $b_n = \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Alors $b_{n+1} \leqslant 2\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \leqslant b_n$ et $b_n \to 0$ donc $b_n \sim b_{n+1} \sim 2\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right)$.
   Alors $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{2}$, $b_n \sim \frac{1}{2n}$ et $a_n \sim 2\ln n$.

Correction de l'exercice 4100 ▲

Les formes linéaires $y \mapsto y(a)$ et $y \mapsto y(b)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des solutions de l'équation homogène.

Correction de l'exercice 4101 ▲

On se ramène au cas $z = 0$. Soit x tel que $y(x) < 0$ et $y'(x) = 0$. Alors $y''(x) < 0$, donc y n'est pas minimale en x. Donc y n'a pas de minimum local sur $]a, +\infty[$.

Correction de l'exercice 4102 ▲

Si $x_i(0) > 0$ pour tout i on obtient une contradiction en considérant le plus petit t tel qu'il existe i avec $x_i(t) < 0$. Cas général : dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales...

Correction de l'exercice 4103 ▲

$f'(x) = \frac{x+i}{2(x^2+1)} f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right)$.

Correction de l'exercice 4104 ▲

1. Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda \Delta f$ avec $\lambda > 0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.
2. $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} f'(t)g'(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f''(t)g(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} f(t)g''(t)\,dt$.
3. (a)
   (b) Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$. Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε, et on a $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1) f_\lambda = \varphi$ d'où $f_\lambda(x) = \int_{t=A}^{x} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}) + \beta\sin(x\sqrt{-\lambda})$. En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\left(A + \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.
   Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f_\lambda'(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Correction de l'exercice 4105 ▲

1. Après le prolongement indiqué on peut appliquer le relation de Parseval à f et f' sachant que $c_0(f) = 0$ par imparité et $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leqslant |c_n(f')|$ pour $n \neq 0$.
2. $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = \left[xx'\right]_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.
   Rmq : il n'est pas nécessaire d'avoir q de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Il existe x_0 de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant l'équation différentielle. Par différence avec x_0 on se ramène au cas $f = 0$ et il faut montrer que l'application $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x(0), x(\pi))$ est bijective, en notant $\mathscr{S}$ l'espace des solutions de l'équation homogène $x'' + qx = 0$. Or φ est linéaire et est injective d'après la question précédente, c'est donc une bijection car $\dim \mathscr{S} = 2$.
   Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^1$ est inutile, continue suffit.

Correction de l'exercice 4106 ▲

x et $1/x$ sont solution $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ donc une condition nécessaire est : $q(t) \leqslant 0$ et $q = -x'^2/x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, supposons q négative de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)x$ alors sur tout intervalle I où q ne s'annule pas on a $x'' = r(t)x' + r'(t)x$ donc

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

donc une deuxième condition nécessaire est : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Ces deux conditions sont suffisantes si q est strictement négative.

Correction de l'exercice 4107 ▲

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^{t} A(u)X_k(u)\,du$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4108 ▲

Pour $n=1$ et $A(t)=a>0$ on trouve après les incantations usuelles (équation homogène, variation de la constante et mise en forme de l'intégrale) que $X\ :\ t\mapsto\int_{u=0}^{1}F(tu)u^{a-1}\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0 et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n=1$ et A non constante, on trouve de même :

$$X(t)=\int_{u=0}^{1}F(tu)u^{A(0)-1}\exp\Big(\int_{v=t}^{tu}\frac{A(v)-A(0)}{v}\,dv\Big)\,du$$

et l'on voit que X est $\mathscr{C}^\infty$ en écrivant $\frac{A(v)-A(0)}{v}=\int_{w=0}^{1}A'(vw)\,dw$.
Pour n quelconque et A constante : alors la fonction $X\ :\ t\mapsto\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}F(tu)\,du$ est l'unique solution prolongeable en 0, en convenant que $u^{A(0)-I}=\exp((A(0)-I)\ln(u))$ (l'intégrale converge en 0 car $u^{A(0)-I}=O(u^{\alpha-1}\ln(u)^n)$ pour tout $\alpha>0$ minorant les parties réelles des valeurs propres de $A(0)$).
Pour A non constante, on met l'équation sous forme intégrale :

$$tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)\Leftrightarrow X(t)=\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

Soit $a>0$ à choisir. Posons $E=\mathscr{C}([-a,a],(x^2+1)^{n)})$ et pour $X\in E$:

$$\Phi(X)=t\mapsto\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

On a facilement : $\Phi(X)\in E$ si $X\in E$ et Φ est contractante sur E pour $\|\ \|_\infty$ si a est choisi suffisament petit. Donc l'équation $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$ admet une solution (unique) définie au voisinage de 0, et cette solution est prolongeable en une solution sur $\mathbb{R}$ car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en dehors de 0. Par ailleurs, on a :

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\ X(t)=\int_{u=0}^{1}u^{A(0)-I}\{F(tu)-(A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du,$$

ce qui montre par récurrence sur $k\in|||$ que X est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4109 ▲

1. Poser $F(t)=\int_{u=t_0}^{t}f(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $F'(t)\leqslant g(t)+kF(t)$ par la formule de Duhamel.
2.

$$\begin{aligned}
M'=AM&\Rightarrow |||M'(t)|||\leqslant K|||M(t)|||\\
&\Rightarrow |||M(t)-I|||\leqslant K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\leqslant 1+K\int_{u=t0}^{t}|||M(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||M(t)|||\leqslant 1+K\int_{u=t0}^{t}e^{K(t-u)}\,du=e^{K(t-t_0)}.\\
(M-N)'=(A-B)M+B(M-N)&\\
&\Rightarrow |||(M-N)'(t)|||\leqslant \eta e^{K(t-t_0)}+(K+\eta)|||(M-N)(t)|||\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+(K+\eta)\int_{u=t_0}^{t}|||(M-N)(u)|||\,du\\
&\Rightarrow |||(M-N)(t)|||\leqslant \underbrace{\frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+\frac{(K+\eta)\eta}{K}\int_{u=t_0}^{t}e^{(K+\eta)(t-u)}(e^{K(u-t_0)}-1)\,du}_{=e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)}
\end{aligned}$$

3. $X_0(t)=M_0(t)\alpha$ et $Y_0(t)=N_0(t)\alpha$, d'où $\|X_0(t)-Y_0(t)\|\leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)\|\alpha\|$.

Correction de l'exercice 4110 ▲

1. $y = -1 + \frac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.
2. $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} (\bmod \pi)$.
3. $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x} + \lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.
4. $y = -\ln\big(1 - x(1 - 1/e)\big)$.
5. $y = \left(\lambda + \frac{x}{2}\right)\left|\lambda + \frac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 4111 ▲

1. $y = \frac{1-\lambda^2 x^2}{2\lambda}$, $\lambda > 0$.
2. $y = -x \pm \sqrt{2x^2 - \lambda}$ ou $y = x(-1 \pm \sqrt{2})$.
3. $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda^2 x^2}}{2\lambda}$ ou $y = \pm x$ ou $y = 0$.
4. $y = -x \pm \sqrt{\lambda + 3x^2}$ et $y = x(-1 \pm \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 4112 ▲

1. $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ ou $y = 0$.
2. $y = \pm\sqrt[4]{x^2 + \frac{\lambda}{x^2}}$.
3. $y = ((\sqrt{x} + 2)^2 + \lambda e^{\sqrt{x}})^2$.
4. $y = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{\lambda - x}\right)^2$ ou $y = 0$.
5. $y = \pm\frac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda - x^4}}$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 4113 ▲

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 4114 ▲

$y = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 4115 ▲

1. $\gamma_1(t) = (-x(t), y(t))$ et $\gamma_2(t) = (x(-t), -y(-t))$ sont aussi solutions de (S).
   Par ailleurs, la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, en particulier s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t. De même s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$ pour tout t.
   Pour λ, μ non nuls et x ne s'annulant pas, $t \mapsto (\lambda x(\mu t), \lambda y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu = \lambda$.
   L'ensemble des trajectoires maximales est donc stable par les symétries par rapport aux deux axes et par les homothéties de centre $(0,0)$. De plus toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport à cet axe.
2. $x'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = 0$ ou $y(t_0) = 0$. Dans le premier cas on a $x(t) = 0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire (solution de $y' = y^2$). Dans le second cas $x(t_0)$ est arbitraire (Cauchy-Lipschitz) donc l'ensemble des points à tangente verticale est la réunion des deux axes privé de $(0,0)$ (où il n'y a pas de tangente).
   $y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = \pm y(t_0)$, quantité arbitraire, donc l'ensemble des points à tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0,0)$.
   Solutions particulières : $x(t) = 0, y(t) = \frac{1}{\lambda - t}$.

3. En supposant Φ de classe $\mathscr{C}^1$ on obtient l'équation $\frac{2}{n}x\Phi\Phi' = \Phi^2 - x^2$ soit $\frac{2}{n}x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \Phi^2$.
On obtient $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.
Une courbe intégrale (en fait une trajectoire) qui ne touche aucun des deux axes vérifie l'hypothèse $y =$ fonction de x car x' ne peut s'annuler donc x est une fonction injective de t. Une trajectoire qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe (déjà vu) et une trajectoire qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$ le traverse ($y' \neq 0$), donc est réunion de sous-arcs localement d'un seul côté de l'axe des x, de la forme $y = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}$.

Correction de l'exercice 4116 ▲

Méthode d'Euler :

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.000	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.348
z	0.000	0.100	0.180	0.243	0.292	0.328	0.354	0.372	0.383	0.387	0.387

Solution théorique : $y = e^{-x}$, $z = xe^{-x}$.

Correction de l'exercice 4117 ▲

1. $y = 4\arctan((\sqrt{2}-1)e^x)$.
2. $y = 2a - (\lambda x + \mu)^{2/3}$.
3. $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)$.

Correction de l'exercice 4119 ▲

Si $a > 0$, $y'(0) = a^3$, si $a = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 6$. Donc y est croissante au voisinage de 0.
Si $y' > 0$ sur $]0,\gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et $y' > 0$ sur $[\gamma, \gamma+\varepsilon[$ donc, par connexité, $y' > 0$ sur $]0,\beta[$.
$y' \geqslant y^3 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{y'}{y^3} \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2a^2}$.

Correction de l'exercice 4120 ▲

1. Régionnement.
2. idem.
3. Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Rightarrow -y'e^{-y} > 1 \Rightarrow x > e^{-y} + C > C$.

Correction de l'exercice 4122 ▲

Supposons $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geqslant 0$. On peut alors poser $t_1 = \min\{t > t_0 \,|\, x^2(t) - t > 0\}$. On a alors $x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$. On a $y'(t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Cela contredit le fait que, pour tout $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) < 0$. De même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $z(t) = x(t) + \sqrt{t}$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent la courbe intégrale reste dans D_0. Si la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $-\beta \leqslant x'(t) \leqslant 0$. On en déduit que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$ et donc que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β. On prolonge la fonction en β et la fonction prolongée vérifie (E) sur $[t_0, \beta]$ ce qui est impossible. On en déduit que $\beta = +\infty$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$, $x'(t) < 0$, donc x est décroissante. Si $x(t)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors $x'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -t$, ce qui est impossible. Par conséquent $x(t) \to -\infty$ (lorsque $t \to +\infty$). En particulier, pour t assez grand, $x(t) \leqslant 0$. En dérivant (E) on a $x''(t) = 2x(t)(x^2(t) - t) - 1$. Si, à partir d'un certain rang, pour tout t, $x''(t) \geqslant 0$ alors x' est croissante et majorée. Elle ne peut tendre que vers 0 car sinon $x'(t) \sim \ell$, puis $x(t) \sim \ell t$ et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$. Sinon il existe t_1 tel que $x''(t_1) < 0$. S'il existe $t_2 > t_1$ tel que $x''(t_2) = 0$ (avec t_2 minimal) alors $x'''(t_2) = 2x + \frac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand. Ceci est impossible et donc dans ce cas $x''(t)$ reste négatif lorsque t tend vers $+\infty$, on a alors $0 < t - x^2(t) \leqslant \frac{-1}{2x(t)}$. Par conséquent $x^2(t) - t \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, on en déduit que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Correction de l'exercice 4126 ▲

Soient y,z deux solutions distinctes. D'après Cauchy-Lipschitz, $y'(a) \neq z'(a)$, donc par exemple $y'(a) > z'(a)$. Soit $c > a$ maximal tel que : $\forall\, x \in\,]a,c[,\ y(x) > z(x)$. Donc $y-z$ est strictement positive convexe sur $[a,c]$, et s'annule en a et c, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 4130 ▲

1. Sinon $d(0, f'(\mathbb{R})) > 0$ et f ne peut pas être minorée.
2. Supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ on a $\nabla f(a) \neq 0$.
   On considère l'équation différentielle autonome : $x' = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Pour $x(0)$ donné il existe une solution maximale, et elle est définie sur $\mathbb{R}$ car x' est bornée. Alors la fonction : $t \mapsto f(x(t))$ est $\mathscr{C}^1$ minorée sur $\mathbb{R}$ donc il esiste une suite de réels (t_n) telle que $\frac{d}{dt}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4131 ▲

$f_u : p \mapsto p + u \wedge p$ est linéaire injective car $f_u(p) = 0 \Rightarrow p \perp p$, donc bijective. L'application $u \mapsto f_u$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est $\mathscr{C}^\infty$, donc il en est de même de l'application inverse : $u \mapsto (f_u)^{-1}$ et l'équation différentielle donnée équivaut à $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ qui relève de la théorie de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I. D'après l'équation différentielle, $(u' \mid u) = 0$ d'où $\|u\|$ est constant. Alors $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ est borné, donc u admet une limite finie en tout point fini par uniforme continuité, ceci prouve que $I = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4132 ▲

1. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_{t=0}^x (f_n - f_{n-1})(t - t^2)\,dt$ donc par récurrence $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$.
   De plus $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant x\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ d'où $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leqslant \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \int_{t=0}^x (t-t^2)\,dt \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ et $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ ce qui prouve que la série télescopique $\sum(f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente.
2. Par passage à la limite uniforme sous le signe intégral on a $f(x) = 1 + \int_{t=0}^x f(t-t^2)\,dt$ d'où f est $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$ ce qui entraine le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f par récurrence. $f'(0) = f'(1) = f(0) = 1$.
3. f' est positive d'après l'équation différentielle vérifiée par f et $f''(x) = (1-2x)f'(x-x^2)$ est du signe de $1-2x$, c'est-à-dire que f est convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et concave sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
4. $1 + x = f_1(x) \leqslant f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^\infty (f_{k+1}(x) - f_k(x))$. De plus, $f'(x) = f(x-x^2) \leqslant f(x)$ d'où $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est décroissante et vaut 1 en 0 ce qui prouve que $f(x) \leqslant e^x$.

Correction de l'exercice 4133 ▲

1. Qu'il en existe et qu'il y en a une unique maximale, son intervalle de définition est ouvert.
2. Soit $(]\alpha, \beta[, x)$ une solution maximale. Si $t_0 \in\,]\alpha, \beta[$ est tel que $x(t_0) = a$ alors $x'(t_0) > 0$ donc $x(t) - a$ est du signe de $t - t_0$ au voisinage de t_0. Ceci montre que t_0 (éventuel) est unique, et en particulier $t_0 < 0$. De même, il existe au plus un réel t_1 tel que $x(t_1) = b$ et $t_1 < 0$. Par ailleurs l'existence de l'un des deux réels t_0 ou t_1 exclut l'autre. Enfin, $a \leqslant x(t) \leqslant b$ pour tout $t \in [0, \beta[$ donc d'après le théorème des bouts on a $\beta = +\infty$.
3. Soit $\varphi : [a,b] \to [a,b], y \mapsto x(T)$. Comme deux courbes intégrales maximales distinctes n'ont aucun point commun, φ est injective et par disjonction de cas on montre que φ est strictement croissante et satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires. En particulier φ est continue et $\varphi(y) - y$ prend une valeur positive en a, négative en b donc s'annule pour un certain $y \in [a,b]$. Pour cet y, la solution correspondante est T-périodique.

Correction de l'exercice 4134 ▲

Remarque : la seule continuité de f implique l'existence d'une solution maximale à condition initiale donnée (thm. de Cauchy-Arzela, HP), mais pas son unicité.
thm des bouts : supposons y solution, définie sur $[t_0, \alpha[$ avec $\alpha < \sup J$.
On a $\frac{d}{dt}(\|y\|^2) = 2(y' \mid y) = 2(f(t,y) \mid y) \leqslant 2a\|y\|^2 + 2b$, ce que l'on écrit $z' = 2az + 2b - c$ avec $z = \|y\|^2$ et c fonction continue positive. Donc $z(t) = \exp(2A(t) - 2A(t_0))z(t_0) + \int_{s=t_0}^{t} \exp(2A(t) - 2A(s))(2b(s) - c(s))\,ds$ où A est une primitive de a sur J. On en déduit que z est majorée sur $[t_0, \alpha[$ car A et b sont continues sur $[t_0, \alpha]$ et $c \geqslant 0$, donc $\|y'\| = \|f(t,y)\|$ est aussi majorée, et $\int_{s=t_0}^{\alpha} y'(s)ds$ est absolument convergente. Ainsi y admet une limite finie en α^-, et l'on peut prolonger y au dela de α avec le thm de Cauchy-Arzela ; y n'est pas maximale.

Correction de l'exercice 4135 ▲

1. $\frac{d}{dt} f(x,y) = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}$ donc f convient si $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(y-1)$ (condition suffisante). Il n'existe pas de telle fonction (thm. de Schwarz), mais on peut accepter f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)x(y-1)$ où λ est une fonction bien choisie (appelée *facteur intégrant*). On voit immédiatement que $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy}$ convient, d'où $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$.
2. D'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz, s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t, et de même pour y. Ainsi, si on fixe une condition initiale $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t. De plus, par le même raisonnement, si $(x(0), y(0)) \neq (1,1)$ alors $(x(t), y(t)) \neq (1,1)$ pour tout t. Désormais on suppose ces conditions satisfaites. Soit $k = f(x(0), y(0)) = x(0) + y(0) - \ln(x(0)y(0))$. Par étude de fonction, on voit que $k \neq 2$ et la courbe C_k d'équation $f(x,y) = k$ est une courbe fermée de classe $\mathscr{C}^1$ entourant le point $(1,1)$. Le point $M_t = (x(t), y(t))$ se déplace sur C_k avec une vitesse numérique $ds/dt = \sqrt{x^2(1-y)^2 + y^2(x-1)^2} \geqslant \alpha_k > 0$ où α_k ne dépend que de k. On en déduit qu'une abscisse curviligne de M_t décrit $\mathbb{R}$ quand t décrit $\mathbb{R}$. En particulier il existe $t_0 > 0$ tel que $s(t_0) - s(0) = \text{longueur}(C_k)$ ce qui implique $M_{t_0} = M_0$ et le mouvement est t_0-périodique.

Correction de l'exercice 4137 ▲

$\lim = 3$.

Correction de l'exercice 4138 ▲

1.
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pm 1}{1+x^2}$, $+$ si $y > x$, $-$ si $y < x$.
   $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pm 1}{1+y^2}$, $-$ si $y > x$, $+$ si $y < x$.
3. Pour $y \geqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} + g(x,y)$, pour $y \leqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - g(x,y)$.

Correction de l'exercice 4141 ▲

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$.

Correction de l'exercice 4143 ▲

1.
2. $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Correction de l'exercice 4145 ▲

$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$.

Correction de l'exercice 4146 ▲

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -yf'(\pi/2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = xf'(0)$.

Correction de l'exercice 4147 ▲

1. f est homogène de degré 2, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré 1, donc ces trois fonctions tendent vers 0 en $(0,0)$. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Correction de l'exercice 4151 ▲

$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}$.

Correction de l'exercice 4152 ▲

1. pas de solution.
2. $f(x,y) = \frac{y-1}{x+y+1} +$ cste.
3. $f(x,y) = \frac{xy}{x+y} +$ cste.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} +$ cste.

Correction de l'exercice 4153 ▲

$f(y) = \lambda e^{-y}$, $F(x,y) = \lambda \left(\frac{x^2}{2} - (y+1)e^{-y} \right)$.

Correction de l'exercice 4154 ▲

$f(x,y) = g(x^2 + y^2)$.

Correction de l'exercice 4155 ▲

$f(y) = \frac{y}{k}$, $g(z) = kz + \ell$, $F(x,y) = \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) z + \frac{\ell y^2}{2k} + C$.

Correction de l'exercice 4156 ▲

1. $f(x,y) = -\frac{\ln x}{xy} - \frac{1}{x}$.
2. $y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}$.

Correction de l'exercice 4160 ▲

$\det(J_f) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Correction de l'exercice 4162 ▲

$f(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w) \text{ tq } u+v > 0,\ ue^{2w} - v > 0\}$.

Correction de l'exercice 4164 ▲

$y = -\frac{x}{2} + \frac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow$ tangente de pente $-\frac{1}{2}$, au dessus.

Correction de l'exercice 4165 ▲

1.
2. $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 4166 ▲

$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}$, $\varphi''(1) = -\frac{8}{27}$.

Correction de l'exercice 4169 ▲

$x = 1 - \frac{\lambda+\mu}{5} + \frac{\lambda^2+\lambda\mu}{25} + o(\lambda^2+\mu^2)$.

Correction de l'exercice 4170 ▲

$x = \mathrm{sh}(a),\ y = \mathrm{sh}(b) \Rightarrow u = \mathrm{sh}(a+b),\ v = \mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{ch}(a+b)$. donc $f(\mathbb{R}^2)$ est inclus dans l'hyperbole d'équation $v^2 - 2uv = 1$ et on doit avoir $v \geqslant u$ ce qui donne la branche supérieure.

Correction de l'exercice 4173 ▲

1. $f(x,y) = \int_{t=0}^{1}(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty))\,dt$.
2.
3.

Correction de l'exercice 4174 ▲

1. (a) thm des trois cordes pour $u \mapsto f(x+uh)$ sur $[-1,1]$.
   (b) Soit $\overline{B}_\infty(x,r) \subset U$ et y tel que $0 < \|x-y\|_\infty \leqslant r$. On note $t = \|x-y\|_\infty/r$ et $h = (y-x)/t$. Alors $y = x + th$ et $\|x \pm h\| = r$ donc :
   $$|f(x) - f(y)| \leqslant t\max(|f(x+h) - f(x)|, |f(x-h) - f(x)|) \leqslant Mt$$
   car la restriction de f aux côtés de $\overline{B}_\infty(x,r)$ est bornée (fonction convexe en dimension 1).
2. La surface représentative de f est au dessus de ses plans tangents.
3.

Correction de l'exercice 4176 ▲

1. $df_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(M^{k-1}H + \cdots + HM^{k-1})$.
2.
3. les matrices $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ sont toutes semblables à M_∞ et ont même exponentielle I.
4. $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi + 1/k \\ -4\pi^2/(2\pi + 1/k) & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4181 ▲

1. $xy/(x^2+y^2)$.
2. f est lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4182 ▲

1. $2x^4y^2 \leqslant (x^4+y^2)^2$.
2. $g_\theta(r) \sim r^2$.
3. $f(x,x^2) = -x^4$. Donc $(0,0)$ n'est pas minimum local de f.

Correction de l'exercice 4184 ▲

1.
2. $\|f(x)\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc $x \mapsto \|f(x)-a\|^2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En ce point on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$: $(f(x)-a \mid df_x(h)) = 0$ et df_x est surjective (linéaire injective en dimension finie) donc $f(x) = a$.

Correction de l'exercice 4185 ▲

1. Si u atteint son maximum en $(x,y) \in \Omega$ alors $d^2u(x,y)$ est négative, contradiction avec $\Delta u(x,y) > 0$.
2. Soit $u_p(x,y) = u(x,y) + (x^2+y^2)/p$: $\Delta u_p = \Delta u + 2/p > 0$ donc u_p relève du cas précédent.
   On a $\max\limits_{\Omega} u + \frac{M}{p} \geqslant \max\limits_{\Omega} u_p = \max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u_p \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u$ et on passe à la limite.
3. Soit $u_1(x,y) = u(x,y) + \alpha\ln(x^2+y^2)$ où α est tel que $M_1(r_1) = M_1(r_2)$, avec $M_1(r) = \max\limits_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$.
   On a $\Delta u_1 \geqslant 0$ d'où $M_1(r) \leqslant M_1(r_1) = M_1(r_2)$ c'est-à-dire :
$$M(r) \leqslant M(r_1) + \alpha\ln(r_1/r) = M(r_2) - \alpha\ln(r/r_2) = \frac{M(r_1)\ln(r_2/r) + M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Correction de l'exercice 4186 ▲

1. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$ et l'on a $0 = \Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ d'où :
$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi}$$
   Le crochet est nul par 2π-périodicité de g donc $h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) = 0$ soit $h'(r) = \frac{K}{r}$ et $K = 0$ par continuité de h' en 0.
2. $\pi r^2 f(0,0)$.

Correction de l'exercice 4187 ▲

1. $\det(J_\varphi(x,y)) = f'(x)f'(y) - g'(x)g'(y) > 0$ donc le théorème d'inversion locale s'applique, il suffit de vérifier l'injectivité de φ. Si $\varphi(x,y) = \varphi(u,v)$ alors :
$$|x-u| \leqslant |f(x)-f(u)| = |g(v)-g(y)| \leqslant |v-y|$$
$$|v-y| \leqslant |f(v)-f(y)| = |g(x)-g(u)| \leqslant |x-u|$$
   d'où $|x-u| \leqslant |x-u|$ et il y a inégalité stricte si $v \neq y$ ce qui est absurde donc $v = y$ et de même $u = x$.
2. On a $\varphi(x,y) = (u,v)$ si et seulement si $x = f^{-1}(u-g(y))$ et $y = f^{-1}(v - g(f^{-1}(u-g(y)))) = h(y)$. h est k^2-lipschitzienne donc le théorème du point fixe s'applique.

Correction de l'exercice 4188 ▲

Sinon il existe $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $g : x \mapsto f(x) - (a \mid x)$ n'a pas de point critique, donc pas de minimum ni de maximum. On a aussi $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ d'où $\sup(g) = +\infty$ et $\inf(g) = -\infty$. Considérons pour $r > 0$ $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \geqslant r\}$: $g(E_r)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle, et $\sup(g(E_r)) = \sup(g) = +\infty$, $\inf(g(E_r)) = \inf(g) = -\infty$, d'où $g(E_r) = \mathbb{R}$. Ainsi il existe des x de normes arbitrairement grandes tels que $g(x) = 0$ en contradiction avec la propriété $|g(x)|/\|x\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$.
Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathscr{C}^2$ est surabondante, la classe $\mathscr{C}^1$ suffit à conclure.

Correction de l'exercice 4189 ▲

Remarques :
– la transformation $f \mapsto g$ est appelée *transformation de Legendre*. On notera $g = f^*$ ci-dessous.
– l'hypothèse « H_f est définie positive en tout point » implique que f est convexe.
Étude d'un cas particulier : $f(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x \mid a) + \gamma$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors $(x \mid y) - f(x) = -\alpha\left\|x - \frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 + \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma$ d'où $f^*(y) = \alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2 - \gamma = \alpha^*\|y\|^2 + \beta^*(y \mid a) + \gamma^*$ avec $\alpha^* = 1/4\alpha$, $\beta^* = -\beta/2\alpha$ et $\gamma^* = \beta^2\|a\|^2/4\alpha - \gamma$. Ainsi, f^* a la même forme que f, et on vérifie immédiatement que $f^{**} = f$.
Cas général : on montre que f^* est bien définie, vérifie les mêmes hypothèses que f et que l'on a $f^{**} = f$.
1. Bonne définition de f^* : à y fixé on a $(x \mid y) - f(x) \to -\infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ donc le sup existe et est un max, atteint en un point x tel que $\nabla f(x) = y$. Ce point x est unique : en effet, si $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (h \mid \nabla f(x+th))$ est strictement croissante (définie-positivité de H_f) ce qui implique $\nabla f(x+h) \neq \nabla f(x)$. Ainsi,

$$f^*(y) = (y \mid y^*) - f(y^*) \text{ avec } \nabla f(y^*) = y.$$

2. f^* est $\mathscr{C}^2$ et H_{f^*} est définie-positive : d'après ce qui précède, la fonction ∇f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$; sa différentielle est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice H_f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc f^* est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $y, h \in \mathbb{R}^n$:

$$d(f^*)_y(h) = (\nabla f^*(y) \mid h) = (h \mid y^*) + (y \mid dy^*(h)) - (\nabla f(y^*) \mid dy^*(h)) = (h \mid y^*)$$

puisque $\nabla f(y^*) = y$. On en déduit : $\nabla f^*(y) = y^*$, puis $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$, matrice symétrique définie positive.
3. $f^*(y)/\|y\| \to +\infty$ lorsque $\|y\| \to \infty$: soit $a > 1$ et $M_a = \sup\{f(x),\ \|x\| \leqslant a\}$. Pour $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $x = ay/\|y\|$ on a $f^*(y) \geqslant (x \mid y) - f(x) \geqslant a\|y\| - M_a \geqslant (a-1)\|y\|$ si $\|y\|$ est assez grand.
4. $f^{**} = f$: car pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f^{**}(x) = (x \mid y) - f^*(y)$ où y est défini par $\nabla f^*(y) = x$, c'est-à-dire $y^* = x$ et donc $f^{**}(x) = (y^* \mid y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$.

Correction de l'exercice 4190 ▲

1. ???
2. On a pour $a, b \in \mathbb{R}$: $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$.
   Donc pour $f, h \in E$: $|T(f+h) - T(f) - (h \mid \varphi' \circ f)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty\|h\|^2$, ce qui prouve que T est différentiable en f de différentielle $h \mapsto (h \mid \varphi' \circ f)$. On en déduit alors que T est continue en f.

Correction de l'exercice 4191 ▲

1. $(0,0)$: non extrémal
   $(1,1)$: maximum local
2. $(0,0)$: non extrémal
   $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: minimum absolu
3. $(-2/15, -1/5)$: maximum local
   $(x,0)$: max. local pour $x < -1/3$, min. local pour $x > -1/3$
   $(0,y)$: max. local pour $y < -1/2$, min. local pour $y > -1/2$

4. $(2^{-1/3}, 4^{-1/3})$: maximum absolu
5. prendre le log. $(1,1)$: maximum absolu
6. $(-1,-1)$: non extrémal
7. $(1,0)$: minimum absolu
   $(e^{-2},0)$: non extrémal
8. $= MA + MB \Rightarrow$ minimum absolu sur $[A,B]$
9. $M \in \text{med}(A,B)$, $\overline{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \pm\frac{2\pi}{3}$
   $M = A, B$: minimum absolu
   $M = O$

Correction de l'exercice 4192 ▲

1.
2. (a) isobarycentre de ABC.
   (b) Point de Fermat ou A,B,C.
   (c) A,B,C.

Correction de l'exercice 4193 ▲

1. $4S = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.
2. max = $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4194 ▲

Existence d'un maximum par compacité. Soient x,y les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé du plan et (u,v,w) les coordonnées barycentriques de M par rapport à A,B,C (avec $u+v+w=1$). u,v,w sont des fonctions affines de x,y,z et (AB) a pour équation barycentrique $w=0$ d'où $d(M,AB) = \alpha|w|$ pour un certain réel $\alpha > 0$. De même pour $d(M,AC)$ et $d(M,BC)$ et $f(M) = \alpha\beta\gamma|u||v||w|$. Lorsque M varie dans le triangle, (u,v,w) décrit tous les triplets de réels positifs de somme 1 et on cherche le maximum du produit uvw, il est atteint quand u,v,w sont égaux, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle.

Correction de l'exercice 4196 ▲

Il existe une base orthonormale de E et un réel λ tels que $f(x) = \lambda x_1$ et $g(x) = \lambda x_1 e^{-x_1^2} e^{-x_2^2 - \dots - x_n^2}$. Donc g est maximale/minimale pour $x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$, $x_2 = \dots = x_n = 0$.

Correction de l'exercice 4197 ▲

Le minimum demandé existe car $\varphi(M,N,P) \to +\infty$ quand l'un au moins des points M,N,P tend vers l'infini sur sa droite personnelle. Soient $D_1 \cap D_2 = \{A\}$, $D_2 \cap D_3 = \{B\}$, $D_3 \cap D_1 = \{C\}$ et A', B', C' les milieux de $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. Déjà on a $\varphi(B',C',A') = \frac{3}{2}a$ et $\varphi(A,N,P) \geqslant 2AP \geqslant a\sqrt{3}$ donc le minimum n'est pas atteint lorsque l'un des points M,N,P est confondu avec l'un des points A,B,C, ni non plus si l'un des points M,N,P est hors du triangle ABC. Pour N,P fixés hors de D_1, on fait varier M sur D_1 : $M = A + t\vec{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et on considère $f(t) = \varphi(M,N,P)$. Alors $f'(t) = \left(\vec{AB} \mid \frac{\vec{MN}}{MN} + \frac{\vec{MP}}{MP}\right)$ donc $f(t)$ est minimal lorsque D_1 est la bissectrice extérieure des demi-droites $[MN)$ et $[MP)$.
Soit (M,N,P) un triplet réalisant le minimum de φ et α, β, γ les angles du triangle MNP en P, M et N. Les angles du triangle AMN sont $\pi/3$, $(\pi-\beta)/2$ et $(\pi-\gamma)/2$ d'où $2\pi/3 = \beta+\gamma = \pi-\alpha$ et donc $\alpha = \pi/3 = \beta = \gamma$. On en déduit que (MP) est paralèle à (AB), (MN) à (BC) et (NP) à (AC) puis que $(M,N,P) = (B',C',A')$.

Correction de l'exercice 4198 ▲

---

1. On fixe $A_i \in D_i$ et $\vec{u}_i$ un vecteur directeur de D_i. Soit $M_i = A_i + x_i\vec{u}_i$. Alors

$$\begin{aligned} f(M_1,M_2,M_3) = f(A_1,A_2,A_3) \\ &+ 2\Big((\vec{A_1A_2} \mid x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1) + (\vec{A_2A_3} \mid x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2) + (\vec{A_3A_1} \mid x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3)\Big) \\ &+ \Big(\|x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1\|^2 + \|x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2\|^2 + \|x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3\|^2\Big) \\ &= a + b(x_1,x_2,x_3) + c(x_1,x_2,x_3). \end{aligned}$$

   b est une forme linéaire et c est une forme quadratique positive, et même définie positive car $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sont deux à deux non colinéaires. Il en résulte que $f(M_1,M_2,M_3) \to +\infty$ lorsque $|x_1|+|x_2|+|x_3| \to \infty$, donc par continuité, f admet un minimum.
   Choisissons alors A_1,A_2,A_3 de sorte que $f(A_1,A_2,A_3)$ soit égal à ce minimum. On a alors $b = 0$ car (A_1,A_2,A_3) est point critique de f, d'où $f(M_1,M_2,M_3) > f(A_1,A_2,A_3)$ si $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ vu la définie-positivité de c. Ceci prouve l'unicité du triplet où f atteint son minimum.
2. On soupçonne fortement le triplet constitué des milieux des côtés. En notant A_1,A_2,A_3 ces milieux, il suffit de vérifier que la forme linéaire b de la réponse précédente est nulle, et c'est clairement le cas après regroupement autour de x_1, x_2, x_3.

Correction de l'exercice 4199 ▲

On paramètre le chemin en coordonnéees sphériques par $t \mapsto (\theta(t),\phi(t))$.
La longueur du chemin est $\int_{t=0}^{1} \sqrt{\phi'^2(t) + \sin^2(\phi(t))\theta'^2(t)dt} \geqslant \left|\int_{t=0}^{1} \phi'(t)dt\right|$ avec égalité si et seulement si $\theta' = 0$ et ϕ' est de signe constant. On trouve donc les méridiens.

Correction de l'exercice 4200 ▲

Soit $y \in B$ orthogonal à x. La fonction $g : \theta \mapsto f(x\cos\theta + y\sin\theta)$ admet un extrémum en 0, donc $g'(0) = 0$, soit $\nabla f(x) \perp y$. Si $x = 0$ on a donc $\nabla f(0) = 0$. Sinon, $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et en faisant un développement limité de $f(x - tx)$ on voit que $\lambda \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4201 ▲

$f(x,y) = (3x - 2y)e^{4(x-y)}$.

Correction de l'exercice 4202 ▲

$f(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + g(x+y)$.

Correction de l'exercice 4203 ▲

$f(x,y) = g(xy)$.

Correction de l'exercice 4204 ▲

$f(x,y) = \ln|xy| + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4205 ▲

$f(x,y) = g(\theta)$.

Correction de l'exercice 4206 ▲

1. $g(\rho,\theta) = \lambda(\rho)e^{-2\theta}$.

2. g est 2π-périodique, donc $\lambda = 0$, et $f = 0$.

Correction de l'exercice 4207 ▲

$f(x,y) = g\left(\frac{1+y^2}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 4209 ▲

$f(x,y) = \rho^{\alpha}A(\theta) + \rho^{1-\alpha}B(\theta)$.

Correction de l'exercice 4210 ▲

1. $(a+b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a+b(\alpha+\beta)+2c\alpha\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + (a+b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.
2.

Correction de l'exercice 4211 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Rightarrow f(x,y) = A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + B\left(\frac{x}{y}\right)$.

Correction de l'exercice 4212 ▲

$2tg'(t) + (1+t^2)g''(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{t}{2} + \lambda \arctan t + \mu$.

Correction de l'exercice 4213 ▲

1. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
   $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
   $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
2. $f(x,y) = \frac{xy}{16} + h(x) + k(y)$.

Correction de l'exercice 4214 ▲

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Rightarrow f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + h(xy)$.

Correction de l'exercice 4215 ▲

$(1-t^2)f'' - 2tf' = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \mu$.

Correction de l'exercice 4216 ▲

$\Delta f = 4(x^2+y^2)\Delta F$.

Correction de l'exercice 4217 ▲

1. $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}$.
2. $f(x,y) = \frac{xy}{2} + h(u) + k(v)$ avec $u+v = y$, $uv = x$.

Correction de l'exercice 4218 ▲

$f(r) = A\cos r + B\sin r$.

Correction de l'exercice 4219 ▲

1. Il existe G telle que $\frac{\partial G}{\partial u} = g + u\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial(ug)}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v} = g + v\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial(vg)}{\partial v}$.
   Donc $G = ug + \varphi(v) = vg + \psi(u)$, d'où $g = \frac{\varphi(v)-\psi(u)}{v-u}$. La réciproque est immédiate.
2. $f(x,y) = x\left(\varphi\left(y - \frac{1}{x}\right) + \psi\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)$.

Correction de l'exercice 4222 ▲

1.
2.
3. $\frac{1}{2}f(0)$.

Correction de l'exercice 4226 ▲

DL de $1-\cos u \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Correction de l'exercice 4228 ▲

1.
2. $\ln k$.
3. $\frac{\pi}{8}$.
4. $\frac{4}{e}$.
5. $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \int_{t=0}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
6. $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.
7. $\frac{4}{\pi}$.

Correction de l'exercice 4231 ▲

1.
2. $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 4232 ▲

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } b_n < -1 \\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant b_n \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } b_n > 1, \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n < -1 \\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant a_n \leqslant 1 \\ a_n & \text{si } a_n > 1. \end{cases}$$

Donc $a_{n+1} = f(a_{n-1})$, $b_{n+1} = g(b_{n-1})$. Point fixe : $a_n \to \sqrt{8}-3$, $b_n \to 3-\sqrt{8}$.

Correction de l'exercice 4235 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 4236 ▲

$u=\pi-t \Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{t=0}^{\pi}\frac{1}{1+\sin t}\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{t=-\pi/2}\pi/2\,\frac{1}{1+\cos t}\,dt=\pi$.

Correction de l'exercice 4238 ▲

$I_n=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

Correction de l'exercice 4239 ▲

Couper en intervalles de $k\pi/n$. On obtient $I_n=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $n\geqslant 1$.

Correction de l'exercice 4240 ▲

f est paire, π-périodique. $f'(x)=0$ pour $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=f(\pi/4)=\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4244 ▲

Comparaison entre $\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{(1+t)^2}$ et son approximation des trapèzes. Découper et intégrer deux fois par parties, $u_n\to\frac{3}{8}$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4247 ▲

$I=\Big[f'(t)(1+\cos t)\Big]_0^{2\pi}+\int_{t=0}^{2\pi}f''(t)(1+\cos t)\,dt\geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4251 ▲

1. formule de Taylor-intégrale.
2.

Correction de l'exercice 4254 ▲

$H'=f(2F-f^2)=fK$ et $K'=2f(1-f')$ donc H est croissante et positive.

Correction de l'exercice 4259 ▲

1.
2. Soit $F(x)=\int_{t=a}^{x}f(t)\,dt$ et $G=F^{-1}$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\circ G(\frac{k}{n})\to\int_{t=a}^{b}f^2(t)\,dt\Big/\int_{t=a}^{b}f(t)\,dt$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4260 ▲

On a $f=e^g$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème de relèvement d'où $I(f)=\frac{g(2\pi)-g(0)}{2i\pi}\in\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 4261 ▲

1. Il existe toujours une unique fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g''=f$, $g(a)=g'(a)=0$: $g(x)=\int_{t=a}^{x}(x-t)f(t)\,dt$ (Taylor-Intégral).
2. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $f_1\ :\ x\mapsto f(x)-\lambda-\mu x$ vérifie $\int_{x=a}^{b}f_1(x)\,dx=\int_{x=a}^{b}xf_1(x)\,dx=0$. On trouve

$$\begin{cases}(b-a)\lambda+(b^2-a^2)/2\mu & =-\int_{x=a}^{b}f(x)\,dx\\ (b^2-a^2)/2\lambda+(b^3-a^3)/3\mu & =-\int_{x=a}^{b}xf(x)\,dx\end{cases}$$

et ce système a pour déterminant $(b-a)^4/12\neq 0$ donc λ,μ existent et sont uniques. Soit $g_1\in F$ telle que $g_1''=f_1$: $\int_{x=a}^{b}g_1''(x)g''(x)\,dx=0$ pour tout $g\in F$, en particulier pour $g=g_1$ donc $g_1''=f_1=0$ et $f(x)=\lambda+\mu x$.

Correction de l'exercice 4262 ▲

Soit $g = f - a$. On a $0 \leqslant g \leqslant b - a$ et $\int_0^1 g = -a$ d'où $\int_0^1 g^2 \leqslant (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ et $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leqslant -ab$.

Correction de l'exercice 4275 ▲

$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1 < x < 1$.

Correction de l'exercice 4276 ▲

$\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 4277 ▲

$2nI_n - (2n+2)I_{n+1} = 0 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$.

Correction de l'exercice 4278 ▲

$I_n + I_{n+2} = \frac{2I_{n+1}}{\sin\alpha} \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^n$.

Correction de l'exercice 4279 ▲

$I_n = \pi\sqrt{2}\prod_{k=1}^n\left(1 - \frac{3}{4k}\right)$.

Correction de l'exercice 4280 ▲

Décomposer en éléments simples et intégrer. On obtient $I_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^n (-1)^k C_{n-1}^{k-1}\ln k$.

Correction de l'exercice 4281 ▲

1.
2.
3. $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \frac{n\pi}{2}$.
   $A_n - B_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ pour $n \geqslant 1$.
4. $J = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4285 ▲

$1 - \gamma$.

Correction de l'exercice 4286 ▲

1. Intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\left(\ln t - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right)dt \\ &= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt + \left(\ln k - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Soit $I_k = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt$. On pose $t = ku$:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^k\ln u\,du \\ &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_{u=0}^{+\infty} d\left(\frac{(ue^{-u})^{k-1}}{k-1}\right)\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u} \\ &= -\frac{k^{k+1}}{k!(k-1)}\int_{u=0}^{+\infty}(ue^{-u})^{k-1}d\left(\frac{u^2e^{-u}\ln u}{1-u}\right). \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant ue^{-u} \leqslant e^{-1}$, il reste $\sqrt{k}$ au dénominateur multiplié par quelque chose de borné.

2.

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt &= \int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_{t=1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(-\ln x - \int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left((e^{-x}-1)\ln x - \int_{t=x}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right) \\ &= -\int_{t=0}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt. \end{aligned}$$

3. $\int_{t=x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = (t = -\ln(1-u)) = \int_{u=1-e^{-x}}^{1}\frac{-du}{\ln(1-u)}$.

Correction de l'exercice 4288 ▲

$\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4290 ▲

1. En supposant f positive décroissante, $\int_0^{+\infty} f \leqslant tg(t) \leqslant tf(0) + \int_0^{+\infty} f$.
2. $\int_{u=Pt}^{Qt} f(u)\,du - \sum_{n=P}^{Q-1} tf(nt) = \int_{u=Pt}^{Qt}(f(u)-f(t[u/t]))\,du = \int_{u=Pt}^{Qt} t(1-\{u/t\})f'(u)\,du \to 0$ lorsque $P,Q \to \infty$.

   Donc la série de terme général $tf(nt)$ est de Cauchy ; elle converge.

   On a alors $\int_0^{+\infty} f - tg(t) = \int_{u=0}^{+\infty} t(1-\{u/t\})f'(u)\,du \to 0$ lorsque $t \to 0^+$.
3. $\int_0^{+\infty} 2f - 2tg(t) = \int_{u=0}^{+\infty} tf'(u)\,du + \int_{u=0}^{+\infty} t(1-2\{u/t\})f'(u)\,du = tf(0) - \int_{u=0}^{+\infty} t^2\{u/t\}(1-\{u/t\})f''(u)\,du$.

Correction de l'exercice 4293 ▲

$0 \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{t=x/2}^{x} f(t)\,dt \to 0$ (lorsque $x \to +\infty$).

$\int_{t=1}^{x} t(f(t)-f(t+1))\,dt = \int_{t=1}^{2} tf(t)\,dt + \int_{t=2}^{x} f(t)\,dt - \int_{t=x}^{x+1}(t-1)f(t)\,dt \to \int_{t=1}^{2} tf(t)\,dt + \int_{t=2}^{+\infty} f(t)\,dt$ (lorsque $x \to +\infty$).

Correction de l'exercice 4295 ▲

1. $\int_{t=x}^{y}\frac{f(at)}{t}\,dt = \int_{t=ax}^{ay}\frac{f(t)}{t}\,dt \Rightarrow \int_{t=x}^{y}\frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = \int_{t=ax}^{x}\frac{f(t)}{t}\,dt + \int_{t=y}^{ay}\frac{f(t)}{t}\,dt$.

   On obtient $\int_{t=0}^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = (L-\ell)\ln a$.
2. $I = \int_{t=0}^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4296 ▲

1.
2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 4297 ▲

$\int_{t=a}^{b} F(t)\,dt = \int_{u=a-1}^{a+1} \frac{u-(a-1)}{2} f(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + \int_{u=b-1}^{b+1} \frac{b+1-u}{2} f(u)\,du$.
$= \varphi(a+1) - \frac{1}{2}\int_{u=a-1}^{a+1} \varphi(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{u=b-1}^{b+1} \varphi(u)\,du - \varphi(b-1)$ où φ est une primitive de f.

Correction de l'exercice 4298 ▲

Soit $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$: $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} t f(t)\,dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} F(t)\,dt$.

Correction de l'exercice 4301 ▲

1.
2. e^{-x}/x.
3. $-\ln x$.

Correction de l'exercice 4302 ▲

1.
2. $I_n=\sqrt{n}K_{2n+1}$, $J_n=\sqrt{n}K_{2n-1}$.
3. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 4303 ▲

$I_n=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$.

Correction de l'exercice 4304 ▲

Intégrale trivialement convergente. Couper en $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$, changer x en $\frac{1}{x}$ dans l'une des intégrales, regrouper et poser $u=x-\frac{1}{x}$. On obtient $I=\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 4305 ▲

L'intégrale converge par parties.

Correction de l'exercice 4306 ▲

$\int^x \cos(P(t))\,dt = \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]^x - \int^x \sin(P(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P'(t)}\right)dt$.

Correction de l'exercice 4307 ▲

$I=J$ par changement $u\mapsto 1/u$.
$I+J=\frac{\pi}{2} \Rightarrow I=J=\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4310 ▲

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{X}\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,dx &= \left[x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right]_{x=0}^{X}+\int_{x=0}^{X}\sin x\,dx\\ &= X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt+1-\cos X\\ &= X\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt+1-\cos X\\ &= -X\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_{t=X}^{+\infty}-X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t^3}\,dt+1\\ &\to 1 \text{ lorsque } X\to+\infty\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4311 ▲

$2|ff''|\leqslant f^2+f''^2$ donc ff'' est intégrable. On en déduit que f'^2 admet une limite finie en $+\infty$, et cette limite est nulle sans quoi f^2 ne serait pas intégrable (si $f'(x)\to\ell$ lorsque $x\to+\infty$ alors $f(x)/x\to\ell$). Ainsi f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, f est lipschitzienne et donc uniformément continue. De plus,

$$\int_{t=0}^{X}f'^2(t)\,dt=f(X)f'(X)-f(0)f'(0)-\int_{t=0}^{X}f(t)f''(t)\,dt$$

donc $f(X)f'(X)$ admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$, et le cas $f(X)f'(X)=\frac{1}{2}(f^2)'(X)\to+\infty$ lorsque $X\to+\infty$ contredit l'intégrabilité de f^2 donc ce cas est impossible, ce qui prouve que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, ff' est intégrable (produit de deux fonctions de carrés intégrables) donc f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite vaut zéro par intégrabilité de f^2.

Correction de l'exercice 4312 ▲

On pose $u_n=\int_{t=n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=\int_{t=0}^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt$. Par encadrement du dénominateur on a $u_n\sim\frac{2}{n\pi}$, d'où $u_0+\dots+u_n\sim\frac{2\ln n}{\pi}$ et, par encadrement encore, l'intégrale arrêtée en x est équivalente à $\frac{2\ln x}{\pi}$.

Correction de l'exercice 4313 ▲

$=\int_{t=x}^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{5t}{6}+o(t)\right)dt\to\ln 2$.

Correction de l'exercice 4314 ▲

Correction de l'exercice 4315 ▲

Formule de la moyenne sur $[3,x]$ et $[x,x+x^2]\Rightarrow\lim=0$.

Correction de l'exercice 4316 ▲

$\ln 2$.

Correction de l'exercice 4317 ▲

$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^N}{(1+t^3)^N}\right)\frac{dt}{2+t^3}\to\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3}=\frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}$ lorsque $N\to\infty$.

Correction de l'exercice 4318 ▲

1.

2. $I(x)=\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\,dt=\cos x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

Correction de l'exercice 4319 ▲

$\frac{\pi}{2}f(0)$.

Correction de l'exercice 4320 ▲

$t=ux$ puis intégration par parties $\Rightarrow\sim\frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4321 ▲

$f'(x)=\frac{2\ln x}{a(1+x^2)}\Rightarrow f(1+h)=\frac{1}{2a}(h^2-h^3)+o(h^3)$.

Correction de l'exercice 4322 ▲

1.
2. Soit $\varepsilon>0$: Pour x assez petit, $\left|f(t)^x-1-x\ln(f(t))\right|\leqslant\varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a,b]$.
   Donc $\left|\int_{t=a}^{b}f(t)^x dt-1-x\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right|\leqslant\varepsilon x$, et $\left|\ln\left(\int_{t=a}^{b}f(t)^x dt\right)-x\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,dt\right|\leqslant 2\varepsilon x$.

Correction de l'exercice 4325 ▲

1. Couper en $\int_{t=0}^{1-\varepsilon}+\int_{t=1-\varepsilon}^{1}$
2. $=\left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_{t=0}^{1}-\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\ln(1+t^n)\,dt\sim\frac{\ln 2}{n}$.
3. $\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}+1}=\frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}$.

Correction de l'exercice 4326 ▲

$1-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4327 ▲

$1+\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4328 ▲

$u=t^n\Rightarrow\sim\frac{1}{n}\int_{u=1}^{e}\frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$.

Correction de l'exercice 4330 ▲

$f(0)$.

Correction de l'exercice 4331 ▲

Soit $f_n(x)=(1-x/n)^n$ si $0\leqslant x\leqslant n$ et $f_n(x)=0$ si $x>n$. Alors $f_n(x)$ converge simplement vers e^{-x} et il y a convergence dominée.

Correction de l'exercice 4332 ▲

$f(x)=\cos x$.

Correction de l'exercice 4333 ▲

1. $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
2. $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$,
   $I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln\sqrt{2}$.
3. $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$.

Correction de l'exercice 4334 ▲

$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4335 ▲

1.
2. $g(c)$.

Correction de l'exercice 4336 ▲

$\Phi(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,dt \Rightarrow \Phi'\Phi^2 \to \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Correction de l'exercice 4338 ▲

1.
2.
3.
4. Pour $\alpha = 0$ on a $h(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$, quantité bornée car l'intégrale converge en $+\infty$.
   Pour $\alpha = 1$ on a $h(x) = \cos x \int_{t=0}^{x} \frac{\cos t \sin t}{t}\,dt + \sin x \int_{t=0}^{x} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$, quantité non bornée car la deuxième intégrale diverge en $+\infty$.
   Pour $0 < \alpha < 1$, développer le $\cos(x-t)$ puis linéariser les produits obtenus. On obtient quatre intégrales convergentes, donc h est bornée.

Correction de l'exercice 4339 ▲

1. $\frac{\ln(1+a)}{a}$.
2. $= -\varphi'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

Correction de l'exercice 4342 ▲

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $f(x) = \pi \ln(x+1)$.

Correction de l'exercice 4343 ▲

1.
2. $I'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $I(x) = \pi \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4344 ▲

1. $g'(x) = \int_{t=0}^{1} (-2x) e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\sqrt{f(x)} = -f'(x)$.
2.

3.

Correction de l'exercice 4345 ▲

$u = \frac{a}{t} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\frac{dI}{da} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

Correction de l'exercice 4346 ▲

1.
2. $I'(x) = -2xI(x)$.
3. $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.

Correction de l'exercice 4350 ▲

1. $g(x,y) = \int_{u=1}^{y} f(ux)\,du$.
2. $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}\Big(yf(xy) - f(x) - \int_{u=1}^{y} f(ux)\,du\Big) \to \frac{y^2-1}{2}f'(0)$ lorsque $x \to 0$.

Correction de l'exercice 4351 ▲

1. -2 de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{2}$, $2\sin x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, 2 de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.
2.
3.
4.
5.
6.

Correction de l'exercice 4352 ▲

$2.40 < x < 2.41$.

Correction de l'exercice 4353 ▲

1.
2. $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.
3. comparaison série-intégrale $\Rightarrow I(\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $\alpha \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4354 ▲

$\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

Correction de l'exercice 4356 ▲

1. $f'(a) = -\frac{a}{2}f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/4)$.
2. $g'(a) = f(a) \Rightarrow g(a) \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4358 ▲

1. IPP.

2. Soit $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,dt$. On a $\varphi(a) = F(0) - a\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at}F(t)\,dt$.
   Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $x > A \Rightarrow |F(x)| \leqslant \varepsilon$. On a :
$$\left|a\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at}F(t)\,dt\right| \leqslant a\sup|F(t)|, t\in[0,A] + \varepsilon e^{-aA} \leqslant 2\varepsilon$$
   pour a suffisament petit.

Correction de l'exercice 4359 ▲

$v_n \to 1$ (lorsque $n\to\infty$) par convergence dominée. $v_n - 1 = \int_{x=0}^{1}\frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{-1/n}}{1+u}\,du \sim \frac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 4360 ▲

$u_n \to 1$ (lorsque $n\to\infty$) par convergence dominée.
$u_n - 1 = \int_{x=0}^{1}\left(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n} - 1\right)dx = \frac{1}{n}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-1/n}}{1+u}(u^{-2/n}-1)\,du$.
On a $0 \leqslant u^{-2/n} - 1 = \exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \leqslant -\frac{2\ln(u)}{n}\exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right)$
d'où $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n^2}\int_{u=0}^{1}\frac{u^{1-3/n}(-\ln u)}{1+u}\,du = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 4361 ▲

$I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 1$. $I(2) = (x = e^u) = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2}\,du = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(e^u+e^{-u})^2}\,du = 0$ (parité). $I(3) = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \int_{u=0}^{+\infty}\frac{-u(e^u-e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \left[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})^2}\right]_{u=0}^{+\infty} - \int_{u=0}^{+\infty}\frac{du}{2(e^u+e^{-u})^2} \quad = -\int_{u=0}^{+\infty}\frac{e^{2u}\,du}{2(1+e^{2u})^2} = \left[\frac{1}{4(1+e^{2u})}\right]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}$. $I(\alpha)\to 0$ (lorsque $\alpha\to+\infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4362 ▲

1. $D_f =]0,1[$. f est convexe sur $]0,1[$ par intégration de l'inégalité de convexité pour $x\mapsto t^{-x}$ et $f(x)\to+\infty$ (lorsque $x\to 0$ ou $x\to 1$) par convergence monotone donc f décroît puis recroît.
2.
3. En 0 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}$ donc $f(x) = \int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t^x(1+t)} + \frac{1}{x} - \int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} \sim \frac{1}{x}$.
   En 1 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^x} - \frac{t^{1-x}}{1+t}$ donc $f(x) = \frac{1}{1-x} - \int_{t=0}^{1}\frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt + \int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}$.
4. $f(1/n) =_{(t=u^n)} \int_{u=0}^{+\infty}\frac{nu^{n-1}\,du}{u(1+u^n)} =_{(v=1/u)} \int_{v=0}^{+\infty}\frac{n\,dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$ (formule bien connue...)

Correction de l'exercice 4363 ▲

Si $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = 0$ pour tout n.
Sinon, $u_n = \operatorname{Im}\left(\int_{t=0}^{1}\sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1}e^{ik\alpha}\,dt\right) = \operatorname{Im}\left(\int_{t=0}^{1}\frac{t^ne^{i\alpha} - t^{2n}e^{i(n+1)\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\,dt\right) \to 0$ (lorsque $n\to\infty$) par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4364 ▲

$I_a = \int_{x=-a}^{a}|f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=-a}^{a}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt\,dx = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{x=-a}^{a}\frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dx\,dt$. On a $\int_{x=-a}^{a}e^{-|x+t|}\,dx = \begin{cases}2-2e^{-a}\operatorname{ch}t & \text{si } | \\ 2e^{-|t|}\operatorname{sh}a & \text{si } |\end{cases}$
donc $I_a \leqslant \int_{t=0}^{a}\frac{2\,dt}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_{t=a}^{+\infty}\frac{4e^{-t}\operatorname{sh}a}{(1+a)\sqrt{a}}\,dt = 4\arctan(\sqrt{a}) + \frac{4e^{-a}\operatorname{sh}a}{(1+a)\sqrt{a}} \leqslant$ cste.

Correction de l'exercice 4365 ▲

1. $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,dt$.
   On a $|\sin(t)e^{-kxt}| \leqslant te^{-kxt}$ et $\int_{t=0}^{+\infty} te^{-kxt}\,dt = \frac{1}{k^2}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t)e^{-kxt}|\,dt$ converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2x^2+1}$.
2. Sachant (?) que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{x\sin t}{e^{xt}-1} - \frac{\sin t}{t}\right)dt \\
&= \int_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\sin\left(\frac{u}{x}\right)du \\
&= -x\Big[\underbrace{\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)}_{\to\frac{1}{2}\text{ si } u\to 0^+}\cos\left(\frac{u}{x}\right)\Big]_{u=0}^{+\infty} + x\int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{-e^u}{(e^u-1)^2} + \frac{1}{u^2}\right)}_{\to\frac{1}{12}\text{ si } u\to 0^+}\cos\left(\frac{u}{x}\right)du \\
&= x(\text{quantité bornée}) \to 0 \text{ si } u \to 0^+.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4366 ▲

Fonction de x de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, décroissante de limite $\pi/2$ en 0^+ et 0 en $+\infty$. Demi-tangente verticale en 0^+, Équivalente à $1/x$ en $+\infty$ (par IPP). Équation différentielle : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Correction de l'exercice 4367 ▲

1. $[0,+\infty[$.
2.
3. $f(x) - f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2x}\,dt = (u = t\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.
4. $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{x+u^2}\,du = \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+u^2/x}\,du \sim \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du = \frac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.
5.
6.

Correction de l'exercice 4368 ▲

1.
2. Théorème de Fubini : $\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(e^{(-\alpha+i\sin\theta)x})\,dx\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\alpha\,d\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
   (couper en $\theta = \pi/2$ et poser $u = \tan\theta$).

Correction de l'exercice 4369 ▲

$I'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} (\cos t - e^{-t})e^{-xt}\,dt = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$ donc $I(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right) + \text{cste}$ et $I(x) \to 0$ (pour $x \to +\infty$) d'où cste $= 0$. Alors $I(x) \to 0$ pour $x \to 0^+$.

Correction de l'exercice 4371 ▲

$D_f =]0,+\infty[$. Il y a domination locale, donc f est continue.
De même, pour $x > 0$ on a $f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1}+t+1)^2}\,dt$. En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u = 1/t$ dans l'intégrale sur $[1,+\infty[$ il vient : $f'(x) = \int_{t=0}^{1} \ln(t)t^{x+1}\left(\frac{1}{(t+t^{x+1}+t^{x+2})^2} - \frac{1}{(t^{x+1}+t+1)^2}\right)dt < 0$ car $\ln(t) < 0$ et $t^{x+2} < 1$ si $t \in]0,1[$. Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t} = \int_{t=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}}\,dt = $ (domination du reste avec le CSA) $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)x} = \frac{\ln 2}{x}$.

$\left|f(x)-\int_{t=1}^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}+t}\right| = \int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t^{x+1}+t+1}+\int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{(t^{x+1}+t)(t^{x+1}+t+1)} \leqslant \int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t+1}+\int_{t=1}^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)} = 2\ln 2$ donc $f(x)=\frac{\ln 2}{x}+O_{x\to 0^+}(1)$.

Pour $x\to+\infty$, on a avec le TCM séparément sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$: lorsque $x\to+\infty$, $f(x)\to\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{t+1}=\ln 2$.

Correction de l'exercice 4372 ▲

Pour $\lambda\neq 0$: $I_n=\left[\frac{\exp(\lambda n\sin^2(x))}{2\lambda n\cos(x)}\right]_{x=0}^{\alpha}-\int_{x=0}^{\alpha}\frac{\sin(x)}{2\lambda n\cos^2(x)}\exp(\lambda n\sin^2(x))\,dx=\frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}-\frac{1}{2\lambda n}-\frac{J_n}{2\lambda n}$ avec $0\leqslant J_n\leqslant\frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Donc $I_n\sim\frac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}$ si $\lambda>0$ et $I_n\sim-\frac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda<0$.

Correction de l'exercice 4373 ▲

1. Pour $0\leqslant t\leqslant 1$ on a $t(1-t)(n-1)!\leqslant t(1-t)\dots(n-t)\leqslant n!$ d'où $\frac{1}{6n}\leqslant|a_n|\leqslant 1$ et $R=1$.
2. $(-1)^n a_n=\int_{t=0}^{1}t(1-t)(1-t/2)\dots(1-t/n)\,dt$. Pour $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ on a $x\leqslant-\ln(1-x)\leqslant x+x^2$ (étude de fonction) donc pour $k\geqslant 2$ et $0\leqslant t\leqslant 1$: $e^{-t/k-t^2/k^2}\leqslant 1-t/k\leqslant e^{-t/k}$ d'où :
$$b_n=\int_{t=0}^{1}t(1-t)e^{-t(H_n-1)-t^2K_n}\,dt\leqslant(-1)^n a_n\leqslant\int_{t=0}^{1}te^{-tH_n}\,dt=c_n$$
avec $H_n=1+1/2+\dots+1/n$ et $K_n=1/2^2+\dots+1/n^2$.
Équivalent du majorant :
$$c_n=\frac{1-(1+H_n)e^{-H_n}}{H_n^2}\sim\frac{1}{H_n^2}.$$
Équivalent du minorant :
$$\begin{aligned}b_n&\geqslant\int_{t=0}^{1}t(1-t)(1-t^2K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt\\&=\int_{t=0}^{1}te^{-t(H_n-1)}\,dt-\int_{t=0}^{1}t^2(1+t(1-t)K_n)e^{-t(H_n-1)}\,dt\\&\geqslant\int_{t=0}^{1}te^{-t(H_n-1)}\,dt-(1+\tfrac14K_n)\int_{t=0}^{1}t^2e^{-t(H_n-1)}\,dt\\&\geqslant\frac{1-H_ne^{1-H_n}}{(H_n-1)^2}-(1+\tfrac14K_n)\frac{2-(H_n^2+1)e^{1-H_n}}{(H_n-1)^3}\\&\sim\frac{1}{H_n^2}.\end{aligned}$$
Finalement, $a_n\sim\frac{(-1)^n}{H_n^2}\sim\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Correction de l'exercice 4374 ▲

1. $\sum u_n(t)$ converge pour $|t|<1$.
2. $P_n(t)=t^{n+1}\sin(nx)-t^n\sin((n+1)x)+\sin(x)$, $Q(t)=t^2-2t\cos(x)+1=(t-\cos x)^2+\sin^2 x\geqslant\sin^2 x$.
3. Pour $|t|<1$ on a $S_n(t)\to\frac{\sin t}{Q(t)}$ lorsque $n\to\infty$ et il y a convergence dominée vu la minoration de Q donc l'intégrale suit : $\int_{t=0}^{1}S_n(t)\,dt\to\int_{t=0}^{1}\frac{\sin x\,dt}{t^2-2t\cos x+1}=(t-\cos x=u\sin x)=\int_{u=-\cot x}^{\tan(x/2)}\frac{du}{u^2+1}=\frac{\pi-x}{2}$.
4. $\frac{\sin(nx)}{n}=\int_{t=0}^{1}u_n(t)\,dt$ d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$.

Correction de l'exercice 4375 ▲

1.

2. $\sin^2(nt) = \frac{1-\cos(2nt)}{2}$, donc il suffit d'étudier $I_n = \int_{t=0}^{n\pi} \cos(2nt)f(t)\,dt$.
Posons $I_{n,p} = \int_{t=0}^{\min(n,p)\pi} \cos(2nt)f(t)\,dt$: on a $|I_n - I_{n,p}| \leqslant \int_{t=p\pi}^{+\infty} |f(t)|\,dt$, quantité indépendante de n et tendant vers 0 quand $p \to \infty$ donc le théorème d'interversion des limites s'applique :
$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} I_{n,p} = \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} I_{n,p} = 0$. On en déduit $u_n \to \frac{1}{2}\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4376 ▲

1. $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ et $f_n(1) = 1$ donc lorsque $n \to \infty$ $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
2. (a) Non, la continuité n'est pas conservée.
   (b) Oui, il y a décroissance évidente.
3. Changement de variable $u = \left(\frac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \frac{2}{n(n-1)} \int_{u=1/2^n}^{1} (2u^{1/n} - 1)^{2/(n-1)} u^{1/n}\,du$ et l'intégrale tend vers 1 quand $n \to \infty$ par convergence dominée.

Correction de l'exercice 4377 ▲

Il y a convergence si et seulement si $x > -1$. $f'(x) = \int_{t=0}^{1} (1-t)t^x\,dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, donc $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + C$ et $f(x) \to 0$ (lorsque $x \to +\infty$) d'où $C = 0$.

Correction de l'exercice 4378 ▲

1. $]1, +\infty[$.
2.
3. $I'(a) = -\int_{x=0}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right)$. D'où $I(a) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) +$ cste et $I(a) \to 0$ lorsque $a \to +\infty$ donc la constante est nulle.

Correction de l'exercice 4379 ▲

1. Intégrer par parties.
2. Intégrer deux fois par parties.
3. Pour $0 < u < v$: $\int_{t=u}^{v} e^{-it^2/2}\,dt = \left[\frac{e^{-it^2/2}}{-it}\right]_{t=u}^{v} - \int_{t=u}^{v} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt \to \frac{e^{-iu^2/2}}{iu} - \int_{t=u}^{+\infty} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt$ lorsque $v \to +\infty$.
   Ainsi $\int_{t=u}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,dt$ converge et de même pour $\int_{t=-\infty}^{-u} e^{-it^2/2}\,dt$.
4. On pose $f(t) = f(0) + t\varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient :
$$g(x)\sqrt{x} = f(0)\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\,du - \frac{1}{i\sqrt{x}}\left[e^{-iu^2/2}\varphi(u/\sqrt{x})\right]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} + \frac{1}{ix}\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\varphi'(u/\sqrt{x})\,du$$
$$\to f(0).I$$
   lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4381 ▲

1. $\frac{1}{30}$.
2. 0.
3. $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.

4. $\frac{96}{35}$.
5. $\frac{\pi}{2}$.
6. $\pi(1-\ln 2)$.
7. $\frac{5}{6}$.
8. $2(\ln 2-1)$.
9. $\frac{3\pi}{2}$.
10. $\frac{65\pi}{48}$.
11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.
12. $\frac{7}{45}$.
13. $\pi(1-\frac{1}{e})$.
14. $\frac{(e^{2p}-1)^2}{3} \quad (x=u^2v, y=uv^2)$.

Correction de l'exercice 4382 ▲

Poser $u=x, v=x+y$. On obtient $I=\frac{2}{1701}$.

Correction de l'exercice 4383 ▲

symétrie + passage en polaires. $I=\frac{3}{4}\pi-\frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 4384 ▲

1. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{27}\right)$.
2. $2\pi a^2\arcsin\frac{R}{a}-2\pi R\sqrt{a^2-R^2}$.
3. $\frac{1}{720}$.
4. $\frac{3}{4}-\ln 2$.
5. $\frac{\pi R^2a^2}{4}(a^2+3R^2)$.
6. $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.
7. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$.

Correction de l'exercice 4385 ▲

1. Intégrer en z d'abord : $\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}=\frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2}-\frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$. On obtient $I=\pi\ln 2$.
2. Intégrer I en x et y d'abord. On obtient $I=\int_{z=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz$.

Correction de l'exercice 4386 ▲

$I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Correction de l'exercice 4387 ▲

$\frac{1}{2}\pi^2Rr^2(4R^2+3r^2)$.

Correction de l'exercice 4388 ▲

$2\pi b\left(a^2-\frac{b^2}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 4389 ▲

1.
2.
3. Fubini $\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4391 ▲

1. $2A = \left(\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{32}$.
2.
3.
4. $B + C = \frac{D}{2}$, $B - C = -D$.
5. $C = -\frac{3\pi^2}{32}$, $D = -\frac{\pi^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4392 ▲

1. $A = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.
2. $4ab \arctan \frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 4393 ▲

Formule de Green : $\mathscr{A} = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Correction de l'exercice 4394 ▲

Formule de Green. $A = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

Correction de l'exercice 4395 ▲

Formule de Green. $A = \pi a^2$.

Correction de l'exercice 4396 ▲

1. $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.
2. $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.
3. $V = 2\pi^2 R r^2$.

Correction de l'exercice 4397 ▲

$V = \frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Correction de l'exercice 4398 ▲

$\frac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 4399 ▲

hauteur $= \alpha R$ avec $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha \approx 0.347$.

Correction de l'exercice 4402 ▲

C'est manifestement vrai pour $\psi \equiv 1$ et aussi pour $\psi(t) = t$. De manière générale, si $\psi(t) = t^k$ avec $k \in |||$ alors pour $n \geqslant k$, $(x_1 + \cdots + x_n)^k$ est une somme de n^k monômes parmi lesquels il y a $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ monômes où chaque variable apparaît avec l'exposant 0 ou 1. On a alors :

$$\Lambda_n(\psi) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big(\int_{x=0}^{1} xf(x)\,dx\Big)^k\Big(\int_{x=0}^{1} f(x)\,dx\Big)^{n-k} + \Big(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big)O(1),$$

ce qui prouve que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\Big(\int_{x=0}^{1} xf(x)\,dx\Big)$ (lorsque $n \to \infty$) lorsque $\psi(t) = t^k$. Par linéarité, cette relation est encore vraie pour tout ψ polynôme. On conclut pour ψ continue quelconque avec le théorème de Stone-Weierstrass.

Correction de l'exercice 4403 ▲

$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow \cos z \in [-1,1]$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4404 ▲

Mettre $1 + \frac{z}{n}$ sous forme trigonométrique.

Correction de l'exercice 4405 ▲

Développement en série.

Correction de l'exercice 4406 ▲

$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|^2 = \frac{e^{2x}+1-2e^x\cos y}{x^2+y^2}$. Après simplifications, on est ramené à prouver que $x^2(1-\cos y) \leqslant y^2(\operatorname{ch} x - 1)$, ce qui est vrai car on peut caser $\frac{1}{2}x^2y^2$ entre les deux. Il y a égalité si et seulement si $y = 0$.

Correction de l'exercice 4408 ▲

$e^{x+iy} = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y/\tan y \\ e^{-y/\tan y} = \sin y/y. \end{cases}$ Au voisinage de $2k\pi^+$, $e^{-y/\tan y} < \sin y/y$ (point plat) et au voisinage de $(2k+1)\pi^-$, $e^{-y/\tan y} > \sin y/y$ (limite infinie).

Correction de l'exercice 4409 ▲

1. $z \equiv \pm i \ln(2+\sqrt{3}) (\operatorname{mod} 2\pi)$.
2. $z \equiv i\pi (\operatorname{mod} 2i\pi)$.
3. $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2\pi)$ ou $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2j\pi)$ ou $z \equiv 0 (\operatorname{mod} 2j^2\pi)$.
4. $\Leftrightarrow 6e^{2iz} - (7+5i)e^{iz} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1+i & : \quad z \equiv \pi/4 - i\ln\sqrt{2} (\operatorname{mod} 2\pi) \\ e^{iz} = (1-i)/6 : & z \equiv -\pi/4 - i\ln(\sqrt{2}/6) (\operatorname{mod} 2\pi). \end{cases}$

Correction de l'exercice 4410 ▲

$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x \Rightarrow \sup = \operatorname{ch} 1$.
$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$. À x fixé, le module augmente avec $|y|$, donc le maximum est atteint au bord du disque.
$\varphi(\theta) = \sin^2\cos\theta + \operatorname{sh}^2\sin\theta \Rightarrow \varphi'(\theta) = \sin 2\theta\left(\frac{\operatorname{sh}(2\sin\theta)}{2\sin\theta} - \frac{\sin(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right) \Rightarrow \sup = \operatorname{sh} 1$.

Correction de l'exercice 4412 ▲

Si x est vecteur propre de M il l'est aussi de $\exp(M)$ donc $x = ke_1$ et la valeur propre associée est $\alpha \in (x^2+1)$ tel que $e^\alpha = 2i$ ($\alpha = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$). On a donc $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\exp(M) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha\beta \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$ d'où $\beta = \frac{1-i}{2}$.

Correction de l'exercice 4413 ▲

1. $\sim -\frac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.
2. $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.
3. $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.
4. $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.
5. $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.
6. cv ssi $|a| \neq 1$.
7. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
8. Série alternée $\Rightarrow$ CV.
9. Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.
10. d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
11. $\leqslant \frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.
12. $= \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ CV.
13. Décomposition en 3 séries alternées $\Rightarrow$ CV.
14. $= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
15. Regroupement de termes $\Rightarrow$ DV.
16. Regroupement par paquets + CSI $\Rightarrow$ CV.
17. Terme général ne tend pas vers zéro, DV.
18. $= \frac{1}{n^{\ln \ln n}} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 4414 ▲

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C$.

Correction de l'exercice 4415 ▲

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ converge.

Correction de l'exercice 4416 ▲

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$, il y a convergence ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 4417 ▲

Effectuer un développement asymptotique pour les deux premières. Elles convergent si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La troisième diverge par comparaison série-intégrale.

Correction de l'exercice 4418 ▲

$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \to ab$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-2}} \to ab$ (lorsque $n \to \infty$) donc il y a convergence si $|ab| < 1$.

Correction de l'exercice 4420 ▲

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Correction de l'exercice 4421 ▲

$1 \Rightarrow 2$ par comparaison série-intégrale. Contre-exemple pour $(2) \not\Rightarrow (1)$: $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Correction de l'exercice 4422 ▲

$\frac{n^2}{(n^2+1)^2} - \frac{1}{n^2-1} = -\frac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geqslant -\frac{4}{n^4}$ pour $n \geqslant 3$.
Donc $S = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} + R_N$ avec $-\frac{4}{3N^3} \leqslant R_N \leqslant 0$ et $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$.
Pour $N = 25$ on obtient : $0.76981 < S < 0.76990$.

Correction de l'exercice 4424 ▲

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $n^2 u_n \to \infty$ (lorsque $n \to \infty$) donc $u_n v_n \sim 1/n^2$. Alors les suites $(\sqrt{u_n})$ et $(\sqrt{v_n})$ sont de carrés sommables tandis que la suite $(\sqrt{u_n v_n})$ n'est pas sommable, c'est absurde.
Si $\sum u_n$ diverge on ne peut rien dire : avec $u_n = 1$ on a $\sum v_n$ convergente tandis qu'avec $u_n = \frac{1}{n}$ on a $\sum v_n$ divergente.

Correction de l'exercice 4425 ▲

1. $u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \leqslant 1$.
2. $\ln\big((1+a_1)\dots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4426 ▲

Regroupement de termes par valeur constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{10^p - 10^{p-1}}{a^p} = \frac{9}{a-10}$.

Correction de l'exercice 4428 ▲

1.
2. $|v_n| = O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 4429 ▲

Série alternée.

Correction de l'exercice 4430 ▲

1. $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{1}{4}$.
3. $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$.
4. $\frac{23}{144}$.
5. $\ln 3$.
6. $-\ln 2$.
7. $\ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.
8. $\frac{1}{\alpha} - 2\operatorname{cotan}(2\alpha)$.
9. $109 - 40e$.
10. $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x| < 1$ par récurrence.
11. $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| > 1$.

12. $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$.

$S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{qn+n} - \frac{1}{q+1} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{(N+1)n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \right) = \ln n$.

Correction de l'exercice 4431 ▲

Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 4432 ▲

1. $y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$, $y = e^{-x}\sin x + e^{-2x}(cx+d)$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4433 ▲

$\frac{\pi^2}{3} - 3$.

Correction de l'exercice 4434 ▲

$\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18 - 24\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{6}{n+1} \to 18 - 24\ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4435 ▲

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2,\ b=1,\ S=-\ln 2.$$

Correction de l'exercice 4436 ▲

$\tan s_n = n+1$ par récurrence et $s_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$.

Correction de l'exercice 4437 ▲

1. $\sim \frac{a}{n^2}$.
2. $S(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+a) - \arctan k \to \frac{\pi}{2} + \arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} + \cdots + \arctan\frac{1}{n} \Rightarrow S(a) \to +\infty$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4438 ▲

Le déport maximal entre la première pièce et la dernière pour une pile de n pièces est $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)}$ (en diamètre d'une pièce). Il dépasse 1 pour $n > 4$.

Correction de l'exercice 4439 ▲

1. $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2. $\ln(\ln n)$.

Correction de l'exercice 4440 ▲

$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 4441 ▲

2997.

Correction de l'exercice 4442 ▲

$\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Correction de l'exercice 4444 ▲

$T_{n+1}-T_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t} < 0$

$S_{n+1}-S_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt > 0.$

Correction de l'exercice 4445 ▲

$\frac{u_{n,k}}{k} = \frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right]$, donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$ est une somme de Riemann pour l'intégrale $I = \int_{t=0}^{1}\left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right)dt$. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, donc $v_n \to I$ lorsque $n \to \infty$.
Calcul de I : $I_n = \int_{t=1/n}^{1}\left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right)dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\int_{t=\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \to 1-\gamma = I$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4446 ▲

1. Comparaison série-intégrale : $u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$.
2. Comparaison série-intégrale encore (v_n est la somme des aires entre les rectangles aux points entiers et la courbe de $t \to \ln(t)/t$).
3. $v_n - \ell = -\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_{t=k}^{k+1}\frac{\ln t}{t}\,dt - \frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) = -\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ avec $w_k \sim \frac{\ln k}{2k^2}$ donc $v_n - \ell \sim -\int_{t=n}^{+\infty}\frac{\ln t}{2t^2}\,dt \sim -\frac{\ln n}{2n}$.

Correction de l'exercice 4447 ▲

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{2n}$.

Correction de l'exercice 4448 ▲

1.
2.
3.
4.
5. $S_n + \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S \leqslant S_n + \frac{1}{\ln n}$. Pour $n = 60$: $2.06857 < S < 2.06956$.

Correction de l'exercice 4449 ▲

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante sur l'intervalle $[n,n+1]$, $0 < \dfrac{1}{t^x} \leqslant \dfrac{1}{n^x}$. Donc,

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x} \quad \text{par positivité de l'intégrale}$$

puis

$$\int_1^{N+1}\frac{dt}{t^x} = \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} \quad \text{par la relation de Chasles.}$$

De même sur $[n-1,n]$, $\dfrac{1}{t^x} \geqslant \dfrac{1}{n^x} > 0$ et

$$\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^x} \geqslant \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

$$\int_1^N \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \quad \text{par la relation de Chasles.}$$

Finalement

$$1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

$$\text{Donc, on a :} \qquad \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}. \tag{1}$$

Calculons dans un premier temps, $\int_1^N \frac{dt}{t^x}$:

$$\int_1^N \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_1^N = \frac{N^{1-x}-1}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{x-1}$$

avec la même limite pour $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x}$. Ainsi on a montré que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^x}$, série de Riemann avec $x > 1$, est convergente. On déduit alors de (1), en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\begin{array}{lrcccl} & \frac{1}{x-1} & \leqslant & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & 1+\frac{1}{x-1} \\ \text{donc} & \frac{x-1}{x-1} & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & (x-1)\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \\ \text{puis} & 1 & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & x. \end{array}$$

D'où, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1.$$

(*Corrigé d'Antoine Poulain*)

Correction de l'exercice 4450 ▲

Si $u_n \to 0$, alors $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Correction de l'exercice 4451 ▲

1.
2. $\frac{r}{(1-r)^2}$.

Correction de l'exercice 4452 ▲

On remarque déjà que $\sum u_i$ diverge car $u_n \sim \frac{U_n}{n\alpha} \geqslant \frac{U_1}{n\alpha}$. On calcule $\sum_{k=0}^{n} ku_k$ par parties :

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Comme $U_n \sim \alpha n u_n$, terme général strictement positif d'une série divergente, on a $\sum_{k=0}^{n} U_k \sim \alpha \sum_{k=0}^{n} ku_k$ d'où : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim nU_n$ et lorsque $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=0}^{n} ku_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2 u_n} \to \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Correction de l'exercice 4453 ▲

$S_n = \sum_{k=0}^{n} ku_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_n}{n}$.

Correction de l'exercice 4454 ▲

1.
2.
3. $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$ avec $u_k = \frac{r^k}{1-r}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$.
De même, $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} kr^k = \frac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{nr^n}{1-r} + \frac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.
$k^2r^k = k(S_k - S_{k+1})$ et (S_k) décroît d'où $\sum_{k=1}^{\infty} k^2r^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{kr^k}{1-r} + \frac{r^{k+1}}{(1-r)^2}\right) = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Correction de l'exercice 4455 ▲

1.
2. $p_n = \frac{u_0}{S_n} \to 0$ donc la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 4456 ▲

Méthode des rectangles : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geqslant \int_{t=a_{n+1}}^{a_0} \frac{dt}{t} \to +\infty$ lorsque $k \to \infty$.
Si $a_k \sim a_{k+1}$ la série donnée diverge donc. Sinon, elle diverge aussi car son terme général ne tend pas vers 0.

Correction de l'exercice 4457 ▲

$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leqslant k} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{2N-1} u_k$.

Correction de l'exercice 4458 ▲

$\sum_{k=1}^{n} v_k + nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi (SP majorées) et $nv_n \to \ell \Rightarrow \ell = 0$.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge, alors $nv_n \to +\infty$, contradiction.

Correction de l'exercice 4459 ▲

$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Correction de l'exercice 4460 ▲

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Correction de l'exercice 4461 ▲

Pour $n > 2$, $u_{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $u_{n+2} > \frac{1}{(n+1)e^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Correction de l'exercice 4464 ▲

1.
2. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1 > 0, v_n \to +\infty \\ \text{si } a-b+1 = 0, v_n = \text{cste} \\ \text{si } a-b+1 < 0, v_n \to 0. \end{cases}$
3. $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1} + (b-a-1)\sum_{k=1}^{n} u_k - au_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Correction de l'exercice 4465 ▲

La suite (u_n) est croissante donc tend vers $\ell \in]0,+\infty]$. On a ℓ fini si et seulement si la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n) = \sum \frac{1}{n^a u_n}$ est convergente, soit si et seulement si $a > 1$.

Pour $a<1$ on a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^a} + o\left(\frac{2}{n^a}\right)$ donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim \frac{2}{n^a}$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (sommation des relations de comparaison).
Pour $a=1$ on a de même $u_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

Correction de l'exercice 4466 ▲

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv et vaut $\zeta(\alpha)^2$.
$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{2N} u_n \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Correction de l'exercice 4468 ▲

$\frac{a}{(1-a)^2}$ et $\frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Correction de l'exercice 4470 ▲

1. Césaro.
2. $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - v_n$.

Correction de l'exercice 4471 ▲

$|a_n| \leqslant M \Rightarrow \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}\right| \leqslant M \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leqslant M \int_{t=1}^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \frac{M}{p-1} \Rightarrow a_1 = 0$.

Correction de l'exercice 4472 ▲

Démonstration pour x_1 : $\sum x_n = 0$, $\sum x_{2n} = 0 \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} x_n = 0$. On retire les multiples impairs de 3 ($\sum x_{3n} - \sum x_{6n} = 0) \Rightarrow \sum_{n \not\equiv 0[2];n \not\equiv 0[3]} x_n = 0$. On retire les multiples restants de $5, 7, \dots$ On obtient ainsi une suite $(s_p)_{p \text{ premier}}$ nulle qui converge vers x_1, donc $x_1 = 0$.
Peut-on se passer de la convergence absolue ?

Correction de l'exercice 4473 ▲

1. Récurrence sur p.
2. Transformation d'Abel et interversion de sommations : $\sum_{n=0}^{p} v_n = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p} \sum_{n=0}^{k} u_n$.
   Théorème de Césaro $\Rightarrow \sum v_n = 2 \sum u_n$.

Correction de l'exercice 4474 ▲

1. $nu_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, $nu_{2n+1} \leqslant \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k$.
2. $\varepsilon > 0$: Pour k suffisament grand, $u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{k}$, donc $u_k \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow k \leqslant n\varepsilon$. Alors $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \frac{1}{u_k} \leqslant n^2\varepsilon + Kn$.

Correction de l'exercice 4475 ▲

1. TAF : $\exists\, x_n \in [R_{n+1}, R_n]$ tel que $R_n^{1-p} - R_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{R_n - R_{n+1}}{x_n^p} \geqslant (1-p)\frac{a_n}{R_n^p}$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leqslant \frac{A^{1-p}}{1-p}$.
2. C'est $\frac{1}{1-p}$: Pour $a_n = k^n$, $A^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} = \frac{1-k}{1-k^{1-p}} \to \frac{1}{1-p}$ lorsque $k \to 1^-$.

Correction de l'exercice 4476 ▲

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées.
Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leqslant \frac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Correction de l'exercice 4481 ▲

Transformaton d'Abel.

Correction de l'exercice 4482 ▲

Transformation d'Abel + découpage, $v_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4483 ▲

$|u_n| + |v_n| \leqslant (|u_1| + |v_1|) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$ et le produit infini est trivialement convergent.

Correction de l'exercice 4484 ▲

1.
2. (a) $1 + S_N \leqslant P_N$ n'est plus triviale mais reste vraie par récurrence (la différence est une fonction décroissante de a_1).

   (b)
3. La suite $(P_N e^{-S_N})$ est positive décroissante donc converge, ce qui entraîne la convergence de (P_N). On a $P_N \to 0$ ssi $P_N e^{-S_N} \to 0$ (lorsque $N \to \infty$) soit ssi la série de terme général $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$ diverge.
4. (a) Démontrer l'inégalité en développant les deux membres. Sachant que la suite (P_N) est bornée on en déduit qu'elle est de Cauchy donc converge.

   (b)

Correction de l'exercice 4485 ▲

On a $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Soit $a \in [0,1[$ et M_a, m_a le maximum et le minimum de f sur $[0,a]$. D'après la relation précédente, $m_a \geqslant m_{a^2}$ et $M_a \leqslant M_{a^2}$ donc en fait $m_a = m_{a^2}$ et $M_a = M_{a^2}$.
On en déduit $f([0,a]) = f([0,a^2]) = \cdots = f([0,a^{2^k}]) = \cdots = \{f(0)\}$. Donc f est constante et réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Correction de l'exercice 4486 ▲

Soit $(p_0, p_1, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers et $S_k = \sum_{P(n) \leqslant k} \frac{1}{n}$. On a $S_k = S_{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^i} = \frac{p_k}{p_k - 1} S_{k-1}$, ce qui prouve que S_k est fini. La série demandée est $\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{p_k^2}$.
Montrons que $S_k \leqslant 2\sqrt{p_k}$, ceci prouvera la convergence. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$, et si c'est vrai pour $k-1$ avec $k \geqslant 2$ alors on obtient $S_k \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k p_{k-1}}{(p_k-1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k-2)}{(p_k-1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}$.
Remarque : on a en réalité $S_k \sim e^{\gamma} \ln(p_k)$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens).

Correction de l'exercice 4488 ▲

1.
2.
3. Soit (r_n) une énumération de Q. On pose $f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{(n+1)^2}$. f est strictement croissante car pour $x < y$ il existe $n \in |||$ tel que $x < r_n < y$ donc $f(y) - f(x) \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}$. Si $x \in \mathbb{Q}$, $x = r_k$ alors $f(x^+) - f(x^-) \geqslant \frac{1}{(k+1)^2}$ d'où f est discontinue en x. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n \in |||$ alors il existe un voisinage de x ne contenant aucun r_i, $i \leqslant n$ d'où
   $f(x^+) - f(x^-) \leqslant \sum_{i>n} \frac{1}{(i+1)^2}$ et f est continue en x.

Correction de l'exercice 4489 ▲

Soit $[a,b]$ de longueur supérieure ou égale à $2\zeta(2)$ et $F_n = [a,b] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_n)$. Alors (F_n) vérifie le théorème des fermés emboités dans un compact.

Correction de l'exercice 4490 ▲

1. Regroupement à $i+j$ constant $\Rightarrow$ CV ssi $\alpha > 2$.
2. Pour $\alpha \geqslant 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^\alpha \leqslant i^\alpha + j^\alpha \leqslant (i+j)^\alpha$ donc il y a convergence ssi $\alpha > 2$.
3. Il y a une infinité de termes supérieurs à $1/4$.
4. $\frac{1}{a^p+b^q} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a^p}\sqrt{b^q}} \Rightarrow$ sommable.

Correction de l'exercice 4491 ▲

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e$.

Correction de l'exercice 4492 ▲

$-\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Correction de l'exercice 4493 ▲

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n-1}$ diverge.
2. $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2}$ si $n \neq 0$, $-\frac{\pi^2}{6}$ si $n = 0$. $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Correction de l'exercice 4494 ▲

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{(n,p)\in|||}^{+\infty} x^{(p+1)(2n+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{1-x^{2p+2}}$.

Correction de l'exercice 4496 ▲

1. $|t| < 1$.
2. $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} t^{kn}$ et on peut échanger les deux sommes car il y a convergence absolue.
3. On suppose $t \in]0,1[$. $\frac{d}{dx}\left(\frac{t^x}{1-t^x}\right) = \frac{t^x \ln t}{(1-t^x)^2} < 0$ donc le critère des séries alternées s'applique, le reste est majoré en valeur absolue par le premier terme du reste. $0 \leqslant \frac{t^k(1-t)}{1-t^k} = \frac{t}{1+\frac{1}{t}+\dots+\frac{1}{t^{k-1}}} \leqslant \frac{1}{k}$ donc le terme général converge uniformément vers 0.

   Par interversion de limite (puisqu'il y a convergence uniforme) on obtient $\lim_{t\to 1^-} (1-t)S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.
4. $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} t^{kn} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{kn=p} (-1)^{k-1} t^p = \sum_{p=1}^{\infty} \sigma(p) t^p$

   avec $\sigma(p) =$ (nombre de diviseurs impairs de p) $-$ (nombre de diviseurs pairs de p) $= \sigma_i(p) - \sigma_p(p)$. Si $p = 2^\alpha q$ avec q impair alors $\sigma_p(p) = \alpha\sigma_i(p) = \alpha\sigma_i(q)$ donc $\sigma(p) > 0$ ssi p est impair *(très joli exercice)*.

Correction de l'exercice 4497 ▲

1. Il y a convergence si $|z| < 1$. On a alors $f(z) = \sum_{(n,p)\in|||^2} z^{anp+bn+cp}$. Il y a aussi convergence pour $|z| > 1$ lorsque $a > b$ et on a dans ce cas : $f(z) = \sum_{(n,p)\in|||\times|||^*} z^{-anp+bn-cp}$ (non symétrique en b, c).
2. $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n$ avec $d_n =$ nombre de diviseurs de n dans $[[1, n-1]]$.

Correction de l'exercice 4498 ▲

$A = \zeta(2)^2$, $B = \zeta(2)\zeta(4)$, $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

Correction de l'exercice 4499 ▲

$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Correction de l'exercice 4502 ▲

La série converge pour tout $x \notin \{-2,-3,\dots\}$ car le critère des séries alternées s'applique à partir d'un certain rang (fonction de x). Il en va de même pour toutes les séries obtenues par dérivations successives terme à terme, et ces séries convergent localement uniformément (le reste d'une série vérifiant le CSA est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme figurant dans le reste) donc f est $\mathscr{C}^\infty$.
Pour $|x| < 2$ on a

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{-x}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1}}x^n = (1-\ln 2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-(1-2^{-n})\zeta(n+1))x^n.$$

Correction de l'exercice 4503 ▲

1.
2. $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim en^{\alpha-1}$.

Correction de l'exercice 4506 ▲

1.
2. Intégrale constante = 1.

Correction de l'exercice 4507 ▲

1. e^{-x}.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 4508 ▲

CVU sur tout compact par encadrement du logarithme.

Correction de l'exercice 4511 ▲

1. $y_n = (n+1)\left(e^x - e^{nx/(n+1)}\right)$.
2. $y = xe^x$.
3.

Correction de l'exercice 4512 ▲

$\left(|f_n(x)|\right)$ décroît donc tend vers L. On extrait une sous suite $(f_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell \Rightarrow |\ell| = L$.
La sous-suite $(f_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(\ell) \Rightarrow |f(\ell)| = L \Rightarrow L = 0$.

Correction de l'exercice 4513 ▲

1. $\ell(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \text{ si } t > 0. \end{cases}$
2.
3. Accroissements finis.
4.

Correction de l'exercice 4515 ▲

$f_n(t) \to \sqrt{t}$ par valeurs croisantes, il y a convergence uniforme.

Correction de l'exercice 4516 ▲

$P_n\left(t+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{t^2}{4}-1\right)^k.$

Correction de l'exercice 4518 ▲

1.
2. oui, par convolution.

Correction de l'exercice 4521 ▲

$|g_n(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant |g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - g(f(x))|$ et g est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4522 ▲

1. Polynôme de Lagrange.
2.

Correction de l'exercice 4523 ▲

1. Il y a convergence simple vers la fonction nulle en 0 et 1 et égale à $1/2$ ailleurs. La convergence est uniforme sur tout $[a,b] \subset]0,1[$.
2. La question précédente donne le résultat pour $1/2$, il suffit alors d'utiliser le théorème de Weierstrass et les nombres dyadiques.

Correction de l'exercice 4527 ▲

Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer f_n par les cordes associées.

Correction de l'exercice 4528 ▲

1.
2. $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi \operatorname{sh} 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e - \cos 1)$.

Correction de l'exercice 4529 ▲

1. $\mathbb{R}^*$.
2. CSI : $\frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx \leqslant f(a) \leqslant \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx + 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} + 1$. Donc $af(a) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque $a \to 0^+$.
3. TCM : $f(a) \to 1$ lorsque $a \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4532 ▲

1.
2. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

Correction de l'exercice 4534 ▲

1.
2. $xg(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$.
3. CSA $\Rightarrow g' < 0$. $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, $g(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
4. $g(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+ et $g(x) \sim \frac{1}{ex}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 4536 ▲

1.
2. CSA $\Rightarrow |R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.
3. Non, $\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 4537 ▲

1.
2. $f(x+1) = xf(x) - 1$.
3.

Correction de l'exercice 4538 ▲

1. CVU sur tout $[a,b]$.
2.
3. $f(x+1) = f(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan x$.
4. $f(x+1) - f(x) \sim \frac{1}{x}$ donc la suite $(f(n))$ diverge et f est croissante $\Rightarrow \lim = +\infty$.

Correction de l'exercice 4539 ▲

$\frac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

Correction de l'exercice 4540 ▲

1. $\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \frac{x(x+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \ln f_n(x)$ est convergente pour tout $x \notin -|||^*$.
2.
3. $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \to -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4541 ▲

Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x) = 1 - \int_{u=0}^{1}(1-u)^{n+1} x \sin(xu)\,du$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.

Correction de l'exercice 4543 ▲

1. cva si $|\cos x| < 1$, scv si $\cos x = 1$, dv si $\cos x = -1$.
2. TCM en regroupant les termes deux par deux.
3. $\int_{x=0}^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\,dx$.

Correction de l'exercice 4544 ▲

1. $F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X+n(1-e^{2ik\pi/n})}$.
2. $F_n(2x) - F_n(-2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2-n^2(1-e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2}$.
   Supposons n impair, et regroupons les termes conjugués obtenus pour k et $n-k$:
   $F_n(2x) - F_n(-2x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \Big(\underbrace{\frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2} + \frac{x}{x^2e^{2ik\pi/n}+n^2\sin(k\pi/n)^2}}_{=u(k,n,x)}\Big)$.
   On transforme la somme en série de $k=1$ à $k=\infty$ en posant $u(k,n,x)=0$ si $k>(n-1)/2$, puis on passe à la limite, sous réserve de justification, dans cette série pour $n\to\infty$, ce qui donne la formule demandée.
   Justification de l'interversion limite-série : en utilisant $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ on a $|u(k,n,x)| \leqslant \frac{2|x|}{4k^2-x^2}$ pour tout $k \geqslant |x/2|$, donc il y a convergence normale par rapport à n, à x fixé.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{x^2+k^2\pi^2} = \frac{\coth(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite pour $x \to 0$.

Correction de l'exercice 4545 ▲

1. Transformation d'Abel.
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.
3. $\frac{\pi-1}{2}$.

Correction de l'exercice 4546 ▲

1.
2. $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t^x}\right)$.
   A n fixé, $\frac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t^x} \to \frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t}$ lorsque $x \to 1^+$ et la convergence est monotone donc lorsque $x \to 1^+$ $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\frac{dt}{t}\right) = \gamma$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \eta'(1) = \gamma\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2)^2$.

Correction de l'exercice 4548 ▲

Pour k fixé et $x \in [0,1[$ on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \text{polynôme}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^k = \text{polynôme}(x) + \frac{1}{1-x^k}$ et $\frac{1}{1-x^k} \sim \frac{1}{k(1-x)}$ au voisinage de 1 donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{k(1-x)}$ pour x suffisament proche de 1.

Correction de l'exercice 4549 ▲

1.
2. soit $y \in [c,d]$ et $x_n = f_n^{-1}(y)$. La suite (x_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $x = f^{-1}(y)$.
3.

Correction de l'exercice 4550 ▲

Oui : $|\sup f_n - \sup f| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.

Correction de l'exercice 4551 ▲

1. Il y a convergence normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Il n'y a pas convergence normale au voisinage de 0 car $\sup\left\{\frac{xe^{-nx}}{\ln n},\ x \geqslant 0\right\} = \frac{1}{en\ln n}$ atteint pour $x = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (série de Bertrand). Par contre il y a convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ car

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{\ln n(1-e^{-x})} \leqslant \frac{\sup\{t/(1-e^{-t}),\ t \geqslant 0\}}{\ln n}.$$

2.
3. Lorsque $x \to 0^+$, $\frac{S(x)-S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$ par convergence monotone.
4.

Correction de l'exercice 4552 ▲

Comparaison série-intégrale, $f(x) \to \ln(2)$ lorsque $x \to 1^-$.

Correction de l'exercice 4553 ▲

1. $-1 < t < 1$.
2. Pour $0 \leqslant t < 1$ et $n \geqslant 2$ on a :

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{t^n}{1-t^n} &= \frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}}\\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{t^n((1-t)+(1-t^2)+\cdots+(1-t^{n-1}))}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})}\\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{(t^n-t^{n+1})((n-1)+(n-2)t+\cdots+t^{n-2})}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})}\end{aligned}$$

d'où $0 \leqslant (1-t)\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n} \leqslant \frac{n-1}{n}(t^n - t^{n+1}) \leqslant t^n - t^{n+1}$ (vrai aussi si $n = 1$) et en sommant :

$$0 \leqslant (1-t)S(t) + \ln(1-t) \leqslant 1.$$

Correction de l'exercice 4554 ▲

1. La série converge normalement et ϕ est continue.
2. ϕ est 1-lipschitzienne, mais on ne peut rien en déduire pour f : pour N fixé et $0 < h \leqslant \frac{1}{2.4^N}$, on a $|f(h)-f(0)| = f(h) \geqslant \sum_{n=1}^{N} 3^n h = \frac{3^{N+1}-3}{2}h$ donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.
3. D'après ce qui précède, le taux d'accroissement de f en 0 est arbitrairement grand, donc f n'est pas dérivable en 0. On montre de même que f n'est pas dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4555 ▲

On suppose h réel. La série converge localement normalement sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Continuité en 0 : on pose $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon infini). Pour $h \neq 0$ on a :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{t=(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,dt.$$

Cette dernière série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $A_n \to 0$ (lorsque $n \to \infty$) et $\int_{t=0}^{+\infty} |\varphi'(t)|\,dt$ est convergente.

Correction de l'exercice 4556 ▲

1. Soit $k = \lfloor n/2\pi \rfloor$. On a $F_n(x) = \frac{2k\pi}{n}\int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_{t=2k\pi}^{n} f(x+t)f(t)\,dt \to \int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt$ lorsque $n \to \infty$.
2. Uniforme.
3. Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 4557 ▲

$g = x \mapsto f(\tan(x/2))$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Correction de l'exercice 4558 ▲

1. CSA : $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. $xf(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2+x^2}}$
   $= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{t=2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2+x^2)^{3/2}}\,dt$
   $= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du.$
   On a $\int_{u=0}^{\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = 1 = a+b$ avec :
   $a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p)/x}^{(2p+1)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du$ et $b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = xf(x)$.
   $h : u \mapsto \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}$ est croissante sur $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$ donc $|a-b| \leqslant \frac{3\|h\|_\infty}{x}$, et $xf(x) \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4559 ▲

On a $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \leqslant xS_1(x) \leqslant \frac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$ et $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{t} + O(t)$ donc $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$. On en déduit $S_1(x) \sim -\frac{\ln x}{x}$.
La même méthode ne marche pas pour S_2 car le terme résiduel, $\frac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ n'est pas négligeable devant $\int_{t=x}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)}$.
Par contre, on peut remarquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, d'où $S_2(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4560 ▲

1. Lorsque $n \to \infty$, $S_n(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}}\right) \to \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}$ pour $-1 < t < 1$.
2. $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}$.
   $\int_{t=0}^{1} S(t)\,dt = (t - \cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan x/2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi-x}{2}$.
3. TCD : $|S_n(t)| \leqslant \frac{2}{\sin x}$ intégrable par rapport à t sur $[0,1]$. On en déduit $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{\pi-x}{2}$.

Correction de l'exercice 4561 ▲

1. R est trivialement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le théorème de décomposition en éléments simples donne une base de R en se limitant aux éléments simples n'ayant pas de pôle dans $[0,1]$.
   $R_{m,n}$ n'est pas un espace vectoriel. Par exemple $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{1}{X+2}$ appartiennent à $R_{0,1}$ mais pas leur somme.

2. Soit (f_k) une suite d'éléments de $R_{m,n}$ telle que $\|g - f_k\| \to d$ quand $k \to \infty$. On note $f_k = P_k/Q_k$ avec $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$, $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\|Q_k\| = 1$. On a $\|P_k\| \leqslant \|g - f_k\| + \|g\|$ donc les suites (P_k) et (Q_k) sont bornées dans $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Quitte à prendre une sous-suite, on se ramène au cas $P_k \to P \in \mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k \to Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (quand $k \to \infty$) avec de plus $\|Q\| = 1$.
Si Q n'a pas de racine dans $[0,1]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|Q(x)| \geqslant \alpha$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $|Q_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout k assez grand. On en déduit que la suite (P_k/Q_k) converge uniformément vers P/Q sur $[0,1]$ et que $r_0 = P/Q$ convient.
Si Q admet dans $[0,1]$ des racines $a_1,\dots,a_p$ de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, on note $Q^0 = \prod_i (X-a_i)^{\alpha_i}$ et $Q^1 = Q/Q^0$. Soit $M = \max\{\|g - f_k\|,\ k \in |||\}$. Pour tous $x \in [0,1]$ et $k \in |||$ on a $|g(x)Q_k(x) - P_k(x)| \leqslant M|Q_k(x)|$ donc à la limite, $|g(x)Q(x) - P(x)| \leqslant M|Q(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci implique que Q^0 divise P, on note $P^1 = P/Q^0$. Alors pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in |||$ on a $|g(x)Q^0(x) - P_k(x)Q^0(x)/Q_k(x)| \leqslant \|g - f_k\||Q^0(x)|$, d'où $|g(x)Q^0(x) - P^1(x)Q^0(x)/Q^1(x)| \leqslant d|Q^0(x)|$ et finalement $r_0 = P^1/Q^1$ convient.

Correction de l'exercice 4562 ▲

1.
2. Soit P_n le polynôme de Lagrange défini par $P_n(x_i) = f_n(x_i)$ et $\deg P_n < p$. Les coordonnées de P_n dans la base de Lagrange forment des suites convergentes donc la suite (P_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$. Quant à la suite $(P_n^{(p)})$, c'est la suite nulle. Donc on peut remplacer f_n par $f_n - P_n$ dans l'énoncé, ce qui revient à supposer que $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i. Soit f la fonction définie par $f(x_i) = 0$ et $f^{(p)} = g$: f existe (prendre une primitive p-ème arbitraire de g et lui soustraire un polynôme de Lagrange approprié) et est unique (la différence entre deux solutions est polynomiale de degré $< p$ et s'annule en p points distincts). On remplace maintenant f_n par $f_n - f$, et on est rammené à montrer que : si $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i et si $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction nulle, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Ceci résulte du lemme suivant :
Il existe une fonction φ_p bornée sur $[a,b]^2$, indépendante de n, telle que $f_n(x) = \int_{t=a}^{b} \varphi_p(x,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$.
Démonstration. On écrit la formule de Taylor-intégrale pour f_n entre x et y :
$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) + \int_{t=x}^{y} \frac{(y-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\,dt.$$
L'intégrale peut être étendue à l'intervalle $[a,b]$ sous la forme $\int_{t=a}^{b} u_p(x,y,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$ en posant
$$u_p(x,y,t) = \begin{cases} (y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } x < t < y\,; \\ -(y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } y < t < x\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En prenant successivement $y = x_1, \dots, y = x_n$, on obtient un système linéaire en $f_n(x), \dots, f_n^{(p-1)}(x)$ de la forme :
$$\begin{cases} f_n(x) + (x_1 - x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(x_1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) &= -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_1,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \\ \vdots & \\ f_n(x) + (x_p - x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(x_p-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) &= -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_p,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \end{cases}$$
La matrice M de ce système est la matrice de Vandermonde de $x_1 - x, \dots, x_p - x$, inversible. On en déduit, avec les formules de Cramer, une expression de $f_n(x)$ à l'aide des intégrales du second membre, de la forme voulue. Le facteur φ_p est borné car le dénominateur est $\det(M) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$, indépendant de x.

Correction de l'exercice 4563 ▲

Développer en séries sous l'intégrale, multiplier, permuter avec l'intégrale puis simplifier.

Correction de l'exercice 4565 ▲

1. $R = 1$.
2. $R = 1$.
3. $R = 1$.
4. $R = \frac{1}{e}$.
5. $R = \frac{1}{\sqrt{b}}$.
6. $R = 1$.
7. $R = 1$.
8. $R = 1$.
9. $R = \frac{1}{3}$.
10. $R = 1$.
11. $R = 1$.
12. $R = \sqrt{2} - 1$.
13. $R = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.
14. $R = 0$.
15. $R = \frac{1}{2}$, $2t \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$.
16. $R = 1$, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$.
17. $R = 1$.

Correction de l'exercice 4567 ▲

La suite $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right)\right)_{k\in|||}$ est périodique de période 5, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit a celle de plus grande valeur absolue. Alors $R = \frac{1}{|a|}$.

Correction de l'exercice 4568 ▲

$\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \sim \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1, \\ \zeta(\alpha) & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$ Dans les trois cas, on obtient $R = 1$.

Il y convergence en $x = 1$ si et seulement si $\alpha < 0$ et il y a divergence grossière en $x = -1$ lorsque $\alpha > 1$ vu les équivalents. Pour $\alpha \leqslant 1$ et $x = -1$ il y a convergence (CSA).

Correction de l'exercice 4569 ▲

1. (a_n) est bornée et (na_n) ne l'est pas, donc $R_a = 1$. $|b_n| \sim |a_n|$ donc $R_b = 1$.
2. Il y a doute seulement pour $x = \pm 1$. Le critère de convergence d'Abel (hors programme) s'applique, $\sum a_n x^n$ converge si $x = \pm 1$. $b_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + O(n^{-5/3})$ et le critère d'Abel s'applique aussi à $\sum a_n^3 x^n$ (linéariser le $\cos^3$), il y a aussi convergence pour $x = \pm 1$.
   Résolution conforme au programme : regrouper par paquets de six termes.

Correction de l'exercice 4570 ▲

1. $R' = R^2$.
2. $R' = \infty$.
3. $R' = eR$.

Correction de l'exercice 4571 ▲

$\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

Correction de l'exercice 4572 ▲

1. Série produit de $a(z)$ et $\frac{1}{z-\rho} \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}\rho^k$.
2. Si $a(\rho) \neq 0$: $b(z)$ converge pour $|z| < \rho$ et tend vers l'infini pour $z \to \rho^- \Rightarrow R = \rho$.
   Si $a(\rho) = 0$: $\forall\, r > \rho,\ |a_p| \leqslant \frac{M}{r^p} \Rightarrow |b_n| \leqslant \frac{M}{r^n(r-\rho)} \Rightarrow R = \infty$.

Correction de l'exercice 4573 ▲

1. $]-1,2[$.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant 4^n$, on a $|a_k| \leqslant C_{4^n}^{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ (atteint pour $k = 4^n/2$).

   Donc $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et si $x > 1$ alors $a_{3*4^n/2}x^{3*4^n/2} \to \emptyset$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4574 ▲

1. $= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2\frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right)$.
2. Factoriser : $-\ln 6 + \left(\frac{5}{6} + \ln 6\right)x - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2^n} + \frac{2n+1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n(n-1)}$.
3. Dériver le ln : $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2n+5+3(-1)^n}{4}x^n$.
5. $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1 + 2\sqrt{2}^n(2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4))\Big)x^n$.
6. Intégrer : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4\sqrt{2}}\Big((-\sqrt{2}-1)^{n+2} - (\sqrt{2}-1)^{n+2}\Big)x^n$.
7. $= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n(x^{2n} - x^{2n+1})$.
8. Dériver : $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n}(-1)^n x^n$.
9. Dériver : $\frac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\pi/6)}{n2^n}x^n$.
10. Dériver, factoriser : $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n+2^{-n}}{n^2}x^n$.
11. Linéariser : $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!}\Big(x^{2n-1} + \frac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n}\Big)$.
12. Dériver : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$.
13. $y' = -4xy + 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{8^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
14. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n}x^n$.
15. $(1-x^2)y'' - xy' + \frac{y}{9} = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^nC_{3n}^n}{(2n+1)3^{3n+1}}x^{2n+1}$.

Correction de l'exercice 4575 ▲

$= \frac{1}{2}\ln(e^a - x) + \frac{1}{2}\ln(e^{-a} - x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(ka)}{k}x^k$.

Correction de l'exercice 4576 ▲

$\frac{e^{x^2}}{1-x} = (1+x)\frac{e^{x^2}}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)(x^{2n} + x^{2n+1})$.

Correction de l'exercice 4577 ▲

$f(\operatorname{sh} y) = e^{y/2}$ d'où l'équation différentielle : $(1+x^2)f''(x)+xf'(x) = \frac{1}{4}f(x)$.
En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on obtient $4(k+1)(k+2)a_{k+2} = -(2k+1)(2k-1)a_k$ avec $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$, d'où $a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}C_{4p-2}^{2p-1}}{p2^{4p}}$ si $p \geqslant 1$ et $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p C_{4p}^{2p}}{2^{4p+1}(2p+1)}$ si $p \geqslant 0$.
Le rayon de convergence de la série correspondante est 1, ce qui valide la méthode (avec le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz).

Correction de l'exercice 4578 ▲

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Correction de l'exercice 4579 ▲

Coefficient de x^n dans $(\sum x^k)(\sum(k+1)x^k)(\sum(k+1)^2 x^k) = \frac{1+x}{(1-x)^6}$
$\Rightarrow c_n = \binom{n+5}{5} + \binom{n+4}{5} = \frac{(2n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$.

Correction de l'exercice 4581 ▲

1. $-1+\sqrt{x}\operatorname{argth}\sqrt{x}$ pour $0 \leqslant x < 1$ et $-1-\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$.
2. $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.
3. $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.
4. $\frac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).
5. $-\frac{1}{2}(x+(x^2+1)\arctan x)$ (décomposer en éléments simples).
6. $-1+\frac{u}{4}\operatorname{argth} u - \frac{u}{2}\arctan u$, $u = \sqrt[4]{x}$.
7. $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{x}}\operatorname{argth}\sqrt{x}$ pour $0 \leqslant x < 1$ et $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1 < x \leqslant 0$.
8. $-\frac{1}{2}\ln(1-2x\operatorname{ch} a + x^2)$.
9. $1 - \frac{5\cos 2\theta - 4}{(5-4\cos 2\theta)^2}$ (linéariser).
10. $\frac{2x-1}{(1-x)^2} - \frac{2\ln(1-x)}{x}$.
11. $\operatorname{ch}\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $\cos\sqrt{-x}$ pour $x \leqslant 0$.
12. $\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2\cos 2\theta}}{2}\cos(x^2\sin 2\theta)$.
13. $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.
14. $\frac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f''' = f)$.
15. $\frac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.
16. $\frac{x^2-1}{2}$.
17. $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Correction de l'exercice 4582 ▲

$R = \sqrt{2}-1$, $\Sigma = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Correction de l'exercice 4583 ▲

1.

2. S'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $|\lambda| \geqslant 1$ et si x est un vecteur propre associé alors $kA^k x = k\lambda^k x \not\to 0$ donc la série diverge.
   Si toutes les valeurs propres de A sont de module < 1, comme $kA^k = \sum_\lambda \lambda^k P_\lambda(k)$ où les P_λ sont des polynômes à coefficients matriciels, la série converge absolument.
3. $S = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^{k+1} = AS + \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = AS + A(I-A)^{-1}$ donc $S = A(I-A)^{-2}$ est inversible ssi A l'est.

Correction de l'exercice 4584 ▲

1. $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$. $\chi_A(-1) > 0$, $\chi_A(0) < 0$, $\chi_A(1) > 0$, $\chi_A(2) > 0$, $\chi_A(3) < 0$ donc χ_A admet une racine dans chacun des intervalles $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]2,3[$.
2. Cayley-Hamilton : $t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$.
3. Soient $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < 2 < \gamma < 3$ les valeurs propres de A. On a $t_n z^n = (\alpha z)^n + (\beta z)^n + (\gamma z)^n$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ converge si et seulement si $|\gamma z| < 1$ et vaut :

$$\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\gamma z} = \frac{1}{z}\frac{\chi'}{\chi}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-z^2-4z+3}{z^3-z^2-2z+1}.$$

Correction de l'exercice 4585 ▲

$= -\int_{t=0}^{1} \frac{t^3}{1+t^3}\,dt = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1.$

Correction de l'exercice 4586 ▲

$R = 1$. On décompose P sous la forme : $P = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \cdots + a_p(X+1)\dots(X+p)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{p!\,a_p}{(1-x)^{p+1}}$.

Correction de l'exercice 4587 ▲

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{2^n} = \frac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5-4\cos\theta)$.

Correction de l'exercice 4588 ▲

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^n$ donc $u_n \to \frac{1}{e}$ lorsque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4589 ▲

1. Pour $|x| < \frac{1}{q}$: $\ln f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-q^n x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{kn}x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k x^k}{k(1-q^k)}$,
   $f = e^{\ln f}$ est DSE par composition.
2. $a_n = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q-1)\dots(q^n-1)}$, $R = \infty$.

Correction de l'exercice 4590 ▲

$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}e^{-n} \geqslant k^{2k}e^{-k}$, donc $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geqslant k^k e^{-k} \Rightarrow R = 0$.

Correction de l'exercice 4591 ▲

Il y a dérivation terme à terme facilement et indéfiniment.
DSE au voisinage de 0 : on envisage de permuter les Σ dans : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha}\frac{(inx)^p}{p!}$, ce qui est légitime si la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha}e^{n|x|}$ converge. On en déduit qu'une condition suffisante pour que f soit DSE au voisinage de 0 est $\alpha \geqslant 1$ (avec convergence si $x \in]-1,1[$ pour $\alpha = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha > 1$).

Cas $\alpha < 1$: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} n^k \geqslant e^{-N^\alpha} N^k$ avec $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$ donc pour $r > 0$ fixé et k tendant vers l'infini on a $\ln\left(\left|\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}\right|\right) \sim \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) k \ln(k)$ et la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}$ diverge grossièrement.
DSE au voisinage de $a \neq 0$: même raisonnement en écrivant $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{ina} \frac{(in(x-a))^p}{p!}$. En conclusion, f est analytique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 4592 ▲

1. Pour $x \neq 0$ la série comporte un nombre fini de termes non nuls au voisinage de x, donc est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x. On a $|f^{(k)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{k-n} \varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{k-n} M_n \leqslant \text{cste}(k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| M_n / \lambda_n$ en supposant $\lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant k$, donc $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que f est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et on a le développemment limité : $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + o(x^k)$ car $\phi \equiv 1$ au voisinage de 0 donc $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$.
2. $\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{(1-x)(x-2)}\right)$ sur $]1,2[$, $\psi(x) = 0$ ailleurs.

Correction de l'exercice 4593 ▲

1. $R = 1$.
2. $x = -1 \Rightarrow$ cv (série alternée), $x = 1 \Rightarrow$ dv.
3. f est croissante sur $[0,1[$ donc L existe dans $[0,+\infty]$.
   $L = \sup_{[0,1[} f(x) \geqslant \sup_{[0,1[} \sum_{n=1}^{N} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow L = +\infty$.

Correction de l'exercice 4594 ▲

1. Fonction croissante. $\lim_{x \to 1^-} A(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n$.
2. Dém de type Césaro.

Correction de l'exercice 4595 ▲

Continuité radiale.

Correction de l'exercice 4596 ▲

$\frac{c_n}{b_n} = a_0 + a_1 \frac{b_{n-1}}{b_n} + \cdots + a_n \frac{b_0}{b_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_{n,k}$ et le théorème de convergence dominée s'applique.

Correction de l'exercice 4597 ▲

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-2} x^n}{\prod_{2 \leqslant k \leqslant n} (3k+2)}$ $(R = \infty)$.
$N = 8 \Rightarrow 0.409954 \leqslant y(1) \leqslant 0.409973$.

Correction de l'exercice 4598 ▲

1. $\tan^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}$.
2. Pour $0 \leqslant x < \pi/2$ la série est à termes positifs et les sommes partielles sont majorées par $\tan x$. Pour $-\pi/2 < x \leqslant 0$, il y a convergence absolue.
3.
4. Si $R > \pi/2$, f aurait une limite finie en $\pi/2$.

Correction de l'exercice 4599 ▲

1. Produit de deux séries $\Rightarrow R \geqslant 1$. Lorsque $x \to 1^-$ $f(x) \to +\infty \Rightarrow R = 1$.

2. $(1-x^2)y' = xy+1 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n \Rightarrow a_{2k} = a_0\frac{C_{2k}^k}{4^k}$, $a_{2k+1} = a_1\frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

   $a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k x^{2k+1}}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

3. $\arcsin^2 x = 2\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{k^2C_{2k}^k}$.

Correction de l'exercice 4600 ▲

1. $R = 4$.
2. $y = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$. $f(x) = 1+\frac{x}{2}+o(x) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{4}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4601 ▲

1. $R = \sqrt{2}$.
2. Stirling $\Rightarrow a_n\sqrt{2}^{2n+1} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ DV.
3. $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2\arcsin(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2-x^2}}$.

Correction de l'exercice 4602 ▲

1.
2. $f'(x) = e^x f(x)$.

Correction de l'exercice 4603 ▲

1. $a_n \leqslant n!$ par récurrence.
2. $2f' = f^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x/2}$.
3. $a_n = n!\,2^{-n}$.

Correction de l'exercice 4604 ▲

$Z(x) = \sum_{n,p\geqslant 1}\frac{x^n}{p^{2n}} = \sum_{p\geqslant 1}\frac{x}{p^2-x}$.

$Z'(x) = \sum_{p\geqslant 1}\frac{p^2}{(p^2-x)^2} = \sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^2-x} + \sum_{p\geqslant 1}\frac{x}{(p^2-x)^2}$.

$Z^2(x) = \sum_{p,q\geqslant 1}\frac{x^2}{(p^2-x)(q^2-x)} = \sum_{p\neq q}\frac{x^2}{q^2-p^2}\left(\frac{1}{p^2-x}-\frac{1}{q^2-x}\right) + \sum_{p\geqslant 1}\frac{x^2}{(p^2-x)^2}$

$Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = 2\sum_{p\neq q}\frac{x^2}{(q^2-p^2)(p^2-x)}$.

A p fixé, $\sum_{q\neq p}\frac{1}{q^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{q\neq p}\left(\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$.

Donc $Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = \frac{3}{2}\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^2}{p^2(p^2-x)} = \frac{3}{2}(Z(x) - x\zeta(2))$.

Rmq : $2Z(x^2) = 1 - \pi x \operatorname{cotan}(\pi x)$ (Euler).

Correction de l'exercice 4605 ▲

$\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$.

Correction de l'exercice 4607 ▲

1. $t^t = \exp(t\ln t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\ln^k t}{k!}$.
2. 0.78343

Correction de l'exercice 4608 ▲

$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t=0}^{1}-\frac{t^n\ln t}{n}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=2-\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 4609 ▲

Développer en série entière $\ln(1-t^2)$. $I=\frac{\pi^2}{2}-4\ln 2$.

Correction de l'exercice 4614 ▲

1. Calcul.
2. Soit $0<r_0<d$ et $R(\theta)$ le rayon de la série de Taylor de f en $r_0e^{i\theta}$. Le cercle de centre 0 et de rayon r_0 est recouvert par les disques ouverts $D(r_0e^{i\theta},\frac{1}{2}R(\theta))$, θ variant de 0 à 2π, donc on peut en extraire un recouvrement fini ; soit ρ le rayon minimum des disques extraits. Alors pour $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ on a $R(\theta)\geqslant\rho$ (cf. analycité de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence).
   D'après la première question on a : $\left|\frac{f^{(n)}(r_0e^{i\theta})}{n!}\right|\leqslant\frac{M}{\rho^n}$ où M majore $|f|$ sur $\overline{D}(0,r_0+\rho)$ d'où pour $|r-r_0|<\rho$:
   $$\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}(r-r_0)^ke^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}(r-r_0)^k\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta.$$
   ce qui démontre l'analycité de $\varphi=r\mapsto\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta$ sur $]0,d[$.
   Enfin, $\varphi(r)=a_nr^n$ au voisinage de 0 d'où $\varphi(r)=a_nr^n$ sur $[0,d[$ par prolongement analytique.
3. $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}f(re^{i\theta})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$.
   Le rayon est au moins égal à r car f est bornée sur $\overline{D}(0,r)$.
4. résulte de la question 3..
5. D'après la question 1., $|a_n|\leqslant\|f\|_\infty/r^n$ pour tout $r>0$ donc $a_n=0$ si $n\geqslant 1$.
6. $1/P$ est analytique bornée sur (x^2+1).
7. On peut passer à la limite uniforme (ou dominée) dans la question 3..
8. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Rightarrow f\circ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n(z)$ et il y a convergence localement uniforme.

Correction de l'exercice 4616 ▲

$2\Rightarrow 1$: évident.
$1\Rightarrow 2$: Soit $a>0$ et $M=\sup(|f(z)|e^{-a|z|})$.
$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^ne^{in\theta}}\,d\theta\Rightarrow|a_n|\leqslant M\frac{e^{aR}}{R^n}\leqslant M\inf_{R>0}\frac{e^{aR}}{R^n}=M\left(\frac{ea}{n}\right)^n$.
Donc $\sqrt[n]{n!\,\|a_n\|}\leqslant\sqrt[n]{n!}\frac{ea}{n}\to a$ lorsque $n\to\infty$. CQFD

Correction de l'exercice 4617 ▲

1. $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est de signe constant sur le connexe $D\cap\Omega^+$ et $f(z)\sim z$ au voisinage de 0.
3. Intégrer terme à terme.
4. $\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin\theta\geqslant 0$ par la question 2..

Correction de l'exercice 4619 ▲

On pose, sous réserve de convergence, $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n t^n$. Alors :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{p} z_n t^n+\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j \sum_{n=p+1}^{\infty} z_{n-j} t^n=\sum_{n=1}^{p} z_n t^n+\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\Big(f(t)-\sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n\Big)$$

soit :

$$\Big(1-\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\Big) f(t)=P(t) f(t)=\sum_{n=1}^{p} z_n t^n-\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n=Q(t),$$

donc $f(t)=Q(t)/P(t)$. Réciproquement, soit $Q(t)/P(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$: en remontant les calculs précédents on voit que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (z_n) avec les mêmes premiers termes d'où $z_n=a_n$ pour tout n.
Si $|t|<1$ alors $\left|\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\right|<1$ donc P n'a pas de racine dans le disque unité ouvert. Si P n'a pas non plus de racine sur le cercle unité alors le développement en série entière de $Q(t)/P(t)$ a un rayon >1 et $z_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si P admet des racines dans $\mathbb{U}$ on peut déja dire que la suite (z_n) est bornée par $\max(|z_1|,\dots,|z_p|)$ puis. . . ?

Correction de l'exercice 4620 ▲

1.
2. Complétude : soit (f_k) une suite d'éléments de E de Cauchy, $f_k(z)=\sum_{n\in|||} a_{n,k} z^n$. On a, à k et n fixés, par convergence dominée :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\,d\theta=\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,d\theta=a_{n,k}.$$

La suite (f_k) converge uniformément sur $\overline{D}$ vers une fonction $\varphi:\overline{D}\to(x^2+1)$ continue. On note :

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\,d\theta=\lim_{k\to\infty} a_{n,k}.$$

La suite (a_n) est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in|||} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $z\in D$ fixé on a alors lorsque $k\to\infty$:

$$f_k(z)=\sum_{n\in|||} a_{n,k} z^n=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in|||} f_k(e^{i\theta}) e^{-in\theta} z^n\Big)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f_k(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta$$
$$\to\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in|||}\varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} z^n\Big)\,d\theta=\sum_{n\in|||} a_n z^n$$

ce qui prouve que $\varphi\in E$. Enfin on a $\|f_k-\varphi\|\to 0$ lorsque $k\to\infty$ par convergence uniforme, d'où $\varphi=\lim_{k\to\infty} f_k$ dans E.

3. Soit $f\in E$ et $f_n(z)=f\Big(\frac{nz}{n+1}\Big)$. Comme f est uniformément continue, f_n converge uniformément vers f sur $\overline{D}$. Soit $\varepsilon>0$ et n tel que $\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$. Comme f_n est développable en série entière avec un rayon au moins égal à $1+\frac{1}{n}$, son développement converge uniformément vers f_n sur $\overline{D}$ donc il existe $P\in(x^2+1)^{[}X]$ tel que $\|f_n-P\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

Correction de l'exercice 4621 ▲

1. $\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ $(R=1)$.

   Pour $z,t\in\mathring{D}(0,1)$ on a $\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{(z-t)(1-zt)}{(1-z)^2(1-t)^2}$, quantité nulle si et seulement si $z=t$, d'où l'injectivité de $z\mapsto\frac{z}{(1-z)^2}$.

2. (a) $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(z)=\overline{f(z)}=f(\bar z)\Leftrightarrow z=\bar z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
Par injectivité, on en déduit que $\mathrm{Im}(f(z))$ garde un signe constant sur chaque demi-disque limité par $]-1,1[$, et comme $f(z)=z+o_{z\to 0}(z)$, ce signe est celui de $\mathrm{Im}\,z$.
(b) $\int_{t=0}^{\pi}\mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin nt\,dt=\frac{\pi a_n r^n}{2}$.
On a $|\sin(nt)|\leqslant n\sin(t)$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi$ par récurrence, donc $\frac{\pi|a_n|r^n}{2}\leqslant n\int_{t=0}^{\pi}\mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin t\,dt=\frac{n\pi a_1 r}{2}$. On en déduit $|a_n|r^n\leqslant n|a_1|r$ et on conclut $|a_n|\leqslant n$ en faisant tendre r vers 1.

Correction de l'exercice 4622 ▲

1. $a_0=\pi$, $a_{2p}=0$, $a_{2p+1}=\frac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n=0$.
2. $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{n}$.
3. $a_0=\frac{8\pi^2}{3}$, $a_n=\frac{4}{n^2}$, $b_n=-\frac{4\pi}{n}$.
4. $a_0=\frac{2}{\pi}$, $a_{2p}=\frac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1}=0$, $b_1=\frac{1}{2}$, $b_p=0$.
5. $a_{2p}=\frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1}=0$, $b_p=0$.

Correction de l'exercice 4623 ▲

$I_{n+1}-I_{n-1}=\int_{t=0}^{\pi/2}2\cos(nt)\,dt=\frac{2}{n}\sin(n\pi/2)$.
Donc $I_{2p}=2\left(1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right)$, $I_{2p+1}=\frac{\pi}{2}$.
$b_n=0$ (parité), $a_{2p}=0$ (symétrie par rapport à $(\pi/2,0)$), $a_{2p+1}=-\frac{4}{(2p+1)\pi}I_{2p+1}=-\frac{2}{2p+1}$.

Correction de l'exercice 4624 ▲

$$\begin{cases}2a_k &= (a_{k-1}+a_{k+1})\cos\alpha\\ a_0 &= a_1\cos\alpha+2\end{cases}\quad\Rightarrow a_k=A\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})^k+B\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})^k.$$

Comme $a_k\to 0$ (lorsque $k\to\infty$) on a $B=0$ d'où $A=\frac{2}{\sin\alpha}$. Finalement, $f(t)=\frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^k\cos(kt)\right)$.

Correction de l'exercice 4625 ▲

1. $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right)=g(x)$.
2. Il y a convergence normale.
3.

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_{t=0}^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(nx-nt)f(t)\,dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t=0}^{2\pi}a^n\cos(nx-nt)f(t)\,dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(nx)\int_{t=0}^{2\pi}a^n\cos(nt)f(t)\,dt+\sin(nx)\int_{t=0}^{2\pi}a^n\sin(nt)f(t)\,dt\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\pi a^n a_n(f)\cos(nx)+\pi a^n b_n(f)\sin(nx)).\end{aligned}$$

Il y a convergence normale car $|a|<1$ et les coefficients de Fourier de f sont bornés. On en déduit que h est continue, puis que les coefficients de Fourier de h sont $a^n a_n(f)$ et $a^n b_n(f)$.

4. Les coefficients de Fourier des deux membres doivent être égaux, ce qui donne : $a_n(f) = \frac{1}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ et $b_n(f) = 0$ si pour tout $n \in |||^*$ on a $\pi\lambda a^n \neq 1$ (sinon il n'y a pas de solution), et $a_0(f) = 0$ si $2\pi\lambda \neq 1$, $a_0(f)$ quelconque sinon. Réciproquement, en posant $f(x) = [a_0/2] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ on définit f, 2π-périodique continue (la série converge normalement), solution de l'équation par égalité des coefficients de Fourier de chaque membre.

Correction de l'exercice 4626 ▲

1. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \frac{3}{2(5-4\cos x)}$.
2. $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 4627 ▲

1.
2. $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(e^a f(e^{ix}) - e^{-ix} f(e^{-ix})\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-ka}\cos kx\right)$.

Correction de l'exercice 4629 ▲

1. $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$.
2.

Correction de l'exercice 4630 ▲

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{x=0}^{2\pi} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ikx}\,dx = \frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$ $\left(\text{calculer } \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-i\xi x}\,dx = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \text{ par équation différentielle}\right)$.

Correction de l'exercice 4631 ▲

1. $a_0 = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}$, $a_n = \frac{2(-1)^n \operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = -na_n$.
2. $S = \frac{\pi - \operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi}$, $S' = \frac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}$.

Correction de l'exercice 4632 ▲

1. Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx))$.
2. On peut supposer $a > 0$ car $I(-a) = -I(a)$ et $I(0) = 0$. On envisage d'intégrer terme à terme la relation :
$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\sin(au) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu}\sin(au).$$
On coupe l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sur $[0, \pi/a]$ le sinus est positif et le théorème de convergence monotone s'applique. Sur $[\pi/a, +\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme s'applique (série des normes 1 convergente) car $\int_{\pi/a}^{+\infty} |e^{-nu}\sin(au)|\,du \leqslant \int_{\pi/a}^{+\infty} e^{-nu}\,du = e^{-n\pi/a}/n$. Ainsi,
$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{u=0}^{+\infty} e^{-nu}\sin(au)\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}.$$
3. Déjà fait, $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}\sin(au)\,du = \frac{a}{a^2+1}$. Il doit y avoir une autre méthode pour la question précédente ? !
4. En comparant avec **1)** pour $x = 0$ on obtient : $I(a) = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$ pour $a > 0$.

Correction de l'exercice 4633 ▲

1. $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)} e^{inx}$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(e^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{e^{4a\pi}-1}{4a\pi}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$.

   $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\operatorname{th}(a\pi)} - \frac{1}{a}\right) \to \frac{\pi^2}{6}$ lorsque $a \to 0$ et il y a convergence dominée.
3. $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4634 ▲

1. $a_n = -\frac{4}{4n^2-1}$, $b_n = -\frac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}$.
2.
3. $\frac{\pi-2}{4}$.

Correction de l'exercice 4635 ▲

1. $\cos ax = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2-n^2}$.
2. $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{\pi\cos \pi t}{\sin \pi t} - \frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \ln\left(\lambda \frac{\sin \pi t}{t}\right)$ et $g(0) = 0 \Rightarrow g(t) = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)$.

Correction de l'exercice 4636 ▲

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.
2.
3. Le premier membre vaut $f(1) = \frac{\pi-1}{2}$ et le second $\frac{1}{4\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(f(t+1)-f(t-1))^2\,dt = \frac{\pi-1}{2}$.

Correction de l'exercice 4637 ▲

1. $a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$.
2. $a_{2p} = b_{2p} = 0$.

Correction de l'exercice 4639 ▲

$a'_k = kb_k$, $b'_k = -ka_k$ + inégalité de Bessel.

Correction de l'exercice 4640 ▲

1.
2. $S'_g(x) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n - \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right)\cos nx - na_n \sin nx$.

Correction de l'exercice 4642 ▲

$$
\begin{aligned}
\pi a_k &= \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{2\pi/k} f(t+2i\pi/k)\cos(kt)\,dt\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{\pi/2k} \Big(f(t+2i\pi/k)-f(t+2i\pi/k+\pi/k)-f(t+2(i+1)\pi/k-\pi/k)+f(t+2(i+1)\pi/k)\Big)\cos(kt)\,dt.
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 4643 ▲

1. Immédiat. La fonction prolongée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^2$ par morceaux.
2. On décompose f en série de Fourier : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$ avec $c_n = 2\int_{u=0}^{1} f''(u)\sin(n\pi u)\,du$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient : $\|f\|_\infty^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\right) = \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2 = \frac{\|f''\|_2^2}{45}$.

   Autre démonstration sans utiliser les séries de Fourier : pour $x\in[0,1]$ on a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{t=0}^{x} f'(t)\,dt = xf'(x) - \int_{t=0}^{x} tf'(t)\,dt\\
f(x) &= \int_{t=1}^{x} f'(t)\,dt = (x-1)f'(x) - \int_{t=1}^{x}(t-1)f'(t)\,dt\\
f(x) &= (1-x)f(x)+xf(x) = \int_{t=0}^{x} t(x-1)f''(t)\,dt + \int_{t=x}^{1} x(t-1)f''(t)\,dt\\
&= \int_{t=0}^{1}\varphi(x,t)f''(t)\,dt.\ \text{avec } \varphi(x,t) = xt-\min(x,t).
\end{aligned}
$$

   On en déduit $|f(x)|^2 \leqslant \|f''\|_2^2\int_{t=0}^{1}\varphi(x,t)^2\,dt = \frac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \leqslant \frac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Correction de l'exercice 4644 ▲

Parseval pour f et f'. Égalité ssi $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Correction de l'exercice 4645 ▲

1. Développer f, f' et g' en séries de Fourier et appliquer l'inégalité $2|\overline{a}b| \leqslant |a|^2+|b|^2$. Il y a égalité si et seulement si f' et g' sont CL de cos et sin.
2. On paramètre par une abscisse curviligne : $x = f(t)$, $y = g(t) \Rightarrow \mathscr{A} = \int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{f'^2+g'^2}{2} = \pi$.

Correction de l'exercice 4649 ▲

On pose $g(t) = f(a|t|/\pi)$ pour $t\in[-\pi,\pi]$, prolongée par 2π-périodicité. Alors g est paire, continue, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls donc $g = 0$.

Correction de l'exercice 4650 ▲

1. $\frac{\pi}{n+1}$.
2. Somme de Riemman : $\ell = \int_{t=0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Correction de l'exercice 4651 ▲

$\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2\pi}$.

Correction de l'exercice 4652 ▲

S'il y a convergence uniforme : $\|a_n \sin nx + \dots + a_p \sin px\|_\infty \to 0$ lorsque $n, p \to \infty$.
On prend $x = \frac{\pi}{2p}$: $0 \leqslant \frac{a_p}{p}(n + \dots + p) \leqslant \frac{1}{p}(na_n + \dots + pa_p) \to 0$ lorsque $n, p \to \infty$. $n = [p/2] \Rightarrow$ cqfd.
Si $na_n \to 0$: Soit $x \in]0, \pi]$ et n tel que $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1}$.
Transformation d'Abel : $|a_n \sin nx + \dots + a_p \sin px| \leqslant \frac{2a_n}{\sin x/2} \leqslant \frac{2na_n}{\pi}$,
et $|a_k \sin kx + \dots + a_{n-1} \sin(n-1)x| \leqslant (ka_k + \dots + (n-1)a_{n-1})x \leqslant \frac{n-k}{n-1} a_k \leqslant 2a_k$.

Correction de l'exercice 4654 ▲

1. $R(n) = \frac{a}{n} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -2$. Donc $f(x) = R(0) + 2ia \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^\infty (S(n)e^{inx} + S(-n)e^{-inx})$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $R(n) = \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -k-1 \Rightarrow f(x) = R(0) + a_1 f_1(x) + \dots + a_k f_k(x) + g(x)$ avec $f_p(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{inx} + (-1)^p e^{-inx}}{n^p}$ et g de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $f_p' = if_{p-1}$ et f_1 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ donc f_p aussi.

Correction de l'exercice 4655 ▲

1. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2}$.
2. Soit $P(n) = an^2 + bn + c$. Alors $f(x) - 4ag(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{bn+c}{an^4 + bn^3 + cn^2} \cos nx$.

Correction de l'exercice 4656 ▲

1. $k_n(x) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.
2.

Correction de l'exercice 4659 ▲

1. $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.
2.

Correction de l'exercice 4660 ▲

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4 - 4n^2 + 1)}$.
Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ solution de l'équation.
Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Correction de l'exercice 4661 ▲

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2(k^2 - n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.
$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\frac{\cos kx}{k^2(k^2 - k^2)}$ par $\frac{x\cos kx}{2k^3}$.

Correction de l'exercice 4662 ▲

1. Développer f en série de Fourier.
2. Densité des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}^0$.
3. $f(t)=\sin^2(\pi t)$, $\alpha=\frac{1}{\pi}$, $x=0$: $S_n=\sin^2 1+\cdots+\sin^2 n\sim\frac{n}{2}$.
   Transformation d'Abel : $\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2 n}{n}=-\sin^2 1+\sum_{n=2}^{N-1}\frac{S_k}{k(k-1)}+\frac{S_N}{N}\to+\infty$ lorsque $N\to\infty$. Remarque : on a un raisonnement plus simple en écrivant $2\sin^2(n)=1-\cos(2n)$.

Correction de l'exercice 4663 ▲

Intégration à $x'-x$ constant : $a_k=\int_{y=-1}^{1}e^{-|y|^\beta}(1-|y|)e^{-2ik\pi y}\,dy$ est le $2k$-ème coefficient de Fourier de la fonction f, 2-périodique, telle que $f(y)=e^{-|y|^\beta}(1-|y|)$ si $-1\leqslant y\leqslant 1$ donc le k-ème coefficient de Fourier de g, 1-périodique, telle que $g(y)=\frac{1}{2}(f(y)+f(y+1))$. Soit g_n la n-ème somme partielle de la série de Fourier de g, $g_n(y)=\sum_{|k|\leqslant n}a_k e^{2ik\pi y}$.
On a par convergence normale de la série de Fourier de g : $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n}a_k a_\ell=g^2(0)-g_n^2(0)$.

$$\begin{aligned}
g(0)-g_n(0)&=\int_{y=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,dy\\
&=2\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,dy\\
&=2\Big[-\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\Big]_{y=0}^{\frac{1}{2}}+2\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}\Big(\frac{g(0)-g(y)}{\sin\pi y}\Big)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy\\
&=\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}+\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}\text{fctcontinue}(y)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy\\
&\sim\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}.
\end{aligned}$$

$g(0)+g_n(0)\to 2g(0)=1$ (lorsque $n\to\infty$) d'où $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n}a_k a_\ell\sim\frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}$.

Correction de l'exercice 4664 ▲

1. Si $f=0$ alors $c_n=0$ pour tout n par intégration terme à terme. Donc une fonction $f\in E$ possède un unique développement trigonométrique et $\|f\|$ est bien défini. Alors E est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui est un espace vectoriel normé complet.
2. Produit de convolution de deux $\mathbb{Z}$-suites sommables.
3. (a) $z_0=\varphi(x\mapsto e^{2i\pi x})$. On a $|z_0|=1$ car la suite $(\varphi(x\mapsto e^{2in\pi x})_{n\in\mathbb{Z}})$ est bornée.
   (b)

Correction de l'exercice 4665 ▲

$u_0+\cdots+u_n=1+(-1)^n\int_{t=0}^{1}\frac{\cos((n+1)t^2)}{\cos(t^2)}\,dt=1+(-1)^n\int_{u=0}^{1}\frac{\cos((n+1)u)}{2\cos(u)\sqrt{u}}\,du\to 1$ lorsque $n\to\infty$.

Correction de l'exercice 4666 ▲

1. Si f est $\mathscr{C}^1$ 2π-périodique alors f' est continue, 2π-périodique de moyenne nulle donc $D(E_0^1)\subset E_0$. Réciproquement, si $g\in E_0$ alors toutes les primitives de g sont 2π-périodiques de classe $\mathscr{C}^1$ et il y en a exactement une qui a une valeur moyenne nulle (une seule possibilité de régler la constante).
2. Non (et ceci quelle que soit la norme) car le spectre de D n'est par borné.
3. $\|f\|_2^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|ikc_k(f)|^2=\|f'\|^2$.

4. Idem, $|||D^{-1}_{|E_n}||| = \frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 4667 ▲

On a $c_0(g) = c_1(g) = c_{-1}(g) = 0$, donc g est orthogonale à tout polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à 1. Si g est de signe constant sur $]0,2\pi[$, on contredit $c_0(g) = 0$. Donc g a au moins une racine $a \in]0,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine dans $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants opposés sur $]0,a[$ et $]a,2\pi[$. Mais alors $g(t)(\cos(t-a/2)-\cos(a/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles, c'est absurde. Donc g a une deuxième racine dans $]0,2\pi[$, par exemple $b \in]a,2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors g est de signes constants sur $]0,a[$, $]a,b[$ et $]b,2\pi[$ et les signes alternent. On obtient une nouvelle contradiction car alors $g(t)(\cos(t-(a+b)/2)-\cos((b-a)/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles. Ainsi g admet une troisième racine, par exemple $c \in]b,2\pi[$. Enfin, si l'on suppose que g n'a pas d'autre racine sur $]0,2\pi[$ alors on a $g(t) > 0$ sur $]0,a[$ et $]b,c[$ et $g(t) < 0$ sur $]a,b[$ et $]c,2\pi[$ ou l'inverse. Dans les deux cas, on en déduit que $g(0) = g(2\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 4672 ▲

1.
2. $\ell = \pi$.

Correction de l'exercice 4676 ▲

$\frac{x}{2}$.

Correction de l'exercice 4680 ▲

1. $u_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
2.
3.
4.

Correction de l'exercice 4681 ▲

Si $|a| < 1$, à partir d'un certain rang, $\left|\frac{a}{1+a^n}\right| < \alpha < 1 \Rightarrow \lim = 0$.
Si $|a| > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 \Rightarrow u_n \to 0$.

Correction de l'exercice 4684 ▲

$\lim S_n = \lim u_n$.
Si $u_n = (3i/2)^n$, alors (u_n) diverge, mais $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 4689 ▲

1. $1 \leqslant S(n+1) \leqslant S(n)+1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{S(n+1)}{S(n)} \leqslant 2$.
2. $\inf = 0$ $(99\dots99)$, $\sup = 2$ $(100\dots00)$.
3.

Correction de l'exercice 4693 ▲

1. Sinon, on construit une sous-suite strictement croissante.
2. La suite $(\min(x_0,\dots,x_n))$ converge vers 0, et prend une infinité de valeurs différentes.

Correction de l'exercice 4696 ▲

$u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1+\cdots+n}{4n^2} \geqslant \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 4697 ▲

1. Par récurrence, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$.
2. $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+\sqrt{2(n-1)}} \Rightarrow \lim = 1$.
3. $\sqrt{n+\sqrt{n-1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{2(n-2)}}} \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4698 ▲

Soit $\ell = \inf\{b_n \,|\, n \in |||^*\}$, $\varepsilon > 0$ et $p \in |||^*$ tel que $b_p \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour $n \in |||^*$ on effectue la division euclidienne de n par p : $n = pq + r$ d'où $a_n \leqslant a_p^q a_r$ et $b_n \leqslant b_p + \frac{\ln a_r}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$ pour n assez grand.

Correction de l'exercice 4699 ▲

Si $e^{i\alpha}$ n'est pas valeur d'adhérence alors il existe $\delta > 0$ tel que $|e^{ih(n)} - e^{i\alpha}| > \delta$ pour tout n assez grand donc l'ensemble $\bigcup_{k\in|||}[\alpha - \delta + 2k\pi, \alpha - \delta + 2k\pi]$ ne contient aucun terme de la suite $(h(n))$ pour n assez grand ce qui contredit les hypothèses $h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $h(n+1) - h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 4700 ▲

Soit E l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n). Si $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$ alors $u_{n_k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda + \lambda^2$ donc E est stable par l'application $f : x \mapsto x + x^2$. En fait E est invariant par cette application car la suite (u_{n_k-1}) admet une valeur d'adhérence $\mu \in E$ et on a $\mu^2 + \mu = \lambda$. En particulier l'intervalle $[\inf(E), \sup(E)]$ est invariant par f ce qui implique $\sup(E) = \inf(E) = 0$.

Correction de l'exercice 4701 ▲

Soit ℓ une valeur d'adhérence de (x_n). Si l'on suppose que (x_n) ne converge pas vers ℓ alors il existe un voisinage $[a,b]$ de ℓ tel qu'il y a une infinité de termes dans $[a,b]$ et une infinité hors de $[a,b]$. Ceci implique que $[c,d] = f([a,b])$ n'est pas inclus dans $[a,b]$ et que $[c,d] \setminus [a,b]$ contient une infinité de termes, donc (x_n) a une deuxième valeur d'adhérence dans $[c,d] \setminus]a,b[$.

Correction de l'exercice 4702 ▲

Les suites $(\ln(u_n)/2^n)$ et $(\ln(1+u_n)/2^n)$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice 4703 ▲

1. $u_n \searrow \sqrt{a}$, et $u_n - \sqrt{a} < \frac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
2. $u_{2n} \to 0$, $u_{2n+1} \to 1$.
3. Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $u_n \searrow 0$, sinon $u_n \searrow -\infty$.
4. – $\frac{1}{4} < \alpha$: $u_n \to \infty$;
   – $-\frac{3}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$: $u_n \to \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$,
   – $-1 < \alpha \leqslant -\frac{3}{4}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.
5. Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.
6. $u_n \to \frac{1}{2}$.

7. Thm du point fixe sur $]-\infty,\frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.
8. Si $u_0 \neq 1$, $\exists\, n$ tq $4-3u_n < 0 \Rightarrow$ suite finie.
9. $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.
10. 1 est point fixe, il y a deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.
11. – $1 < \alpha$: $u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$
    – $-1 < \alpha < 1$: $u_n \to 1$
    – $\alpha \leqslant -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.
12. $e^{1/e} < \alpha : u_n \to \infty$. $1 < \alpha < e^{1/e}$: 2 pts fixes, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, et $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$. $e^{-e} \leqslant \alpha < 1$: 1 pt fixe, β, et $u_n \to \beta$. $\alpha < e^{-e}$: 1 point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 4704 ▲

CV (vers 0) ssi $|ka_0| < 1$.

Correction de l'exercice 4706 ▲

$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 4707 ▲

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geqslant u_n$. Il n'y a pas de point fixe.

Correction de l'exercice 4710 ▲

$y_n - x_n = \text{cste} \Rightarrow x_n \to 0,\ y_n \to y_0 - x_0$.

Correction de l'exercice 4711 ▲

$y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{3^n}$ et $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \longrightarrow \frac{y_0 + x_0}{2}$.

Correction de l'exercice 4712 ▲

$x_n y_n = \mathrm{c^{te}} \Rightarrow x_n, y_n \to \sqrt{x_0 y_0}$.

Correction de l'exercice 4713 ▲

1.
2. $\ell = b\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Correction de l'exercice 4714 ▲

1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\big((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\big)$.
2. $3c_{n+1} - 3b_{n+1} = a_n + b_n + c_n - 3\sqrt[3]{a_n b_n c_n} \geqslant 0 \Rightarrow b_{n+1} \leqslant c_{n+1}$.
   $\frac{3}{a_{n+1}} - \frac{3}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} - \frac{3}{\sqrt[3]{a_n b_n c_n}} \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.

   Donc (a_n) croît et (c_n) décroît : $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$ avec $\begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b^2 = ac \\ 2c = a+b \end{cases} \Rightarrow a = b = c$.

Correction de l'exercice 4715 ▲

Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \searrow 0$ et pour $u_0 < 0$ on a $u_n \nearrow 0$. $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$ et la série $\sum u_n$ converge absolument (d'Alembert).

Correction de l'exercice 4716 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle dont tous les éléments sont points fixes par f. S'il y a plusieurs valeurs d'adhérence il faut passer de l'une à l'autre avec une longueur de saut qui tend vers zéro, on doit tomber sur point fixe entre les deux, contradiction.

Correction de l'exercice 4717 ▲

1. $A\setminus]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}[$ est fini.
2.

Correction de l'exercice 4719 ▲

Soient $x<y$: Il existe $a\in|||$ tel que $n\geqslant a\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<y-x$.
Il existe $b\in|||$ tel que $\sqrt{a}-\sqrt{b}<x$.
Alors il existe $c\geqslant a$ tel que $x<\sqrt{c}-\sqrt{b}<y$.

Correction de l'exercice 4720 ▲

$n+p\sqrt{2}>1\Rightarrow n>0,\ p>0$, donc $A\cap]1,+\infty[$ admet un plus petit élément : $3+2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 4721 ▲

On construit un ensemble de type Cantor dont les trous ont pour longueur 1, $\frac{1}{2^a}$, $\frac{1}{4^a}$, ..., et on répartit les x_k de part et d'autre des trous en fonction de l'écriture décimale de k ($0\to$ à gauche, $1\to$ à droite).

Correction de l'exercice 4723 ▲

L'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle constitué de points fixes de $f\Rightarrow$ la suite (u_n) a une seule valeur d'adhérence.

Correction de l'exercice 4727 ▲

Soit $\ell=\liminf\frac{u_n}{n}$ et $\varepsilon>0$. Il existe p tel que $(\ell-\varepsilon)p\leqslant u_p\leqslant(\ell+\varepsilon)p$.
Alors pour $n\in|||$ et $0\leqslant k<p$: $u_k+(\ell-\varepsilon)np\leqslant u_{np+k}\leqslant u_k+(\ell+\varepsilon)np$.

Correction de l'exercice 4728 ▲

1. Il est supposé connu (et à savoir démontrer) le fait suivant : *si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, alors soit G est monogène, soit $\overline{G}=\mathbb{R}$.* Dans le cas de la question, le groupe G des périodes de f contient 1 et $\sqrt{2}$ donc n'est pas monogène car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (la démonstration a été demandée à l'élève). De plus G est fermé par continuité de f, d'où f est constante.
2. D'après la première question, pour tout $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ l'application $x\mapsto f(x,y)$ est constante et il en va de même si $y\in\mathbb{Q}$ par continuité de f. Donc f est de la forme $(x,y)\mapsto g(y)$ où g est 1-périodique. Réciproquement, toute fonction f de cette forme convient.

Correction de l'exercice 4729 ▲

Soit $a\in\overline{U}^{\circ}\cap\overline{V}^{\circ}$: Il existe $B(a,r)\subset\overline{U}\cap\overline{V}$.
Soit $b\in B(a,r)\cap U$: Il existe $B(b,r')\subset B(a,r)\cap U$. Donc $b\notin\overline{V}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4731 ▲

$\overset{\circ}{U}\subset U\Rightarrow\overline{\overset{\circ}{U}}\subset\overline{U}$.

$U \subset \overline{U} \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{\overline{U}} \Rightarrow \overline{U} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}$.

Correction de l'exercice 4732 ▲

Soit a intérieur à $\mathrm{Fr}(U)$: Il existe $B(a,r) \subset \overline{U} \setminus U$. $B(a,r) \cap U = \varnothing \Rightarrow a \notin \overline{U}$, contradiction.

Correction de l'exercice 4734 ▲

Par passage à la limite, $\delta(A) = \delta(\overline{A}) \geqslant \delta(\mathrm{Fr}(A))$.
Soient $x, y \in A$ distincts et D la droite passant par x et y. D coupe A suivant un ensemble borné dont les extrémités appartiennent à $\mathrm{Fr}(A)$. Donc $\delta(\mathrm{Fr}(A)) \geqslant \delta(A)$.

Correction de l'exercice 4736 ▲

Si f est continue : soit $x \in \overline{A}$: $x = \lim a_n \Rightarrow f(x) = \lim f(a_n) \in \overline{f(A)}$.
soit $x \in f^{-1}(B)^\circ$: $f(x) \in \mathring{B} \Rightarrow \exists\, B(f(x),r) \subset B$, $\exists\, \delta > 0$ tq $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),r)$
$\Rightarrow B(x,\delta) \subset f^{-1}(B)$.
si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$: soit $B \subset F$ fermé et $A = f^{-1}(B)$: $f(\overline{A}) \subset B$ donc $\overline{A} \subset A$.
si $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^\circ$: soit $B \subset F$ ouvert et $A = f^{-1}(B)$: $\mathring{A} \supset f^{-1}(\mathring{B}) = A$.

Correction de l'exercice 4741 ▲

1. Pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et $y \in A$ on a $d_A(x) \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x-x'\| + \|x'-y\|$. En prenant la borne inférieure sur y on obtient $d_A(x) \leqslant \|x-x'\| + d_A(x')$. Par symétrie on a aussi $d_A(x') \leqslant \|x-x'\| + d_A(x)$ d'où $|d_A(x) - d_A(x') \leqslant \|x-x'\|$.
2. On sait que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } d_A(x) = 0\}$. Donc $d_A = d_B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$ et la réciproque résulte de la propriété facile $d_A = d_{\overline{A}}$.
3. On note : $M = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, $\alpha = \sup\{d_B(x), x \in A\}$ et $\beta = \sup\{d_A(x),\ x \in B\}$. Par restriction de y à $A \cup B$ on obtient $M \geqslant \max(\alpha,\beta)$. Par ailleurs, pour $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $b \in B$ on a $\|y - a\| - \|y-b\| \leqslant \|a-b\|$ d'où $d_A(y) - \|y-b\| \leqslant d_A(b)$ puis $d_A(y) - d_B(y) \leqslant \beta$. Par symétrie on a aussi $d_B(y) - d_A(y) \leqslant \alpha$ donc $|d_A(y) - d_B(y)| \leqslant \max(\alpha,\beta)$ et finalement $M \leqslant \max(\alpha,\beta)$.

Correction de l'exercice 4744 ▲

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ coupe K selon un intervalle non trivial (K est convexe et O est interieur à K), fermé borné (K est compact). On note $f(\theta)$ la longueur de cet intervalle, ce qui définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ 2π-périodique telle que $K = \{M(\rho,\theta) \text{ tq } 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}$.
   Continuité de f : soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M(\rho_0,\theta_0)$ tel que $f(\theta_0) - \varepsilon < \rho_0 < f(\theta_0)$. Donc $M \in \mathring{K}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que la boule de centre M et de rayon α est incluse dans K (faire un dessin). Ainsi, pour tout θ suffisament proche de θ_0 on a $f(\theta) \geqslant OM > f(\theta_0) - \varepsilon$. Considérons alors une hypothétique suite (θ_k) de réels convergeant vers θ_0 telle que la suite $(f(\theta_k))$ ne converge pas vers $f(\theta_0)$. Comme la suite $(f(\theta_k))$ est bornée on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer qu'elle converge vers un réel ℓ et le raisonnement précédent montre que $\ell > f(\theta_0)$. Si M_k désigne le point de K à la distance $f(\theta_k)$ dans la direction d'angle polaire θ_k alors la suite (M_k) converge vers le point $M(\ell,\theta_0)$ qui doit appartenir à K par compacité, mais qui contredit la définition de $f(\theta_0)$.
2. Si g ne s'annule pas alors $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x)\,dx \neq 0$. Si g ne s'annule qu'en $\alpha \in [0,\pi]$ alors g est de signe constant sur $[0,\alpha]$ et sur $[\alpha,\pi]$, les signes sont opposés, et on obtient encore une contradiction en considérant $\int_{x=0}^{\pi} g(x)\sin(x-\alpha)\,dx$ qui vaut 0 (développer le sinus).
3. On choisit $O = G$. On a $\iint_{M\in K} \vec{OM} = \vec{0}$, soit $\int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} f^3(\theta)\sin\theta\,d\theta = 0$, soit encore : $\int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi}(f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\sin\theta\,d\theta = 0$. D'après la question précédente, il existe $\alpha \neq \beta \in \,]0,\pi[$ tels que $f(\alpha) = f(\alpha+\pi)$ et $f(\beta) = f(\beta+\pi)$, ce qui prouve qu'il y a au moins deux diamètres de K dont $O = G$ est le milieu. On prouve l'existence d'un troisième diamètre en décalant l'origine des angles polaires de façon à avoir $f(0) = f(\pi)$, ce qui est possible vu l'existence de α, β.

Correction de l'exercice 4745 ▲

Pour $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$ on a $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.
Pour $\|x\| \leqslant 1 < \|y\|$ on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\| + \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \|x-y\| + \|y\| - 1 \leqslant \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \leqslant 2\|x-y\|$.
Pour $1 < \|x\| \leqslant \|y\|$ on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \frac{\|x-y\|+\|y\|-\|x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}$.
Remarque : dans le cas où la norme est euclidienne, $f(x)$ est le projeté de x sur la boule unité, c'est-à-dire le point de la boule unité le plus proche de x. Dans ce cas, f est 1-lipschitzienne. Dans le cas d'une norme non euclidienne on peut avoir $\|f(x)-f(y)\| > \|x-y\|$, par exemple avec $x = (1,1)$ et $y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $\| \ \|_\infty$.

Correction de l'exercice 4755 ▲

On construit (s_k) de proche en proche de sorte que pour tout n fixé la suite $(y_n^{s_k})$ soit convergente vers z_n. Comme $\sum_{n \leqslant N}(y_n^{s_k})^2$ est bornée indépendamment de N et k la série $\sum_n z_n^2$ a ses sommes partielles bornées donc converge. On a alors $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$ pour toute suite x à support fini, puis pour toute suite de carré sommable par interversion de limites.

Correction de l'exercice 4756 ▲

1. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. On remplace la norme sur E par la norme infinie associée à $(e_1,\dots,e_p)$. Alors $|||u^n||| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|u^n(e_i)\|$.
2. Trigonaliser fortement u (ou son prolongement au complexifié de E). Comme (u^n) est borné, les valeurs propres de u sont de module inférieur ou égal à 1, et pour celles de module 1 le bloc triangulaire associé est en fait diagonal. On trouve $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i \xrightarrow[n\to\infty]{}$ projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$.

Correction de l'exercice 4760 ▲

1.
2.
3.
4. (P_n) converge vers 0 pour $a \in]-2,2[$ et vers 1 pour $a = 2$. La suite est non bornée si $|a| > 2$; elle est bornée divergente pour $a = -2$.
5. $(X/b)^n$ converge vers 1 pour N_b et vers 0 pour N_a.

Correction de l'exercice 4762 ▲

1.
2.
3. $f(x) = \int_{t=0}^{x} \sin(x-t)(f(t)+f''(((t))\,dt$, $f''(x) = (f(x)+f''(x)) - f(x)$.

Correction de l'exercice 4763 ▲

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^{n} B_{kj}^2$.

Correction de l'exercice 4764 ▲

Si A est une matrice de rang $r > 0$ telle que $p(A) = 0$ alors pour toute matrice M de rang $< r$ on peut trouver P et Q telles que $M = PAQ$ d'où $P(M) = 0$. Donc p est nulle sur toute matrice de rang 1 et par inégalité triangulaire sur tout matrice.

Correction de l'exercice 4771 ▲

1. $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2$.
2. Supposons qu'il existe une norme euclidienne $\|\ \|$ et deux réels $\alpha,\beta>0$ tels que $\alpha\|u\|_\infty\leqslant\|u\|\leqslant\beta\|u\|_\infty$ pour tout $u\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose $u(x)=1-2|x|$ pour $x\in[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$ et $u(x)=0$ sinon. Soit $n\in|||$ et pour $1\leqslant i\leqslant n$: $u_i(x)=u((n+1)x-i)$. Alors $\sum_\sigma\left\|\sum_{i=1}^n\sigma(i)u_i\right\|^2\leqslant 2^n\beta^2$ et $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2\geqslant 2^n n\alpha^2$ donc ces deux sommes ne peuvent rester égales quand $n\to\infty$.
3. Même construction. On trouve
$$\sum_\sigma\left\|\sum_{i=1}^n\sigma(i)u_i\right\|^2\leqslant 2^n\beta^2\|u\|_p^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/p}$$
et $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2\geqslant 2^n\alpha^2\|u\|_p^2\frac{n}{(n+1)^{2/p}}$.

Correction de l'exercice 4773 ▲

1.
2. On prouve la convexité de B. Soient $x,y\in B$, $t\in[0,1]$ et $z=(1-t)x+ty$. On a $N^2(z)\leqslant 2t^2+2(1-t)^2$, d'où $N(z)\leqslant 1$ si $t=\frac{1}{2}$. Ceci prouve déjà que B est stable par milieu, et on en déduit par récurrence sur $n\in|||$ que $z\in B$ si t est de la forme $a/2^n$ avec $a\in[[0,2^n]]$.
Si t n'est pas de cette forme, on écrit t comme barycentre de deux nombres dyadiques $t=u\frac{a}{2^n}+(1-u)\frac{b}{2^n}$ en faisant en sorte que u soit arbitrairement proche de $\frac{1}{2}$. Si c'est possible, on obtient que z est barycentre de deux éléments de B avec les coefficients u et $1-u$, d'où $N^2(z)\leqslant 2u^2+2(1-u)^2\xrightarrow[u\to 1/2]{}$. Reste donc à choisir n, a, b : pour n donné, on choisit $a=[2^n]-n$ et $b=[2^n]+n$. C'est possible car $[2^nt]\sim 2^nt$ et on est dans le cas $0<t<1$ donc on a bien $a,b\in[[0,2^n]]$ si n est suffisament grand. Il vient $u=\frac{b-2^nt}{b-a}$, quantité comprise entre $\frac{n-1}{2n}$ et $\frac{1}{2}$ et donc qui tend bien vers $\frac{1}{2}$.
Remarque : la condition (iii) est aussi nécessaire, donc une norme est une application vérifiant (i), (ii) et (iii).

Correction de l'exercice 4779 ▲

1. On procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, l'application $[0,+\infty[\ \ni\lambda_1\mapsto\|x-\lambda_1a_1\|$ est continue, constante si $a_1=0$ et tend vers $+\infty$ quand $\lambda_1\to+\infty$ si $a_1\neq 0$. Dans les deux cas elle admet un minimum.
Pour $n\geqslant 2$, soit $C'=\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_ia_i,\lambda_i\geqslant 0\right\}$. Soit pour $\lambda_n\in[0,+\infty[$: $\varphi(\lambda_n)=d(x-\lambda_na_n,C')$. La distance à C' est 1-lipschitzienne donc $\varphi(\lambda_n)\geqslant d(-\lambda_na_n,C')-\|x\|=\lambda_nd(-a_n,C')-\|x\|\xrightarrow[\lambda_n\to+\infty]{}+\infty$. Étant continue, φ admet un minimum sur $[0,+\infty[$ et on applique l'hypothèse de récurrence à $x-\lambda_na_n$.
2.

Correction de l'exercice 4780 ▲

On procède par récurrence sur $n=\dim E$. Pour $n=1$, en confondant E et $\mathbb{R}$, C est un intervalle dense, c'est $\mathbb{R}$. Pour $n\geqslant 2$, soit $E=H\oplus<a>$ où H est un hyperplan de E. On montre ci-dessous que $C'=C\cap H$ est une partie de H convexe et dense, donc égale à H, d'où $H\subset C$ et ce pour tout H. Ainsi $C=E$.
Densité de C' : soit $x\in H$, et (y_k), (z_k) des suites d'éléments de C convergeant respectivement vers $x+a$ et $x-a$. On écrit $y_k=y'_k+\lambda_ka$ et $z_k=z'_k+\mu_ka$ avec $y'_k,z'_k\in H$ et $\lambda_k,\mu_k\in\mathbb{R}$. Par équivalence des normes en dimension finie, on a $\lambda_k\xrightarrow[k\to\infty]{}1$ et $\mu_k\xrightarrow[k\to\infty]{}-1$, donc le point $x_k=\frac{\lambda_kz_k-\mu_ky_k}{\lambda_k-\mu_k}$ est bien défini et appartient à C' pour k assez grand, et converge vers x.
Remarque : Si E est de dimension infinie, alors il contient des hyperplans non fermés, donc des parties strictes, convexes denses.

Correction de l'exercice 4782 ▲

1. $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \{\text{fonctions strictement positives}\}$.
2. $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 4783 ▲

$\overline{F} = F$, $\mathring{F} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 4784 ▲

Oui pour $\pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, non pour les autres (les symétries non triviales).
$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est isolé car si $u \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ alors -1 est valeur propre de u et $\|u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\| \geqslant 2$. De même pour $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
Si u est une symétrie non triviale, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre de u avec $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = -e_2$. Pour $p \in |||^*$ soit $u_p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $u_p(e_1) = e_1 + e_2/p$ et $u_p(e_i) = u(e_i)$ pour $i \geqslant 2$. On a $u_p^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $u_p \neq u$ et $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{} u$.

Correction de l'exercice 4787 ▲

1. $GL_n((x^2+1)^{)}) = \det^{-1}((x^2+1)^{\setminus}\{0\})$ est ouvert. Il est dense car $A \in \mathscr{M}_n((x^2+1)^{)})$ quelconque est limite des matrices $A - \frac{1}{p}I$ inversibles pour presque tout entier p (A a un nombre fini de valeurs propres).
2. Toute matrice triangulaire est limite de matrices triangulaires à coefficients diagonaux distincts.
3. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \lim_{p\to\infty}\begin{pmatrix}\lambda & 1/p\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ donc une matrice triangulaire à valeurs propres non distinctes est limite de matrices non diagonalisables. Par conjugaison, la frontière de $D_n((x^2+1)^{)})$ contient l'ensemble des matrices ayant au moins une valeur propre multiple.
   Réciproquement, soit (A_k) une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers une matrice A. Les matrices A_k ont toutes au moins une valeur propre multiple, et ces valeurs propres sont bornées (car si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leqslant \|M\|$ en prenant une norme sur $\mathscr{M}_n((x^2+1)^{)})$ subordonnée à une norme sur $(x^2+1)^n$) donc on peut trouver une suite (z_k) de complexes convergeant vers un complexe z telle que $\chi'_{A_k}(z_k) = 0$. A la limite on a $\chi_A(z) = 0$ ce qui prouve que A a au moins une valeur propre multiple.
   Conclusion : la frontière de $D_n((x^2+1)^{)})$ est exactement l'ensemble des matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre multiple et l'intérieur de $D_n((x^2+1)^{)})$ est l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 4788 ▲

Si N est nilpotente, on peut se ramener au cas où N est triangulaire supérieure stricte.
Soit alors $P = \mathrm{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ avec $\alpha \in (x^2+1)^*$. Le coefficient général de $P^{-1}NP$ est $\alpha^{j-i}N_{ij} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.
Réciproquement, s'il existe une suite (N_k) de matrices semblables à N convergeant vers la matrice nulle, alors par continuité du polynôme caractéristique, on a $\chi_N = (-X)^n$ et N est nilpotente.

Correction de l'exercice 4789 ▲

1. Ω est ouvert : si P a n racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ on choisit $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$. La suite $(P(b_0), \dots, P(b_n))$ est constituée de termes non nuls de signes alternés, il en est de même pour la suite $(Q(b_0), \dots, Q(b_n))$ où Q est un polynôme unitaire arbitraire suffisament proche de P (pour une norme quelconque).
   Ω n'est pas fermé car $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est connexe.

2. Déjà, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de normes convenables, f est une isométrie bicontinue donc $f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$. Montrons que $\overline{f(\Omega)}$ est l'ensemble $\mathscr{S}$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$.
   Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, notons $M(P)$ la matrice compagne de P.
   Si $P \in \mathscr{S}$ alors $M(P)$ est $\mathbb{R}$-trigonalisable, donc limite de matrices à valeurs propres réelles distinctes. Les polynômes caractéristiques de ces matrices, au signe près, appartienent à $f(\Omega)$ et convergent vers P d'où $\mathscr{S} \subset \overline{f(\Omega)}$.
   Si (P_k) est une suite de polynômes de $f(\Omega)$ convergeant vers P alors il existe une suite (O_k) de matrices orthogonales telle que ${}^tO_kM(P_k)O_k$ est triangulaire supérieure (méthode de Schmidt). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que O_k converge vers une matrice orthogonale O et donc ${}^tOM(P)O$ est aussi triangulaire supérieure ce qui implique que $P \in \mathscr{S}$.

Correction de l'exercice 4791 ▲

Remarquer que la restriction de f à toute partie compacte est uniformément continue.

Correction de l'exercice 4798 ▲

1.
2. Soit F est un tel fermé, et $a \in F$. On prend $f(x) = x + d(x,F)$ si $0 \leqslant x \leqslant a$ et $f(x) = x - d(x,F)$ si $a \leqslant x \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 4799 ▲

1. Pour simplifier, on suppose $z = 0$ (sinon, se placer dans la base $(1, X-z, \ldots, (X-z)^d)$ et invoquer l'équivalence des normes en dimension finie).
   Soit $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,d}x^d$. La suite (P_n) étant convergente est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_{n,k}| \leqslant M$ pour tous n,k. De plus, $a_{n,0} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 = 0$ et $a_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1 \neq 0$.
   Posons alors $Q_n(x) = -\frac{a_{n,0}+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,d}x^d}{a_{n,1}}$ (bien défini si n est assez grand). On va montrer que Q_n vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur $\overline{B(0,\delta)}$ pour tout n assez grand si δ est choisi assez petit, ce qui implique l'existence et l'unicité d'une racine pour P_n dans $\overline{B(0,\delta)}$.
   $Q_n(\overline{B(0,\delta)}) \subset \overline{B(0,\delta)}$? Soit $x \in \overline{B(0,\delta)}$: on a
   $$|Q_n(x)| \leqslant \frac{|a_{n,0}| + M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_{n,1}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_1|}.$$
   On choisit $\delta > 0$ tel que $\frac{M(\delta+\cdots+\delta^{d-1})}{|a_1} \leqslant \frac{1}{2}$. Il existe alors $N_1 \in |||$ tel que $\frac{|a_{n,0}|+M(\delta^2+\cdots+\delta^d)}{|a_{n,1}|} \leqslant \delta$ pour tout $n \geqslant N_1$.
   Q_n est contractante sur $\overline{B(0,\delta)}$? Soient $x,y \in \overline{B(0,\delta)}$. On a :
   $$\begin{aligned}|Q_n(x) - Q_n(y)| &\leqslant \frac{|a_{n,2}||x^2-y^2| + \cdots + |a_{n,d}||x^d - y^d|}{|a_n,1|}\\ &\leqslant |x-y|\frac{|a_{n,2}||x+y| + \cdots + |a_{n,d}||x^{d-1} + \cdots + y^{d-1}|}{|a_{n,1}|}\\ &\leqslant |x-y|\frac{M(2\delta + \cdots + d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|}.\end{aligned}$$
   Quitte à diminuer δ on peut imposer $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_1|} \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $\frac{M(2\delta+\cdots+d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|} \leqslant \frac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant N_2$ et Q_n est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne.
2. Voir réponse précédente. Y a-t-il une réponse plus simple pour 1) ?

3. Si z est zéro d'ordre k de P alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n assez grand, P_n a exactement k racines comptées avec leur ordre de multiplicité dans $\overline{B(0,\delta)}$. Ceci est une conséquence du *théorème des résidus* largement hors programme...

Correction de l'exercice 4800 ▲

Si f est constante c'est évident. Sinon, on a facilement $|f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$. Considérons un fermé F et une suite $(f(z_n))$ d'éléments de $f(F)$ convergeant vers $Z \in (x^2+1)$. D'après la remarque, la suite (z_n) est bornée, elle admet une valeur d'adhérence $z \in F$ et $Z = f(z) \in f(F)$.
Remarque : ce résultat est faux pour une fonction polynomiale sur $(x^2+1)^p$ avec $p \geqslant 2$, prendre par exemple $f(x,y) = x$ sur $(x^2+1)^2$ et $F = \{(x,y) \in (x^2+1)^2 \text{ tq } xy = 1\}$.

Correction de l'exercice 4801 ▲

On suppose P non constant, sans quoi le résultat est trivial. Soit $S(X) = \sup(|P(x)|,\ x \in X)$. On a par inclusion et continuité : $S(\mathrm{Fr}(U)) \leqslant S(\overline{U}) = S(U)$. Soit $x \in \overline{U}$ tel que $|P(x)| = S(\overline{U})$. On démontre par l'absurde que $x \in \mathrm{Fr}(U)$, ce qui entraîne l'égalité demandée. Supposons donc $x \in U$ et soit $n = \deg(P)$. Alors pour $\rho > 0$ suffisament petit, et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $x + \rho e^{i\theta} \in U$ et :

$$P(x+\rho e^{i\theta}) = P(x) + \rho e^{i\theta} P'(X) + \cdots + \frac{\rho^n e^{in\theta}}{n!} P^{(n)}(x).$$

avec $P^{(n)}(x) = P^{(n)} \neq 0$. On en déduit :

$$2\pi|P(x)| = \left|\int_{\theta=0}^{2\pi} P(x+\rho e^{i\theta})\,d\theta\right| \leqslant \int_{\theta=0}^{2\pi} |P(x+\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant 2\pi S(U) = 2\pi|P(x)|.$$

On en déduit que les inégalités sont des égalités, et en particulier que la quantité $|P(x+\rho e^{i\theta})|$ est indépendante de ρ et θ. Il y a contradiction car $|P(x+\rho e^{i\theta})|^2$ est un polynôme de degré $2n$ en ρ.

Correction de l'exercice 4802 ▲

1. $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in |||$ par récurrence, puis pour tout $r \in \mathbb{Z}$ par différence, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par quotient et enfin pour tout $r \in \mathbb{R}$ par densité. Dans le cas de (x^2+1)-ev f est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas forcément (x^2+1)-linéaire, ctrex : $z \mapsto \overline{z}$ de (x^2+1) dans (x^2+1).
2. $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leqslant M2^{-n-1}$ donc la série télescopique $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est uniformément convergente.
3. $\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant M2^{-n}$ donc $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leqslant 0$ et g est continue (limite uniforme des f_n) d'où g est linéaire continue. $\|f(x) - g(x)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\| \leqslant 2M$ donc $f - g$ est bornée. Si h est une application linéaire telle que $f - h$ est bornée alors $g - h$ est aussi bornée ce qui entraîne $g = h$ par linéarité.

Correction de l'exercice 4805 ▲

1.
2. Si $c \neq 0$ alors P_c est continue pour toutes les normes N_p et $|||P_c|||_{N_p} = |c|^{-p} e^{|c|}$. Par contre P_0 n'est continue que pour N_0 car si $p > 0$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|}) = \frac{p^p e^{-p}}{(n+1)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc la suite $(x \mapsto e^{-n|x|})$ converge vers la fonction nulle pour N_p, mais $P_0(x \mapsto e^{-n|x|}) = 1 \not\to 0$.
3. Si $p < q$ alors $N_p(x \mapsto e^{-n|x|})/N_q(x \mapsto e^{-n|x|}) \to \infty$ losrque $n \to \infty$.

Correction de l'exercice 4810 ▲

Prendre une base.

Correction de l'exercice 4811 ▲

$\frac{1}{1-X^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_k X}$, $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc $1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-X^n}{n(1-\omega_k X)}$.
Il s'agit de polynômes, donc on peut remplacer X par u, d'où : $(\mathrm{id}_E - u^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{id}_E - e^{2ik\pi/n}u\right)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4812 ▲

$\|X+iY\|^2 = \|X\|^2+\|Y\|^2$, $\|A(X+iY)\|^2 = \|AX\|^2+\|AY\|^2 \leqslant |||A|||_{\mathbb{R}}^2(\|X^2\|+\|Y\|^2)$ donc $|||A|||_(x^2+1)^{\leqslant}|||A|||_{\mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 4813 ▲

1. Non : $\|(x^2+1)^n\| = 2^n$.
2. Oui : $\|\psi\| = \|A\|$.
3. $\|\phi\| = e$, $\|\psi(x^n)\|/\|x^n\|$ si $mn \Rightarrow \psi$ est discontinue.

Correction de l'exercice 4814 ▲

1. nv^{n-1}.
2. Si u et v sont continus, $n\|v^{n-1}\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^n\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^{n-1}\|\,\|v\|$.
   S'il existe k tel que $v^k = 0$, on peut remonter jusqu'à $v = 0$, absurde. Sinon, on a aussi une contradiction.

Correction de l'exercice 4815 ▲

1.
2. $\|P\| = N(P)+N(P')+N(P'')+\dots$ où N est une norme quelconque sur F.

Correction de l'exercice 4816 ▲

Les formes linéaires $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(2)$ constituent une base de E_2^* donc engendrent les formes linéaires $P \mapsto P'(1)$, $P \mapsto P'(2)$ et $P \mapsto P'(3)$. Après calculs, on trouve :

$$\forall\, P \in E_2,\quad \begin{cases} 2P'(1) = & P(2) & & - & P(0) \\ 2P'(2) = & 3P(2) - & 4P(1) + & & P(0) \\ 2P'(3) = & 5P(2) - & 8P(1) + & & 3P(0). \end{cases}$$

En notant $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$ on doit donc chercher :

$$|||\varphi||| = \frac{1}{2}\sup\{|c-a|+4|3c-4b+a|+9|5c-8b+3a|,\ \text{tq } |a|+|b|+|c| \leqslant 1\}.$$

La fonction $f : (a,b,c) \mapsto |c-a|+4|3c-4b+a|+9|5c-8b+3a|$ est convexe donc son maximum sur l'*icosaèdre* $I = \{(a,b,c) \text{ tq } |a|+|b|+|c| \leqslant 1\}$ est atteint en l'un des sommets $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$. Finalement, $|||\varphi||| = \frac{1}{2}f(0,1,0) = 44$.

Correction de l'exercice 4818 ▲

1.
2. Si $x \notin \mathrm{Ker} f$: $\forall\, y \in \mathrm{Ker} f$, $|f(x)| = |f(x-y)| \leqslant \|f\|\,\|x-y\|$ donc $|f(x)| \leqslant \|f\| d(x, \mathrm{Ker} f)$.
   Soit $z \in E$: $z = \alpha x + y$ avec $y \in \mathrm{Ker} f$. Alors $|f(z)| = |\alpha||f(x)|$ et $\|z\| \geqslant |\alpha| d(x, \mathrm{Ker} f)$
   donc $\frac{|f(z)|}{\|z\|} \leqslant \frac{|f(x)|}{d(x,\mathrm{Ker} f)}$.

Correction de l'exercice 4819 ▲

1. $f(x_1)+f(x_2) \leqslant |||f|||\ \|x_1+x_2\| \leqslant |||f|||\ (\|x_1-\varepsilon\|+\|x_2+\varepsilon\|)$.
2. Prendre α compris entre le sup du premier membre et l'inf du troisième. Le sup et l'inf sont dans cet ordre d'après la question précédente.
3. Rmq : φ est mal définie, il faut ajouter "φ est linéaire". On a évidemment $|||\varphi||| \geqslant |||f|||$ puisque φ prolonge f, et il reste à montrer :
$$\forall x \in F,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(x)+t\alpha| \leqslant |||f|||\ \|x+t\varepsilon\|.$$
Pour $t=0$ c'est un fait connu. Pour $t>0$, cela résulte de l'encadrement de α en prenant $x_1=-x/t$ et $x_2=x/t$. Pour $t<0$, prendre $x_1=x/t$ et $x_2=-x/t$.
4. Si $u^k=(u_n^k)_{n\in|||} \in E$ et $(u^k)_{k\in|||}$ est une suite de Cauchy, alors pour tout $n \in |||$ la suite réelle $(u_n^k)_{k\in|||}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel ℓ_n. De plus la suite $(u^k)_{k\in|||}$ est bornée dans E donc la suite ℓ ainsi mise en évidence est sommable (les sommes partielles de $\sum|\ell_n|$ sont majorées), et on montre que $\|u^k-\ell\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ par interversion de limites.
5. Prendre $F_n=\{u\in E$ tq $u_k=0$ si $k\geqslant n\}$.
6. D'après la question **3)** on peut construire f_n, forme linéaire sur $F+F_n$ telle que f_{n+1} prolonge f_n et a même norme que f_n (donc $|||f_n|||=|||f|||$). Soit $G=\cup_{n\in|||}(F+F_n)$ et g la forme linéaire sur G coï ncidant avec chaque f_n sur $F+F_n$. G est dense dans E donc on peut prolonger g en $\varphi : E\to\mathbb{R}$ par uniforme continuité. Il est alors clair que φ est une forme linéaire prolongeant f et a même norme que f.

Correction de l'exercice 4821 ▲

1. Si ν est subordonnée à $\|\ \|$: on a $|\lambda| \leqslant \nu(f^p)^{1/p}$ pour toute valeur propre λ et tout $p\geqslant 1$, donc il suffit de prouver que la suite $(x_p=\nu(f^p)^{1/p})$ est convergente. Soit $\ell=\inf\{x_p,\ p\geqslant 1\}$, $\varepsilon>0$ et $p\geqslant 1$ tel que $x_p\leqslant \ell+\varepsilon$. Pour $n>p$ on note $n-1=pq+r$ la division euclidienne de $n-1$ par p et l'on a :
$$\nu(f^n)=\nu((f^p)^q\circ f^{r+1}) \leqslant \nu(f^p)^q\nu(f^{r+1})$$
d'où :
$$\ell \leqslant x_n \leqslant x_p^{pq/n}x_{r+1}^{(r+1)/n} \leqslant (\ell+\varepsilon)^{pq/n}\max(x_1,\dots,x_p)^{(r+1)/n}.$$
Le majorant tend vers $\ell+\varepsilon$ quand n tend vers l'infini donc pour n assez grand on a $\ell\leqslant x_n\leqslant \ell+2\varepsilon$ ce qui prouve la convergence demandée.
Dans le cas où ν est une norme quelconque sur $\mathscr{L}(E)$, il existe une norme subordonnée μ et deux réels $a,b>0$ tels que $a\mu\leqslant\nu\leqslant b\mu$ et donc les suites $(\nu(f^p)^{1/p})$ et $(\mu(f^p)^{1/p})$ ont même limite par le théorème des gens d'armes. Remarque : il résulte de ceci que $\lim_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$ est indépendant de ν.
2. Considérer la matrice de f^p dans une base propre pour f.
3. On sait que $f^p=\sum_{\lambda\in\mathrm{spec}(f)}\lambda^pP_\lambda(p)$ où P_λ est un polynôme. D'où $\rho(f)\leqslant\nu(f^p)^{1/p}\leqslant\rho(f)+o(1)$ et donc $\nu(f^p)^{1/p}\xrightarrow[p\to\infty]{}\rho(f)$ (thm du rayon spectral).

Correction de l'exercice 4822 ▲

Si $u(\mathring{B}(0,1))$ est ouvert alors il engendre $\mathbb{R}^m$ donc u est surjective.
Si u est surjective, soit $A=u(\mathring{B}(0,1))$. A est convexe, borné, symétrique par rapport à 0 et la réunion des homothétiques de A est égale à $\mathbb{R}^m$; la jauge associée à A est une norme sur $\mathbb{R}^m$ équivalente à l'une des normes usuelles donc A contient une boule de centre 0 et, par homothétie-translation, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ a une image ouverte dans $\mathbb{R}^m$.

Correction de l'exercice 4825 ▲

$E\setminus B$ est connexe par arcs et contient au moins un point $a\in A$. Soit $x\in E\setminus B$ et $\varphi:[0,1]\to E\setminus B$ un arc continu joignant a à x dans $E\setminus B$. Alors $\varphi^{-1}(A)=\varphi^{-1}(A\cup B)$ est non vide, relativement ouvert et relativement fermé dans $[0,1]$, donc c'est $[0,1]$ ce qui prouve que $x\in A$.

Correction de l'exercice 4826 ▲

Le sens H est fermé $\Rightarrow E\setminus H$ n'est pas connexe (par arcs) est évident. Réciproquement, si H n'est pas fermé alors $\overline{H}=E$. Soient $a,b\in E\setminus H$ et (x_n) une suite d'éléments de H telle que $x_0=0$ et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a-b$. On définit un arc continu $\varphi:[0,1]\to E\setminus H$ reliant a à b par : φ est affine sur $[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}]$, $\varphi(\frac{1}{n+1})=b+x_n$ et $\varphi(0)=a$.

Correction de l'exercice 4828 ▲

1.
2. $d(x_n,a)$ décroît, donc tend vers d. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers ℓ et $d(\ell,a)=d$. La suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(\ell)$ et on a $d(f(\ell),a)=d$, donc $\ell=a$. Il y a une seule valeur d'adhérence, donc la suite converge.

Correction de l'exercice 4829 ▲

C est stable par f_n qui est $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-lipschitzienne. Donc il existe $x_n\in C$ tel que $f_n(x_n)=x_n$; toute valeur d'adhérence de (x_n) est point fixe de f.

Correction de l'exercice 4833 ▲

1.
2.
3. Soit $\ell=\lim_{n\to\infty}\delta(K_n)$. Il existe $x_n,y_n\in K_n$ tels que $d(x_n,y_n)=\delta(K_n)$. Après extraction de sous-suites, on peut supposer que $x_n\to x$ et $y_n\to y$. Pour $\varepsilon>0$, $(\overline{B}(x,\varepsilon)\cap K_n)$ et $(\overline{B}(y,\varepsilon)\cap K_n)$ forment des suites décroissantes de compacts non vides, donc $\overline{B}(x,\varepsilon)\cap K$ et $\overline{B}(y,\varepsilon)\cap K$ sont non vides. Par conséquent, $\delta(K)\geqslant \ell-2\varepsilon$.

Correction de l'exercice 4835 ▲

$U_{i,n}=\{x\in E \text{ tq } \overline{B}(x,1/n)\subset O_i\}$ est ouvert et les $U_{i,n}$ recouvrent E. On extrait un recouvrement fini $\Rightarrow r=\min(1/n)$.

Correction de l'exercice 4836 ▲

Soit (u^n) une suite de suites éléments de A : $u^n=(u^n_k)$. On peut trouver une sous-suite $(u^{n_{p_0}})$ telle que $(u_0^{n_{p_0}})$ converge vers $u_0\in[0,1]$, puis une sous-suite $(u^{n_{p_1}})$ telle que $(u_0^{n_{p_1}},u_1^{n_{p_1}})$ converge vers $(u_0,u_1)\in[0,1]^2$, etc. Alors la suite $(u^{n_{p_k}})_k$ converge dans A vers $(u_0,u_1,\dots)$.

Correction de l'exercice 4839 ▲

On choisit $a\in K$ et on considère pour $n\geqslant 1$ la fonction $f_n : x\mapsto \frac{1}{n}a+\left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)$. f_n est une $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-contraction de K donc admet un point fixe x_n. Si x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) alors $f(x)=x$.

Correction de l'exercice 4841 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1\cup F_2=A$: Alors $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(F_1)\cup\mathrm{Fr}(F_2)$.

Correction de l'exercice 4843 ▲

Soient F_1, F_2 fermés non vides disjoints tels que $F_1 \cup F_2 = \{\text{va de } u_n\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(F_1, F_2) > \varepsilon$. Alors, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans un seul des F_i.

Correction de l'exercice 4848 ▲

Soit $r = \lim r_n$: $\|a_n - a_{n+k}\| \leqslant r_n - r_{n+k}$ donc la suite (a_n) est de Cauchy, et converge vers a.
On a $\|a_n - a\| \leqslant r_n - r$ donc $B(a,r) \subset B_n$.
Réciproquement, si $x \in \bigcap_n B_n$, alors $\|x - a_n\| \leqslant r_n$ donc $\|x - a\| \leqslant r$.

Correction de l'exercice 4850 ▲

Soit $a \in \mathring{F}$ et $B(a,r) \subset \bigcup_n F_n$: $B \setminus F_1$ est un ouvert non vide donc contient une boule $B_1(a_1, r_1)$. De même, $B_1 \setminus F_2$ contient une boule $B_2(a_2, r_2)$ etc. On peut imposer $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc il existe $c \in \bigcap_n B_n$, c.a.d. $c \in B$ mais pour tout n, $c \notin F_n$. Contradiction.

Correction de l'exercice 4851 ▲

Soit (a_n) définie par $a_{n+1} = f(a_n)$: les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers le point fixe de $f \circ f$.

Correction de l'exercice 4852 ▲

Supposons qu'il existe une famille $(\mathscr{C}_i = \mathscr{C}(a_i, R_i))_{i\in I}$ de cercles disjoints dont la réunion est égale au plan P. On note D_i le disque fermé de frontière $\mathscr{C}_i$. Soit $i_0 \in I$ choisi arbitrairement, i_1 tel que $a_{i_0} \in \mathscr{C}_{i_1}$, i_2 tel que $a_{i_1} \in \mathscr{C}_{i_2}$ etc. On a $R_{i_k} < \frac{1}{2} R_{i_{k-1}}$ donc la suite (D_{i_k}) vérifie le théorème des fermés emboités, l'intersection des D_{i_k} est réduite à un point x par lequel ne passe aucun cercle $\mathscr{C}_j$.

Correction de l'exercice 4853 ▲

1.
2. demi-cercle unité $\Rightarrow x = 0$, $y = \frac{2}{\pi}$.
3. Sommes de Riemann + l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.
4. $\vec{N}'(t) = \vec{\sigma}(\vec{M}'(t)) \Rightarrow \|\vec{N}'(t)\| = \|\vec{M}'(t))\|$.
   $\int_{t=a}^{b} \vec{GN_t} \|\vec{N}'(t)\| \, dt = \vec{0} = \int_{t=a}^{b} \sigma(\vec{G}) N_t \|\vec{M}'(t)\| \, dt$, donc $\sigma(G) = G$.
5.

Correction de l'exercice 4854 ▲

1.
2.
3. $\vec{e_i}'' = \vec{\Omega}' \wedge \vec{e_i} + (\vec{\Omega}|\vec{e_i})\vec{\Omega} - \|\vec{\Omega}\|^2 \vec{e_i}$.

Correction de l'exercice 4857 ▲

1. Non : $f(t) = (t, t^2)$, $g(t) = (1, t)$.
2. Non : $f(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, $g(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4859 ▲

$\det(\vec{MI}, \vec{MJ}) + \det(\vec{MJ}, \vec{MK}) + \det(\vec{MK}, \vec{MI}) = \det(\vec{IJ}, \vec{IK})$.

Correction de l'exercice 4860 ▲

Le système $\begin{cases} P \\ P' \\ Q \end{cases}$ doit être lié.

Correction de l'exercice 4861 ▲

$11x+2y-13z=-4$.

Correction de l'exercice 4862 ▲

1. $a=-4$
2. $x-5y+3z=-9$

Correction de l'exercice 4863 ▲

1. Le plan passant par A et D' n'est pas parallèle à D''.
2. On doit pouvoir s'en sortir avec un repère adéquat …

Correction de l'exercice 4865 ▲

Repère $(A,\vec{AB},\vec{AD})$.

Correction de l'exercice 4866 ▲

$\binom{0}{4/3}$.

Correction de l'exercice 4867 ▲

$\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})$ si $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\varnothing$.
$\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})+1$ sinon.

Correction de l'exercice 4869 ▲

1. $ux+vy+h=\lambda^2(ua+v)+\lambda(u+va)+h$. Ceci est nul pour tout λ si et seulement si $ua+v=0$, $u+va=0$, $h=0$ soit $(u,v,a,h)=(u,-u,1,0)$ ou $(u,v,a,h)=(u,u,-1,0)$.
2. $x-y+(\lambda-\lambda^2)(z-1)=0$ et $x+y-(\lambda+\lambda^2)(z+1)=0$.
3.

Correction de l'exercice 4872 ▲

1. $\begin{cases} 2x'=x-2y-z+1 \\ 2y'=-x-z+1 \\ 2z'=-x-2y+z+1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x'=-5x-3y+2z-3 \\ 2y'=3x+y-2z-1 \\ z'=-3x-3y+z-3 \end{cases}$

Correction de l'exercice 4873 ▲

affinité de base $\mathscr{P}: x+2y+z=2$, de direction $\mathrm{vect}(\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3)$, de rapport 3.

Correction de l'exercice 4874 ▲

si trois points sont non alignés, $ABCD$ doit être un parallélogramme.
si deux points sont distincts et A,B,C,D sont alignés, on doit avoir $A=C$, $B=D$.

Correction de l'exercice 4876 ▲

affinité de rapport $\lambda\mu$ si $\lambda\mu \neq 1$, transvection ou id sinon.

Correction de l'exercice 4878 ▲

5. $\mathscr{B} = \{3(x+y+z)=1\}, \quad \vec{\mathscr{F}} = \text{vect}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3), \quad 9\vec{u} = \vec{e}_1+4\vec{e}_2-5\vec{e}_3.$

Correction de l'exercice 4879 ▲

oui ssi $\vec{P'Q'}$ est colinéaire à $\vec{PQ}$. Dans ce cas, f est unique.

Correction de l'exercice 4880 ▲

Il existe une homothétie de centre O transformant A en A', B en B', et C en C', et l'homothétie de centre $G, -\frac{1}{2}$ transforme A en α, B en β, C en γ.

Correction de l'exercice 4885 ▲

Repère $(O,\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}) \Rightarrow$ les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Correction de l'exercice 4886 ▲

$A_i^{(k)} = \text{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k}\sum_{l\equiv j (\text{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right).$

Correction de l'exercice 4887 ▲

$\vec{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1}\vec{GA_i^{(k)}}.$

Correction de l'exercice 4888 ▲

$A_k = \text{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$ où α_k, β_k, γ_k vérifient : $x_k = x_{k-1}+x_{k-2}+2x_{k-3}$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $2, j, j^2$, donc $x_k \sim \lambda 2^k$ avec $\lambda = \frac{x_0+x_1+x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Donc $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, et $A_k \to G$, isobarycentre de $A_0A_1A_2$.

Correction de l'exercice 4892 ▲

$\frac{1}{7}$.

Correction de l'exercice 4893 ▲

1.
2. $N = \text{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.
3.
4. homothétie de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4894 ▲

Repère $(A,\vec{AB},\vec{AC})$.

Correction de l'exercice 4895 ▲

$M_1 \mapsto M_4$ est affine, et échange A et B. $\Rightarrow$ involutive.

Correction de l'exercice 4896 ▲

1.
2. G et les symétriques de A,B,C par rapport aux milieux des côtés opposés.

Correction de l'exercice 4898 ▲

1. Soit $\alpha' = \overline{(\vec{A'A},\vec{A'B})}$: $\frac{A'B}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AB}{\sin(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\sin(\alpha/2)} = \frac{AC}{\sin(\pi-\alpha')}$.
2. $I = \mathrm{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Correction de l'exercice 4899 ▲

1. $-\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$.
2. $H = \mathrm{Bar}(A : \tan\alpha, B : \tan\beta, C : \tan\gamma) = \mathrm{Bar}\left(A : \frac{a}{\cos\alpha}, B : \frac{b}{\cos\beta}, C : \frac{c}{\cos\gamma}\right)$.

Correction de l'exercice 4900 ▲

1. Parabole. axes = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. sommet : $X = -\frac{4}{5}$, $Y = -\frac{16}{5}$.
2. Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.
3. Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
4.
5. Centre $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} & & m & <0 & \Rightarrow & \text{ellipse horizontale.}\\ 0 & < & m & <1/2 & \Rightarrow & \text{hyperbole verticale.}\\ 1/2 & < & m & <1 & \Rightarrow & \text{hyperbole horizontale.}\\ 1 & < & m & & \Rightarrow & \text{ellipse verticale.}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 4901 ▲

axes d'angle $-\frac{1}{2}\arctan 2\ [\pi/2]$, excentricité = $\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$.

Correction de l'exercice 4902 ▲

$\mathscr{C} : x^2(1-e^2) + y^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0$
$T_u, v : x(u(1-e^2) + e^2d) + vy = e^2d(d-u)$
$uv' - u'v = 0 \Rightarrow x = d$.

Correction de l'exercice 4903 ▲

1. Soit O ce milieu. La tangente en M est parallèle à (FH'), et passe par le milieu de $[F,H]$, donc par le milieu de $[H,H']$.
2. Calcul d'angles. $\overline{(\vec{M}O,\vec{M}F)} \equiv \overline{(F\vec{H}',F\vec{M}')}$.

Correction de l'exercice 4904 ▲

Soit O' ce centre. Les triangles MPQ et MAB sont semblables, donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre M qui transforme A en P.
Soit $(A'B')$ la symétrique de (AB) par rapport à O. D'après l'homothétie,

$$\frac{O'M}{d(O',\Delta)} = \frac{OM}{d(O,(AB))} = (cste) = \frac{OM - O'M}{d(O,(AB)) - d(O',\Delta)} = \frac{OO'}{d(O',(A'B'))}.$$

Donc O' décrit une partie d'une conique de foyer O et de directrice $(A'B')$.

Correction de l'exercice 4905 ▲

Repère $(O,\frac{\vec{OA}}{R},\vec{j}) \Rightarrow$ parabole $\rho = \frac{R}{1+\sin\theta}$.

Correction de l'exercice 4906 ▲

arcs de paraboles de foyer F et de directrices Δ,Δ', parallèles à D à la distance $2a$ de D.

Correction de l'exercice 4908 ▲

$A : (t^2/2p,t)$, $B : (u^2/2p,u)$ avec $t(t+u) = -2p^2$. AB est minimal pour $t^2 = 2p^2$ et vaut alors $3p\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 4909 ▲

1. Parabole : $y^2 = 2px \Rightarrow x = 2pt^2, y = 2pt$. Corde : $\begin{vmatrix} 2pa^2 & 2pb^2 & x \\ 2pa & 2pb & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
2. $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.
3. $c = -\frac{a^2+ab+1}{a+b}$.
   $(BC) : (2pa+y)b^2 + (2pa^2+2p-x)b - (ax+a^2y+y) = 0$.
   Point fixe : $y = -2pa$, $x = 2p(a^2+1)$.
4. Parabole translatée de $\mathscr{P}$ de $(2p,0)$.

Correction de l'exercice 4910 ▲

1. $M = (2pt^2,2pt) \Rightarrow 2t^2 + 2tt_0 + 1 = 0$. Il y a deux solutions si $|t_0| > \sqrt{2}$, une seule si $|t_0| = \sqrt{2}$ et aucune si $|t_0| < \sqrt{2}$.
2. $t_1 + t_2 = -t_0$, $t_1^2 + t_2^2 = t_0^2 - 1$. Centre : $(4pt_0^2 - 2p, 0)$ (1/2-droite).

Correction de l'exercice 4911 ▲

1. $x_C - x_A = 2p \pm \sqrt{4p^2 + 8pxA}$.
2. $x_{n+1} = x_n + \sqrt{8px_n + 4p^2} + 2p = x_n\left(1 + \sqrt{\frac{8p}{x_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\right)$ donc $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt{x_n} + \sqrt{2p} + o(1)$ et $x_n \sim 2pn^2$.

Correction de l'exercice 4912 ▲

Soient P,P' les symétriques de F par rapport aux tangentes. Donc $F'P = F'P' = 2a$.
Le triangle FPP' est rectangle, donc T est le milieu de $[P,P']$, et $TF = TP = TP'$.
Donc, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.
$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$ donc T appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

Correction de l'exercice 4913 ▲

1. $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.
2. $M : \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \end{pmatrix}, P : \begin{pmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2a\sin\alpha \end{pmatrix}$: (MP) est tangente à $\mathscr{E}' \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Correction de l'exercice 4914 ▲

1. $\frac{x^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = d^2$.

Correction de l'exercice 4915 ▲

$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow T : \begin{pmatrix} a/e \\ b^2(e-X)/d \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{FM} \cdot \vec{FT} = 0$.

Correction de l'exercice 4918 ▲

Hyperbole d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$, avec $\overline{(\vec{D},\vec{\Delta})} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Correction de l'exercice 4919 ▲

1. $xy = \frac{a^2}{2}$.

Correction de l'exercice 4921 ▲

1. $MH = \frac{1}{2}MF \Rightarrow IMH, IMN$, et INF sont semblables.

Correction de l'exercice 4922 ▲

Soit $\alpha \equiv \overline{(\vec{AM},\vec{AO})}$.
$\frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin(2\alpha)} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{AM}{OM}$.
Al-Khâshi $\Rightarrow \frac{AM^2}{OM}(OM - OA) = (OM - OA)(OM + OA)$.
$OM = OA \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}$.
$OM \neq OA \Rightarrow OM = 2d(M,\Delta)$ où Δ est la médiatrice de $[O,A]$, et M est du côté de O.

Correction de l'exercice 4923 ▲

$M : \begin{pmatrix} 1/\cos\theta \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$ hyperbole.

Correction de l'exercice 4924 ▲

On se ramène à une hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c, \frac{1}{c}\right)$. Alors $H = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right) \in \mathscr{H}$.

L'équation du cercle circonscrit à ABC est : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et les points communs au cercle et à $\mathscr{H}$ vérifient donc : $x^4+\alpha x^3+\gamma x^2+\beta x+1=0$. On connaît 3 racines : $x=a,b,c$ donc la quatrième est $q=\frac{1}{abc}$ ce qui prouve que Q et H sont symétriques par rapport à O.

Correction de l'exercice 4925 ▲

1. $\text{vp}=1,1\pm\sqrt{2}$. er : $X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow$ hyperboloïde à 2 nappes.
2. $\text{vp}=-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0$. er : $-\frac{3}{2}(X^2+Y^2)+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow$ cylindre de révolution.
3. $\text{vp}=0,0,14$. er : $14Z^2+4=0 \Rightarrow \varnothing$.
4. $\text{vp}=0,-1\pm\sqrt{7}$. er : $-(1+\sqrt{7})Y^2+(-1+\sqrt{7})Z^2+3=0 \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
5. $\text{vp}=0,2,3$. er : $2Y^2+3Z^2-\frac{8X}{\sqrt{6}}=0 \Rightarrow$ paraboloïde elliptique.
6. $\text{vp}=-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1$. er : $-\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}+Z^2+1=0 \Rightarrow$ hyperboloïde de révolution à une nappe.
7. $\text{vp}=0,\frac{9}{2},-\frac{3}{2}$. er : $\frac{9Y^2}{2}-\frac{3Z^2}{2}=0 \Rightarrow$ deux plans sécants.
8. $\text{vp}=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. er : $Y^2-Z^2=\sqrt{2} \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
9. $\text{vp}=1,1,0$. er : $X^2+Y^2=\frac{1}{5} \Rightarrow$ cylindre de révolution.

Correction de l'exercice 4928 ▲

1. $\frac{(xz_0-x_0z)^2}{a^2}+\frac{(yz_0-y_0z)^2}{b^2}=(z-z_0)^2$.
2. $y_0=0$, $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{b^2}=1$.

Correction de l'exercice 4929 ▲

1.
2.
3. Non lorsque la valeur propre médiane est nulle (paraboloïde hyperbolique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique, plans).

Correction de l'exercice 4930 ▲

1. $x^2+y^2=1+\lambda^2z^2$.
2.

Correction de l'exercice 4932 ▲

1. Hyperbole équilatère d'asymptotes : $\begin{cases} x-z-1=\pm y\sqrt{2} \\ x+z=1. \end{cases}$
2. $x^2+y^2=2z^2$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 4933 ▲

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow V=\frac{8\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 4934 ▲

$\lambda=0$: $S=(0,0,0)$, cône de révolution.
$\lambda=\frac{4}{3}$: $S=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, cône de révolution.

Correction de l'exercice 4936 ▲

$\frac{\vec{MP}}{a^2} = \frac{\vec{MQ}}{b^2} = \frac{\vec{MR}}{c^2}$.

Correction de l'exercice 4939 ▲

$e < 1$: ellipsoïde de révolution, $e = 1$: cylindre parabolique, $e > 1$: hyperboloïde de révolution.

Correction de l'exercice 4940 ▲

Ellipsoïde.

Correction de l'exercice 4941 ▲

$x^2\cos^2\theta + y^2 - 2xz\cos\theta\sin\theta - z^2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow$ cône elliptique.

Correction de l'exercice 4942 ▲

Soit r le rayon de S et h la distance du centre I de S à P. On choisit un repère tel que $P = Oxy$ et $I = (0,0,h)$.
Soit S' une sphère de centre $M(x,y,z)$:
Pour $z > 0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$.
S à l'intérieur de $S' \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h > r$.
S' à l'intérieur de $S \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
Pour $z < 0$: S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
S' à l'intérieur de $S \Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.

Correction de l'exercice 4944 ▲

Droite orthogonale à $\vec{S} \wedge \vec{u}$, $\vec{u} \perp \vec{\mathscr{P}}$, ou $\varnothing$ ou $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 4947 ▲

Soit $\mathscr{T}$ un torseur : on décompose $\mathscr{T}(A)$ en $\alpha\vec{AB}\wedge\vec{BC} + \beta\vec{AB}\wedge\vec{BD} + \gamma\vec{AC}\wedge\vec{CD}$, et $\vec{R}$ en $\alpha'\vec{AB} + \beta'\vec{AC} + \gamma'\vec{AD}$.
$\Rightarrow$ famille génératrice.

Correction de l'exercice 4949 ▲

Cercle circonscrit au triangle $A'BC$ symétrique de ABC par rapport à (BC).

Correction de l'exercice 4950 ▲

$xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = r^2 - OM^2$ avec $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$.
$xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = xAM^2 + yBM^2 + zCM^2$.

Correction de l'exercice 4952 ▲

Nous savons que la distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c = 0$ est donnée par la formule $d(M_0,D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Pour une droite D_λ la formule donne : $d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0+2\lambda y_0-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}}$.

Analyse.
On cherche un point $M_0 = (x_0,y_0)$ tel que pour tout λ, $d(M_0,D_\lambda) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.
L'égalité $d(M_0,D_\lambda)^2 = k^2$ conduit à

$$\left((1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda+2)\right)^2 = k^2\left((1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\right)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos inconnues sont x_0, y_0, k. On regarde l'égalité comme une égalité de deux polynômes en la variable λ.
Pour ne pas avoir à tout développer on raffine un peu : on identifie les termes de plus haut degré en λ^4 : $x_0^2\lambda^4 = k^2\lambda^4$ donc $x_0^2 = k^2$.
En évaluant l'égalité pour $\lambda = 0$ cela donne $(x_0-2)^2 = k^2$. On en déduit $(x_0-2)^2 = x_0^2$ dont la seule solution est $x_0 = 1$. Ainsi $k = 1$ (car $k > 0$).
L'égalité pour $\lambda = +1$ donne $(2y_0-6)^2 = 4k^2$ et pour $\lambda = -1$ donne $(-2y_0+2)^2 = 4k^2$. La seule solution est $y_0 = 2$.

Synthèse. Vérifions que le point de coordonnées $M_0 = (1,2)$ est situé à une distance $k = 1$ de toutes les droites D_λ.
Pour $(x_0,y_0) = (1,2)$, on trouve : $d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)+4\lambda-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{\sqrt{(\lambda^2+1)^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda^2+1|} = 1$. Donc $M_0 = (1,2)$ est bien équidistant de toutes les droites D_λ.

Correction de l'exercice 4954 ▲

Décomposer les rotations en symétries.

Correction de l'exercice 4955 ▲

la symétrie centrale $(\alpha+\beta+\gamma = \pi)$ autour de K, point de contact du cercle inscrit et de (AC).

Correction de l'exercice 4957 ▲

$x' = \frac{ay^2}{x^2+y^2-ax}$, $y' = \frac{-axy}{x^2+y^2-ax}$, M' est bien défini ssi M n'appartient pas au cercle de diamètre $[AO]$.
Soit D le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$, D est caractérisé par les inégalités $x^2+y^2-ax < 0$, $y > 0$ d'où $x' < 0$ et $y' > 0$. La réciproque se traite (péniblement) en remarquant que seuls les points de D ont une image dans ce quart de plan et que f est quasi-involutive.

Correction de l'exercice 4958 ▲

Droite parallèle à (AC) passant par $D = \mathrm{Bar}(A:1, B:-\frac{1}{3})$.

Correction de l'exercice 4959 ▲

Pour $k = -1,-5$: plan médiateur de $G = \mathrm{Bar}(A:1, B:2, C:k)$ et $I = \mathrm{Bar}(D:1, E:1)$.
Pour $k \neq -1,-3,-5$: sphère de centre $O = \mathrm{Bar}(G:(3+k)^2, I:-4)$.
Pour $k = -3$: sphère de centre I.

Correction de l'exercice 4960 ▲

$221C_1 = (949, 149, -615)$, $93C_2 = (128, -71, 397)$.

Correction de l'exercice 4961 ▲

$A_P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda)$, $A_Q = (1, 1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$, $A_R = (1-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2})$, $A_S = (\frac{7-\lambda}{11}, -\frac{1+3\lambda}{11}, \frac{10\lambda-4}{11})$.
coplanaires $\Leftrightarrow 8\lambda+3\lambda^2+3\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Correction de l'exercice 4962 ▲

1. $\Omega : (1,1,1)$, $R = \sqrt{5}$.
2. $(ABC) : x+y+z = 6$. $(ABD) : 4x-2y+z = 3$. $(ACD) : x+4y-2z = 3$. $(BCD) : 7x+y-5z = 12$.

3.
$$I:(a,b,c)\Leftrightarrow\begin{cases}6-a-b-c&=&r\sqrt{3}\\4a-2b+c-3&=&r\sqrt{21}\\a+4b-2c-3&=&r\sqrt{21}\\12-7a-b+5c&=&r\sqrt{75}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a&=&9-2\sqrt{7}\\2b&=&6-\sqrt{7}\\2c&=&3\\2r&=&\sqrt{21}-2\sqrt{3}.\end{cases}$$

Correction de l'exercice 4963 ▲

$H:(-18/54,8/54,-28/54)$, $K:(7/54,13/54,-33/54)$.

Correction de l'exercice 4964 ▲

$H:(-2/19,28/19,35/19)$, $K:(-6/19,40/19,23/19)$, $d=4\sqrt{19}$.

Correction de l'exercice 4965 ▲

Soient B', D' les projetés de B, D sur (AC). Alors $BB'=DD'$ donc la perpendiculaire commune à (AC) et (BD) passe par le milieu de $[B,D]$. Par symétrie, elle passe aussi par le milieu de $[A,C]$ et par Pythagore $AB=CD$.

Correction de l'exercice 4966 ▲

$a/\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 4967 ▲

$d^2=\frac{(x+2y-z+3)^2}{6}+\frac{(3x+3z+11)^2}{9}$.

Correction de l'exercice 4968 ▲

$$\begin{cases}14x'=13x-2y-3z+4\\14y'=-2x+10y-6z+8\\14z'=-3x-6y+5z+12.\end{cases}$$

Correction de l'exercice 4969 ▲

$D':(9/53,40/53,-117/53)$, $E':(-14/53,32/53,23/53)$, $\vec{u}:(23,8,-140)$.

Correction de l'exercice 4970 ▲

$2x-7y-z=-1$.

Correction de l'exercice 4973 ▲

$\cos\theta=1-\frac{1}{2\sin^2(\pi/5)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 4974 ▲

$x^2+y^2+z^2-10z=9$.

Correction de l'exercice 4975 ▲

Soient A,B deux points de S distincts. Intersection de S avec un plan passant par A et $B\Rightarrow S$ est réunion de cercles passant par A et B. On considère le plan médiateur de $[A,B]$, P qui coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Le plan $Q=(OAB)$ coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont en commun les points C, D. (CD) est médiatrice de $[A,B]$ dans Q donc est un diamètre de $\mathscr{C}'$ et passe par O, donc est aussi diamètre de $\mathscr{C}$. Ainsi $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de même centre et même rayon dans des plans perpendiculaires. En considérant les plans coupant P et Q à angle droit, on obtient que S est une sphère de centre O.

Correction de l'exercice 4976 ▲

Soient $D, \vec{u}, \alpha$ l'axe, le vecteur, et l'angle de g. Alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est le vissage d'axe $f(D)$, de vecteur $\vec{f}(\vec{u})$, et d'angle α.
On veut que ce soit g, donc D est invariant par f, ce qui implique que D soit l'axe de f.
Réciproquement, si f et g ont même axe, alors ils commutent.

Correction de l'exercice 4977 ▲

Soit $v = \sigma_1 \circ \sigma_2$. (vissage autour de la perp. commune à D_1 et D_2)
$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un $\frac{1}{2}$-tour $\Rightarrow v \circ \sigma_3 \circ v \circ \sigma_3 =$id, donc $\sigma_3 \circ v \circ \sigma_3^{-1} = v^{-1}$.
L'axe de v est donc invariant par σ_3, donc parallèle ou perpendiculaire à D_3. Si parallèle, alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est encore un vissage $\Rightarrow$ ne convient pas.

Correction de l'exercice 4978 ▲

$d_{AD}(D) = D, \quad d_{AC}(D) = D'$ tq $\vec{AD'} = \vec{DC}$.
La droite (AD') est parallèle à (DC) qui est perpendiculaire à (AB).
Donc $f(D) = d_{AB}(D') = D''$ tq $\vec{AD''} = \vec{CD}$.
$d_{AD}(D'') = C, \quad d_{AC}(C) = C, \quad f(D'') = d_{AB}(C) = C'$ tq $\vec{AC'} = \vec{CB}$.
$d_{AD}(C') = C''$ tq $\vec{AC''} = \vec{BC}, \quad d_{AC}(C'') = B, \quad f(C') = d_{AB}(B) = B$.
$d_{AD}(B) = B'$ tq $\vec{AB'} = \vec{BD}, \quad d_{AC}(B') = B''$ tq $\vec{AB''} = \vec{DB}, \quad f(B) = d_{AB}(B'') = D$.
Soit E le symétrique de C par rapport à (BD) : f est le $\frac{1}{4}$-tour autour de (AE) envoyant D sur B.

Correction de l'exercice 4979 ▲

ABC équilatéral : 12, $\quad ABC$ isocèle : 4, $\quad ABC$ scalène : 2.

Correction de l'exercice 4980 ▲

1. 24 éléments :

identité	(1)
rotations autour de l'axe d'une face	(8)
symétries % plan médiateur d'une arête	(6)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées	(3)
$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. …+ symétrie % plan médian	(6)

2. 48 éléments :

identité		(1)
symétries	% plan médian d'une face	(3)
	% plan diagonal d'une face	(6)
	% axe d'une face	(3)
	% axe d'une arête	(6)
	% centre du cube	(1)
rotation	$\pm 2\pi/3$ autour d'une diagonale	(8)
	$\pm\pi/2$ autour de l'axe d'une face	(6)
symétries-rotations	$\pm\pi/2$ % axe face	(6)
	$\pm\pi/3$ % diagonale	(8)

3. si les droites ne sont pas perpendiculaires :

identité	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour de la perpendiculaire commune	(1)
$\frac{1}{2}$-tour autour d'une bissectrice	(2)

si elles sont perpendiculaires, il y a aussi :

symétrie % plan contenant une droite et la perp. commune	(2)

symétrie-$\frac{1}{4}$-tour autour de la perp. commune (2)

Correction de l'exercice 4981 ▲

L'application $M_1 \mapsto M_4$ est affine donc est une homothétie-translation (dim 1) et le coefficient d'homothétie est strictement inférieur à 1.

Correction de l'exercice 4984 ▲

1.
2.
3. $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{2t(t^2-t-1)}{(t-1)^2} \Rightarrow t = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
4. $\det(M', M'') = \frac{3}{2}\sin 4t + 3\sin 2t \Rightarrow t = k\pi$.

Correction de l'exercice 4985 ▲

1.
2. $\frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{-2(t-1)(t^2+t+1)(t^3-3t-1)}{t(2t^3+1)(t^3+2+3t)}$.

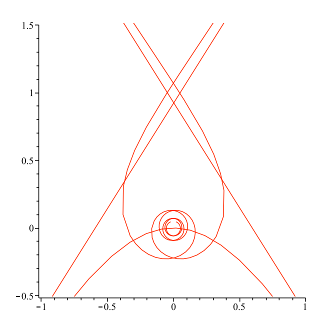
Correction de l'exercice 4990 ▲

1.
2. Repère $(0, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ avec θ constant $\Rightarrow$ point de concours : $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$.

Correction de l'exercice 4991 ▲

Coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{2}\left(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)$ avec $A = (a, 0)$.

Correction de l'exercice 4992 ▲



La courbe est symétrique par rapport à Oy. $M(\rho,\theta) = M_1(\rho_1,\theta_1)$ si et seulement si $\begin{cases}\theta_1 \equiv \theta\ [2\pi] \\ \rho_1 = \rho\end{cases}$ ou $\begin{cases}\theta_1 \equiv \theta + \pi\ [2\pi] \\ \rho_1 = -\rho.\end{cases}$

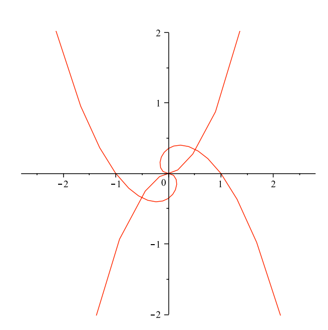
Dans le premier cas, $\rho = \rho_1 \Leftrightarrow \theta\theta_1 = -1$ pour $\theta \neq \theta_1$ ce qui donne l'équation en θ :

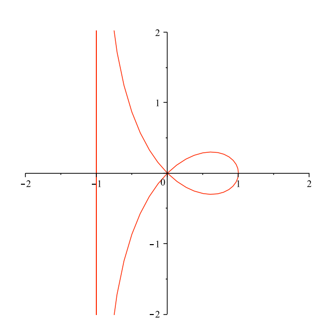
$$\theta^2 + 2k\pi\theta + 1 = 0$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation à k fixé non nul admet deux racines, ce qui donne deux familles de points doubles. De même, le second cas ammène deux autres familles définies par l'équation :

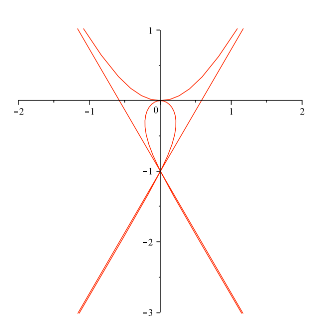
$$\theta^2 + (2k+1)\pi\theta + 1 = 0.$$

Correction de l'exercice 4993 ▲

1. 

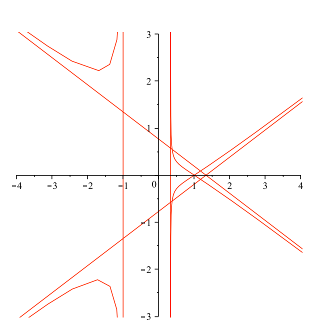
2. 

   aire de la boucle : $2-\dfrac{\pi}{2}$

3. 

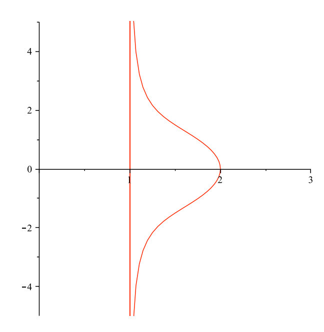
   asymptotes : $y=\pm x\sqrt{3}-1$

   la courbe traverse ses asymptotes au point de concours

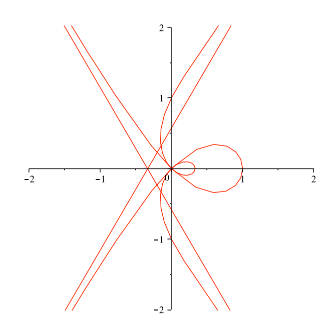
4. 

   asymptotes : $x\pm y\sqrt{3}=\dfrac{4}{3}$

5.

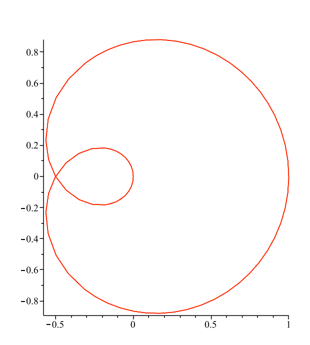


6.

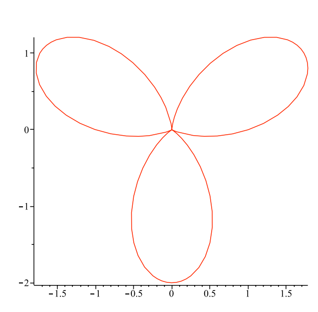


asymptotes : $3x \pm y\sqrt{3} = -1$

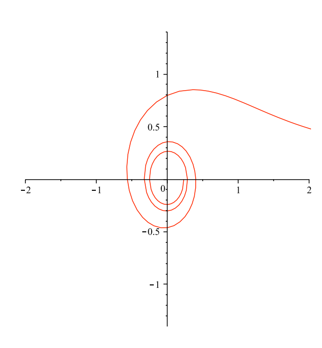
7.



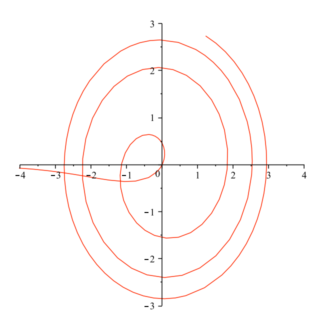
8.



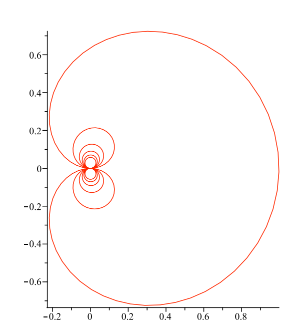
9.



10.



11.



Correction de l'exercice 4994 ▲

1. $y = ae^{bx}$.
2. $y = \pm\sqrt{ax+b}$.
3. $(a-x)^2 + y^2 = b^2$.
4. $x = a\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + b, \quad y = a\sin t$.
5. $y^2 = \frac{x^2}{2} + a^2\ln|x| + b$.

Correction de l'exercice 4995 ▲

1. $\rho = \frac{1}{a\theta+b}$.
2. $\rho = a\theta + b$. (Spirale d'Archimède)

Correction de l'exercice 4996 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow 2x + y\left(t - \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).
On dérive : $2x' + y'\left(t - \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0 \Rightarrow y'\left(t + \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0$.
$\Rightarrow y = \frac{\lambda}{t}$, $x = b + \frac{\lambda}{2t^2}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 4997 ▲

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow y\left(t + \frac{1}{t}\right) = a$ (cste).
$y = \frac{at}{1+t^2}$ et $x' = ty' \Rightarrow x = a\left(\ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{1+t^2}\right) + b$.

Correction de l'exercice 4998 ▲

La tangente ne doit pas être parallèle à Oy, donc on peut paramétrer $\mathscr{C}$ sous la forme : $y = f(x)$, ce qui donne l'équation :

$$|x + yy'| = |y|\sqrt{1+y'^2} \Leftrightarrow 2xyy' = y^2 - x^2.$$

(équation homogène) on obtient : $y = \pm\sqrt{\lambda x - x^2}$. Les courbes cherchées sont des arcs de cercles centrés sur Ox passant par O.

Correction de l'exercice 4999 ▲

On suppose que la droite est Ox et on paramètre la courbe cherchée, $\mathscr{C}$, par une abscisse curviligne s. Soient $M = (x,y) \in \mathscr{C}$, $I = (x - R\frac{dy}{ds}, y + R\frac{dx}{ds})$ le centre de courbure en M où R est le rayon de courbure. On veut $|R| = \left|y + R\frac{dx}{ds}\right| = |y + R\cos\varphi|$ d'où :

$$\pm\frac{dR}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dR}{ds}\cos\varphi = \frac{dR}{ds}\cos\varphi.$$

Ceci implique $\frac{dR}{ds} = 0$ donc R est constant (cercle) ou $\varphi \equiv 0 \mod \pi$ (droite horizontale). Le deuxième cas est exclu (courbe birégulière) donc il reste le cas d'un cercle qui convient s'il est tangent à Ox.

Correction de l'exercice 5000 ▲

$y + 2R\cos\varphi = \pm 2R \Rightarrow 2\frac{dR}{d\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + R\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ ou $2\frac{dR}{d\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} - R\sin\frac{\varphi}{2} = 0$.
cas 1 : $R = \frac{K}{\sin\varphi/2}$, $x = 2K\ln\left|\tan\frac{\varphi}{4}\right| - 4K\cos\frac{\varphi}{2} + L$, $y = 4K\sin\frac{\varphi}{2}$.
cas 2 : $R = \frac{K}{\cos\varphi/2}$, $x = -2K\ln\left|\tan\frac{\varphi+\pi}{4}\right| + 4K\sin\frac{\varphi}{2} + L$, $y = -4K\cos\frac{\varphi}{2}$.

Correction de l'exercice 5001 ▲

$M + a\vec{t} \in Ox$ (tractrices) $x = a\cos\varphi + a\ln|\tan\varphi/2| + b$, $y = a\sin\varphi$.

Correction de l'exercice 5003 ▲

1. $x = \int^s \cos\ln|t|\,dt, \quad y = \int^s \sin\ln|t|\,dt, \quad \rho = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta+\pi/4}$.
2. $x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du, \quad y = \int_0^s \sin\frac{u^2}{2}\,du$ (Clothoïde ou spirale de Cornu)
3. $x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi), \quad y = a(-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)$.
4. $x = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y = \frac{1}{\cos\varphi} = \operatorname{ch} x$.
5. $x = \frac{a}{4}(\sin 2\varphi + 2\varphi), \quad y = \frac{a}{4}\cos 2\varphi$ (cycloïde).

Correction de l'exercice 5004 ▲

Développante de cercle : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dR}{ds}\vec{N} \Rightarrow \frac{dR}{d\varphi} = r$.
$\Rightarrow x = x_0 + r(\cos\varphi - 1 + \varphi\sin\varphi), \quad y = y_0 + r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

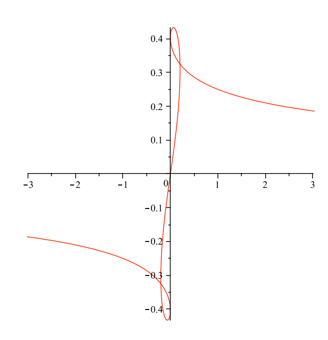
Correction de l'exercice 5005 ▲

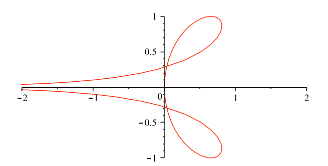
$y = \frac{s}{2}\sin\varphi \Rightarrow s = a\sin\varphi \Rightarrow x = \frac{a\sin 2\varphi}{4} + \frac{a\varphi}{2} + b, \quad y = \frac{a\sin^2\varphi}{2}$. (cycloïde)

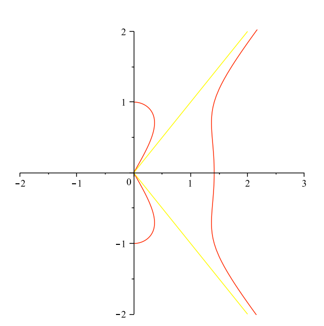
Correction de l'exercice 5006 ▲

Soit θ l'angle polaire de $\vec{OM}$: $\vec{MC} = \frac{ds}{d\varphi}\vec{n}$ et $\vec{MN} = \frac{ds}{d\theta}\vec{n}$.
$\frac{ds}{d\theta} = k\frac{ds}{d\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{k} + b \Rightarrow V = a\theta + b$ avec $a = \frac{1}{k} - 1$.
$\frac{\rho}{\rho'} = \tan(a\theta + b) \Rightarrow \rho = \lambda\cos(a\theta + b)^{-1/a}$ si $a \neq 0$ ou $\rho = \lambda e^{\mu\theta}$ si $a = 0$.
$k = 1 \quad \Rightarrow$ Spirale logarithmique.
$k = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$ Parabole de foyer O.
$k = 2 \quad \Rightarrow$ Cardioïde.
$k = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$ Hyperbole de centre O.
$k = -1 \Rightarrow$ Lemniscate de Bernouilli.

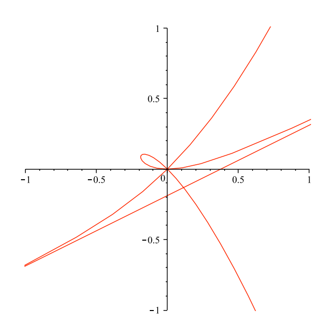
Correction de l’exercice 5007 ▲

1. 

2. 

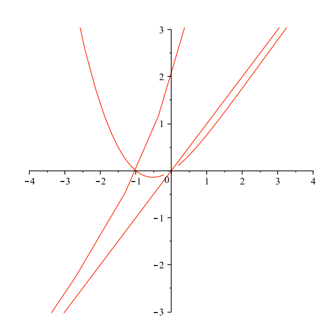
3. 

   asymptotes : $y = \pm x$
   $x - y \sim 1/(4x) \Rightarrow$ aire infinie
   $y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})/2$

4. 

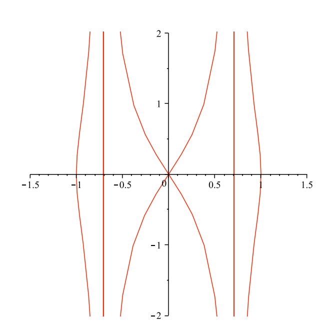
   asymptote : $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{16}$ (traversée)

5.



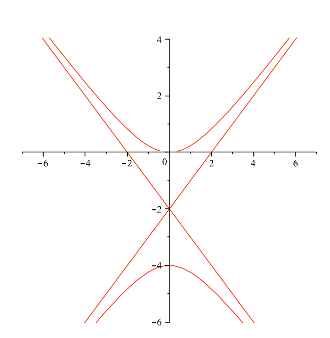
asymptote : $y = x$

6.



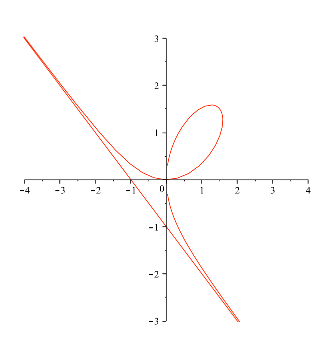
inflexions : $\tan \frac{t}{2} = 0, \pm 3$

7.



hyperbole : $(y+2)^2 - x^2 = 4$

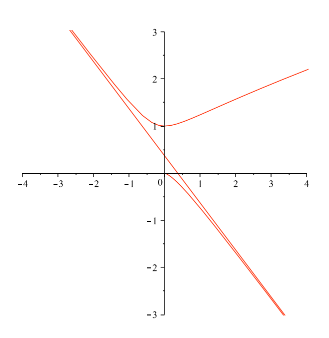
8.



asymptote : $x + y = -1$

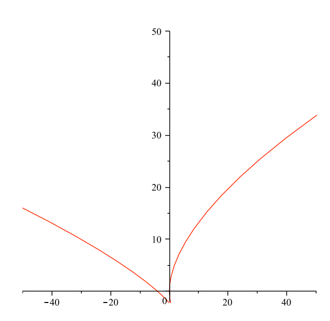
équation cartésienne : $x^3 + y^3 = 3xy$

9.



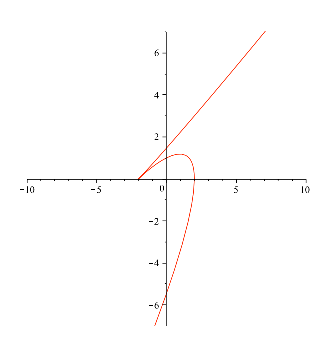
asymptote : $x+y=e^{-1}$
branche parabolique horizontale

10.



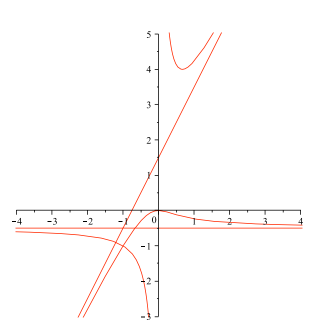
branche parabolique horizontale
rebroussement pour $t=1$

11.



branche parabolique de coefficient 1

12.

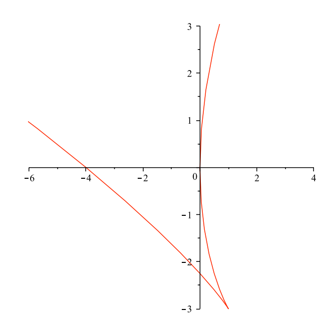


asymptote : $y=2x+\frac{3}{2}$
point double : $t^2+t=1$, $x=y=-1$ les tangentes sont orthogonales

---

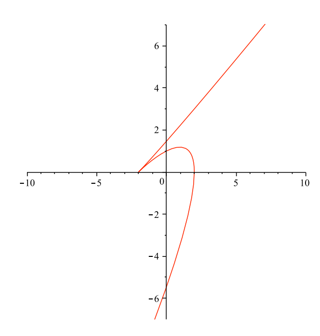
Correction de l'exercice 5008 ▲

1.



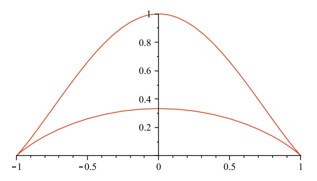
branche parabolique horizontale

2.



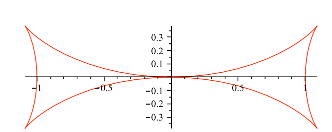
branche parabolique de coefficient 1

3.



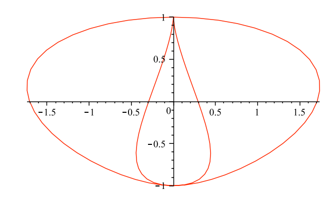
inflexion : $\cos t = \frac{2}{3}$

4.



rebroussement : $\cos^2 t = \frac{1}{3}$.

5.



Correction de l'exercice 5009 ▲

$x = \frac{3\cos\theta - \cos 3\theta}{4}$, $y = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$.

Correction de l'exercice 5010 ▲

$M = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $S = (a, 0)$:

On obtient les équations paramétriques : $x = \frac{R(R\cos\theta - a)}{R - a\cos\theta}$, $y = \frac{(R^2-a^2)\sin\theta}{R - a\cos\theta}$.

Pour $R \neq a$, il s'agit de la conique de centre O et d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2-a^2} = 1$.

Correction de l'exercice 5011 ▲

$y_A = t \Rightarrow \begin{cases} 2px = t^2 + ht + h^2/2 \\ y = t + h/2 \end{cases} \Rightarrow$ parabole $y^2 + h^2/4 = 2px$.

Correction de l'exercice 5012 ▲

$y_A = t, y_B = u \Rightarrow C : \left(\frac{ut}{2p}, \frac{t+u}{2}\right)$; aire $= \frac{|u-t|^3}{8p}$.

enveloppe : $M = \mathrm{mil}(A,B)$, parabole $y^2 + a^2/4 = 2px$.

Correction de l'exercice 5013 ▲

1. F.
2. $M = (t^2/2p, t)$, $M' = (t'^2/2p, t') \Rightarrow tt' = -p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = \frac{p}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \end{cases}$ avec $u = \frac{t}{p}$. (Parabole passant par F)
3. $\begin{cases} x = \frac{3p}{4}\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) \\ y = -\frac{p}{4}\left(u - \frac{1}{u}\right)^3 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 5014 ▲

1. Foyer.
2. Point d'impact : $\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ Point caractéristique : $\left(\frac{3t^2}{2p}, \frac{t(3p^2-t^2)}{2p^2}\right)$.

Correction de l'exercice 5015 ▲

$M = (t^2/2p, t) \Rightarrow I = (3t^2/2p + p, -t^3/p^2)$. Soit $P = (u^2/2p, u)$:

$IP = IM \Leftrightarrow (u-t)^3(u+3t) = 0 \Rightarrow u = -3t$.

Enveloppe : $\begin{cases} x = -3t^2/2p \\ y = 3t. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5016 ▲

équation polaire : $\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p(\cos\theta-\sin\theta)}{2+e(\cos\theta-\sin\theta)} \\ y = \frac{p(\cos\theta+\sin\theta)}{2+e(\cos\theta-\sin\theta)} \end{cases}$ conique d'excentricité $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5017 ▲

$3x = \cos 2\theta + 2\cos\theta$, $3y = \sin 2\theta + 2\sin\theta$: cardioïde à rebroussement en $(-1/3, 0)$.

Correction de l'exercice 5018 ▲

$D = Ox$, rayon $= 1$: $x = \theta - \cos\theta\sin\theta$, $y = \sin^2\theta$. pt caractéristique = projeté de I.

Correction de l'exercice 5019 ▲

$M = \begin{pmatrix} a(1+\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2a\cos t(1+\cos t) \\ 2a\sin t(1-\cos t) \end{pmatrix}$. Hypocycloïde à trois rebroussements.

Correction de l'exercice 5020 ▲

$x = a\cos 4\theta$, $y = a\sin 4\theta$.

Correction de l'exercice 5021 ▲

1. $x = \frac{\cos t}{a}(a^2 + (a^2-b^2)\sin^2 t)$, $y = \frac{\sin t}{b}(b^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t)$.
2.
3. Point stationnaire ssi $a^2 > 2b^2$, obtenu pour $\sin^2 t = \frac{a^2-2b^2}{3(a^2-b^2)}$. Rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Correction de l'exercice 5022 ▲

$D = Ox$, $A = (0,a)$,$M = (t,0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2/a. \end{cases}$ (Parabole)

Correction de l'exercice 5024 ▲

1. $\operatorname{sh}^2 t$.
2. $\theta - \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 5025 ▲

$2 - \sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 5026 ▲

1. $4\sqrt{2} + 4\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = 4\sqrt{2} + 4\arctan\sqrt{2} - \pi$.
2. 4.

Correction de l'exercice 5027 ▲

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{xy} = 1 - x - y \Rightarrow (x-y)^2 = 2(x+y) - 1$. La courbe est un arc de parabole d'axe la première bissectrice et tangent aux axes en $(1,0)$ et en $(0,1)$.

Longueur : $x-y=\operatorname{sh} t$, $2(x+y)=\operatorname{ch}^2 t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t+\frac{1}{4}\operatorname{sh} t$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t-\frac{1}{4}\operatorname{sh} t$, $\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$.
$L=\int_{t=-\operatorname{argsh} 1}^{\operatorname{argsh} 1}\frac{\operatorname{ch}^2 t\,dt}{\sqrt{2}}=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}+1$.

Correction de l'exercice 5028 ▲

Soit (a_i) une subdivision de $[a,b]$ et P la ligne brisée passant par les points $(a_i,f(a_i))$. On montre ci-dessous que pour toute courbe rectifiable L située au dessus de P et ayant même extrémités, on a $\operatorname{long}(L)\geqslant\operatorname{long}(P)$ (résultat intuitivement évident : planter des clous aux points $(a_i,f(a_i))$ et attacher un élastique en $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$, passant au dessus de ces clous). Cela étant montré, l'inégalité demandée en résulte en faisant tendre le pas de la subdivision vers zéro.
Démonstration du thm de l'élastique : par récurrence sur le nombre n de segments de P. Pour $n=1$ c'est un fait connu. $n-1\Rightarrow n$: si L passe par $(a_1,f(a_1))$ alors l'hypothèse de récurrence s'applique. Sinon, notons D la demi-droite issue de $(a_0,f(a_0))$ et passant par $(a_1,f(a_1))$. Par concavité, P est en dessous de D. L contient un point d'abscisse a_1 strictement au dessus de D, et aboutit en $(b,f(b))$ en dessous de D, donc il existe un point (u,v) sur $L\cap D$ avec $u>a_1$. En remplaçant l'arc $(a_0,f(a_0))$ – (u,v) de L par le segment correspondant on obtient une ligne L' plus courte que L, encore au dessus de P, et qui relève du premier cas.

Correction de l'exercice 5029 ▲

1. $x=-4t^3$, $y=\frac{3+6t^2-3t^4}{2}$.
2. $x=6\cos t-3\cos 2t$, $\quad y=6\sin t+3\sin 2t$.
3. $x=t+\sin t$, $\quad y=-1+\cos t$, $I_t=M_{t-\pi}+(\pi,-2)$.
4. $x=a(\cos^3 t+3\cos t\sin^2 t)$, $\quad y=a(\sin^3 t+3\sin t\cos^2 t)$. $x\pm y=a(\cos t\pm\sin t)^3\Rightarrow$ similitude de centre O, rapport 2, angle $\frac{\pi}{4}$.
5. $x_I=\frac{3x^4+1}{2x^3}$, $\quad y_I=\frac{x^4+3}{2x}$.
6. $x=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $\quad y=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$.
7. $\rho=e^{\theta-\pi/2}$.
8. $x=\frac{2+\cos\theta-\cos^2\theta}{3}$, $\quad y=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{3}$, $\quad$ cardioïde homothétique.

Correction de l'exercice 5030 ▲

Calcul.

Correction de l'exercice 5033 ▲

1.
2. Cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5034 ▲

$R=\frac{1}{2}$ aux sommets principaux $(0,\pm1)$ et $R=\sqrt{2}$ aux sommets secondaires $(\pm1/\sqrt{2},0)$.

Correction de l'exercice 5035 ▲

$-\frac{156}{125\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 5036 ▲

$y'(0)=\lambda\Rightarrow I=(-\lambda-\lambda^3,1+\lambda^2)$.

Correction de l'exercice 5038 ▲

$c_i = \frac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}\left(\frac{ac'}{1+a^2c^2} \pm c\right)$ où c est la courbure en M et $c' = \frac{dc}{ds}$.
Dans le repère de Frenet, les normales ont pour équations : $X = 0$, $\pm X = acY - a$, donc se coupent en C.

Correction de l'exercice 5039 ▲

1. Soit θ l'angle polaire de D. Dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y = aX^2 + bX$.
   On veut que $\mathscr{P}$ soit tangente à Oy, soit $b = -\tan\theta$ et que le rayon de courbure soit R, soit $a = \frac{1}{2R\cos^3\theta}$.
   Équation dans $0xy$: $x^2\sin^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\cos^2\theta - 2Rx\cos^2\theta = 0$.
2. O.

Correction de l'exercice 5040 ▲

1.
2. $x = \frac{4t^3+a(1-t^2)}{1+t^2}$, $\quad y = \frac{t^4-3t^2+2at}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 5041 ▲

$x = a\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, $\quad y = a\cos t$.

Correction de l'exercice 5042 ▲

M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que le plan P d'équation $ax + by + cz - d = 0$ passe par ces points, ce qui équivaut à : t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4 + bt^3 + ct^2 - d$. Un tel polynôme existe si et seulement si $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$ soit : $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0$ si aucun des t_i n'est nul.

Correction de l'exercice 5043 ▲

1. $\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{\tau}{c}\vec{B} \Rightarrow \vec{T}_1 = \vec{B}$, $\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\tau}{c}$, $\vec{N}_1 = -\vec{N}$, $c_1 = c$.
2. $\tau_1 = -\frac{c^2}{\tau}$.

Correction de l'exercice 5044 ▲

$c_1 = \sqrt{1+\frac{\tau^2}{c^2}}$, $\tau_1 = \frac{c\tau' - \tau c'}{c(c^2+\tau^2)}$.

Correction de l'exercice 5045 ▲

Pt caractéristique : $P = M + a(s)\vec{N} + b(s)\vec{B}$: CNS $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} \\ \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2} = \arctan(b/a)' = \tau. \end{cases}$ Rmq : le point caractéristique se projette sur I.

Correction de l'exercice 5046 ▲

$\vec{B} = \vec{T} + 2\vec{k} \Rightarrow s^2\frac{d^2\vec{T}}{ds^2} + s\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{T} = -\vec{k}$.
on pose $s = e^u$: $\vec{OM} = e^u\cos u\vec{A} + e^u\sin u\vec{B} - e^u\vec{k}$ où $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{k})$ est orthogonale et $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{k}\|$.
(spirale logarithmique relevée sur un cône)

Correction de l'exercice 5047 ▲

$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 = a^2$.

Correction de l'exercice 5048 ▲

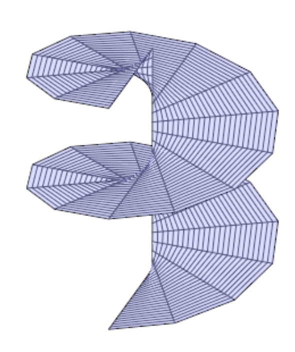
(Γ) est l'intersection d'un cylindre hyperbolique et d'un plan. C'est une hyperbole dans ce plan.
Pour $M(x,y,z) \in \Gamma$, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et on élimine x et y entre les équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ x^2-y^2-4x+2 = 0 \\ x+z = 1. \end{cases}$$

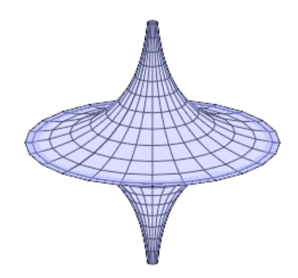
ce qui donne $2z^2 = r^2$, donc Γ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2 = x^2+y^2$ et la surface cherchée itou. La réciproque est évidente.

Correction de l'exercice 5049 ▲

1. $\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} - \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)x - \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)y + \rho z = \rho f - \rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}$.
2. $f - \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = a(\theta) \Rightarrow f(\rho,\theta) = a(\theta) + b(\theta)\rho$.
3.



Correction de l'exercice 5050 ▲



Correction de l'exercice 5051 ▲

La normale en M est parallèle ou sécante à $Oz \Leftrightarrow y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow f = f(\rho)$.

Correction de l'exercice 5053 ▲

1. Hyperboloïde de révolution à deux nappes.
2. $x = 2y$, $z^2 = 1 + 5y^2$.

Correction de l'exercice 5054 ▲

1. $z = x^2 + y^2$.
2. $x + y = \frac{1}{2}$.
3. $(x - y + \frac{1}{2})^2 = 2(z - y + \frac{1}{4})$.

Correction de l'exercice 5055 ▲

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z = 1$.

Correction de l'exercice 5058 ▲

1. $\begin{pmatrix} (x+2y)(y+2z) \\ -(2x+y)(y+2z) \\ (2x+y)(2y+z) \end{pmatrix}$ sauf pour $M = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(1, -2, 1)$.
2. $(x - z)(x + y + z) = 0$.
3. segment $x = z \in [-1, 1]$ et ellipse $x^2 + z^2 + xz = 1$.

Correction de l'exercice 5059 ▲

$a^2y^2 = (x^2 + y^2)(r^2 - z^2)$.

Correction de l'exercice 5060 ▲

$y(x^2 + (y-1)^2 + z^2) = z^2$.

Correction de l'exercice 5061 ▲

$x = \frac{a}{2}(1 + \cos u)$, $y = \frac{v}{2}(1 + \cos u)$, $z = \frac{\sqrt{a^2+v^2}}{2}\sin u$.

Correction de l'exercice 5062 ▲

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
2. On paramètre (Σ) par : $\begin{cases} x = a\cos u / \operatorname{ch} v \\ y = a\sin u / \operatorname{sh} v \\ z = a \operatorname{th} v. \end{cases}$

   La tangente à la méridienne passant par $M(u, v)$ est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et la tangente à (Γ) passant par $M(t, mt)$ est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + m\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Après calculs, le cosinus de ces deux vecteurs vaut $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ donc est constant.
3. Une courbe tracée sur (Σ) est définie par la donnée de u et v en fonction d'un paramètre t. Le cosinus de l'angle entre cette courbe et une méridienne de (Σ) vaut $\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}$, donc est constant si et seulement si le rapport v'$\overline{u'}$ est constant. En notant m cette constante et en prenant $u(t) = t$, on trouve les courbes déduites de (Γ) par rotation autour de Oz.

4.

